УДК 512.5

Б. Асадян, Н. Аханжиде (Ун-т Шахрекорда, Иран)

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С $2pqr$ ЭЛЕМЕНТАМИ МАКСИМАЛЬНОГО ПОРЯДКА

Let $3 < p < q < r$ be odd prime numbers. In this paper, we prove that the finite groups with exactly $2pqr$ elements of maximal order are solvable.

Нехай $3 < p < q < r$ — прості числа. Доведено, що кожна скінченна група з точно $2pqr$ елементами максимального порядку є розв'язною.

1. Введение. Разрешимость группы является одной из важных тем в теории групп. Некоторые вопросы теории групп связаны с разрешимостью групп, удовлетворяющих заданным конкретным условиям. Пусть G — конечная группа. Обозначим через $O(x)$ порядок элемента $x \in G$, через $\pi(G)$ множество простых делителей числа $|G|$, а через $\pi_e(G)$ множество порядков элементов группы G. Для целого положительного числа t положим $M_t(G) = \{g \in G \colon O(g) = t\}$. Две группы G_1 и G_2 называются конформными, если $\pi_e(G_1) = \pi_e(G_2)$ и $M_t(G_1) = M_t(G_2)$ для всех $t \in \pi_e(G_1)$ (см. [7]). Важная проблема, связанная с конформными группами, была предложена Дж. Г. Томпсоном [5] (проблема 12.37): можно ли утверждать, что каждая группа, конформная конечной разрешимой группе, является разрешимой?

До сих пор нет исчерпывающего ответа на этот вопрос. В качестве одного из подходов для доказательства разрешимости группы некоторые авторы использовали разного рода ограничения на количество элементов максимального порядка. Например, доказано, что если p и q — простые числа, то группы с точно $6pq$ элементами максимального порядка являются разрешимыми (см. [10]). В работах [1, 4], авторы исследовали структуру групп с заданным числом элементов максимального порядка. Целью настоящей работы является изучение вопроса о разрешимости конечной группы G с точно $2pqr$ элементами максимального порядка, где $3 < p < q < r$ — простые числа.

Далее в этой статье мы используем следующие обозначения. Для $p \in \pi_e(G)$ множество всех силовских p-подгрупп группы G обозначается через $\mathrm{Syl}_p(G)$. Кроме того, $S_p(G)$ обозначает силовскую p-подгруппу группы G, при этом полагаем $n_p(G) = |\mathrm{Syl}_p(G)|$. При отсутствии неоднозначности пишем S_p вместо $S_p(G)$. Функция Эйлера обозначается через ϕ. Подгруппа группы G, порожденная элементом $x \in G$, обозначается через $\langle x \rangle$; централизатор и нормализатор последней группы в группе G обозначаются через $C_G(\langle x \rangle)$ и $N_G(\langle x \rangle)$ соответственно. Мы пишем $a \mid n$, если a является делителем n, и полагаем $|n|_a = a^e$, если $a^e \mid\mid n$, т. е. если $a^e \mid n$, но $a^{e+1} \nmid n$. Ниже везде k обозначает максимальный порядок элементов в группе G, $M(G)$ равно числу элементов порядка k и $n, l \in \mathbb{N}$; p, q и r — такие простые числа, что $3 < p < q < r$. Все остальные обозначения стандартны и могут быть найдены в [2]. В настоящей статье мы доказываем следующую теорему.

Теорема. *Пусть p, q и r — такие простые числа, что $3 < p < q < r$. Если G — конечная группа и $M(G) = 2pqr$, то G разрешима.*

2. Предварительные результаты. Всюду в этой статье мы предполагаем, что p, q и r — такие простые числа, что $3 < p < q < r$. Пусть G — конечная группа и $k = \mathrm{Max}\,(\pi_e(G))$. Кроме того, пусть n – число циклических подгрупп порядка k. При доказательстве основной теоремы нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 2.1 ([9], лемма 2.2)**.** *Пусть G имеет ровно n циклических подгрупп порядка l. Тогда $m_l(G) = n\phi(l)$. В частности, если n — число циклических подгрупп группы G порядка k, то $M(G) = n\phi(k)$.*

Лемма 2.2 ([1], лемма 8)**.** *Существует положительное число α такое, что $|G|$ делит $M(G)k^{\alpha}$.*

Лемма 2.3 ([9], теорема 1.1)**.** *Если $M(G) = \phi(k)$, то группа G сверхразрешима.*

Лемма 2.4 ([1], лемма 7)**.** *Если существует простой делитель p числа k такой, что $p(p-1) > M(G)$, то группа G содержит единственную нормальную силовскую p-подгруппу S и $|S| = p$.*

Лемма 2.5 ([10], лемма 2.7)**.** *Если $M(G) = 2m$, где m — нечетное положительное целое число, то:*

(1) *$k = 4$, s^{α} или $2s^{\alpha}$, где s — нечетное простое число и $\alpha \in \mathbb{N}$;*

(2) *если группа G неразрешима, то $k = 2s^{\alpha}$ для некоторого нечетного простого числа s и $2||\phi(k) = (s-1)s^{\alpha-1}$; более того, каждая силовская 2-подгруппа группы G содержит максимальную подгруппу, которая является элементарной абелевой;*

(3) *если $k = 14$, $|G| = 2^{\alpha} \cdot 3 \cdot 7^{\beta}$ и группа G неразрешима, то $G \cong E \times L_2(7)$, где E — элементарная абелева 2-группа.*

Лемма 2.6 ([10], лемма 2.9)**.** *Пусть G содержит n циклических подгрупп A_i порядка k, где $i = 1, 2, \ldots, n$; $\{A_1, A_2, \ldots, A_d\}$ — полная система представителей сопряженных классов n циклических подгрупп порядка k и n_i — мощность сопряженного класса, содержащего A_i. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *$n_i = [G\colon N_G(A_i)]$, $n = \sum_{i=1}^{d} n_i$, $\pi(n_i) \cup \pi(A_i) = \pi(n_1) \cup \pi(A_1)$, где $i = 1, 2, \ldots, d$.*

(2) *$\pi(C_G(A_i)) = \pi(A_i)$, $[N_G(A_i)\colon C_G(A_i)] \mid \phi(k)$ и $|G| = |G\colon N_G(A_i)|[N_G(A_i)\colon C_G(A_i)]|C_G(A_i)|$, где $i = 1, 2, \ldots, d$.*

(3) *Пусть $A = \langle a \rangle$ и $O(a) = k$. Если $i = 1$ и $M(G) = 2m$, где m — нечетное положительное целое число, то группа G разрешима.*

Конечная группа G называется простой K_n-группой, если G — простая группа, для которой $|\pi(G)| = n$.

Таким образом, простая K_3-группа — это простая группа, для которой $|\pi(G)| = 3$. В следующей лемме описаны простые K_3- и K_4-группы, а также их порядки.

Лемма 2.7 [3]. *Пусть G — простая K_3-группа. Тогда G изоморфна одной из следующих простых групп:*

$$A_5(2^2 \cdot 3 \cdot 5), \quad A_6(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5), \quad L_2(7)(2^3 \cdot 3 \cdot 7), \quad L_2(8)(2^3 \cdot 3^2 \cdot 7),$$

$$L_2(17)(2^4 \cdot 3^2 \cdot 17), \quad L_3(3)(2^4 \cdot 3^3 \cdot 13), \quad U_3(3)(2^5 \cdot 3^3 \cdot 7), \quad U_4(2)(2^6 \cdot 3^4 \cdot 5).$$

Лемма 2.8 ([8], теорема 2)**.** *Пусть G — простая K_4-группа. Тогда G изоморфна одной из следующих групп:*

(1) $A_7(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7)$, $A_8(2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7)$, $A_9(2^6 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7)$, $A_{10}(2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7)$;

(2) $M_{11}(2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11)$, $M_{12}(2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11)$, $J_2(2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7)$;

(3) (a) $L_2(r)$, *где* r — *такое простое число, что* $r^2 - 1 = 2^a \cdot 3^b \cdot v^c$ *для* $a \geq 1$, $b \geq 1$, $c \geq 1$ *и простого числа* $v > 3$;

(b) $L_2(2^m)$, *где число* $m \geq 2$ *такое, что число* $2^m - 1 = u$ *простое и* $2^m + 1 = 3^t b$, *причем* $t > 3$ — *простое число и* $b \geq 1$;

(c) $L_2(3^m)$, *где число* $m \geq 2$ *такое, что* $3^m + 1 = 4t$, $3^m - 1 = 2u^c$ *или* $3^m + 1 = 4t^b$ *и* $3^m - 1 = 2u$, *причем числа* u *и* t *являются нечетными простыми,* $b \geq 1$ *и* $c \geq 1$;

(d) $L_2(16)(2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17)$, $L_2(25)(2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 13)$, $L_2(49)(2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2)$, $L_2(81)(2^4 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 41)$, $L_3(4)(2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7)$, $L_3(5)(2^5 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 31)$, $L_3(7)(2^5 \cdot 3^2 \cdot 7^3 \cdot 19)$, $L_3(8)(2^9 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 73)$, $L_3(17)(2^9 \cdot 3^2 \cdot 17^3 \cdot 307)$, $L_4(3)(2^7 \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 13)$, $S_4(4)(2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 17)$, $S_4(5)(2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^4 \cdot 13)$, $S_4(7)(2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^4)$, $S_4(9)(2^8 \cdot 3^8 \cdot 5^2 \cdot 41)$, $S_6(2)(2^9 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7)$, $O_8^+(2)(2^{12} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7)$, $G_2(3)(2^6 \cdot 3^6 \cdot 7 \cdot 13)$, $U_3(4)(2^6 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 13)$, $U_3(5)(2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7)$, $U_3(7)(2^7 \cdot 3 \cdot 7^3 \cdot 43)$, $U_3(8)(2^9 \cdot 3^4 \cdot 7 \cdot 19)$, $U_3(9)(2^5 \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 73)$, $U_4(3)(2^7 \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 7)$, $U_5(2)(2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 11)$, $Sz(8)(2^6 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13)$, $Sz(32)(2^{10} \cdot 5^2 \cdot 31 \cdot 41)$, ${}^3D_4(2)(2^{12} \cdot 3^4 \cdot 7^2 \cdot 13)$, $2F_4(2)'(2^{11} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 13)$.

***Замечание* 2.1.** Если S — простая K_4-группа, то 3 делит $|S|$ или $S \cong Sz(8)(2^6 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13)$ или $Sz(32)(2^{10} \cdot 5^2 \cdot 31 \cdot 41)$.

Лемма 2.9. *Пусть* G — *конечная неразрешимая группа такая, что* $M(G) = 2pqr = \phi(k) \cdot n$. *Тогда* $k = 2s^\alpha$, *где* $\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha \leq 2$ *и* s — *простое число. Кроме того, имеет место одно из следующих утверждений:*

(i) $\alpha = 2$ *и либо* $s = q = 2p + 1$, $n = r$, *либо* $s = r \in \{2p + 1, 2q + 1\}$;

(ii) $\alpha = 1$ *и* $s \in \{2p + 1, 2q + 1, 2r + 1, 2pq + 1, 2pr + 1, 2qr + 1\}$.

Доказательство. Поскольку группа G неразрешима, из леммы 2.5(2) следует, что $k = 2s^\alpha$, где s — нечетное простое число. Тогда $2pqr = \phi(2s^\alpha) \cdot n$ по лемме 2.1. Если $\alpha > 2$, то $s^2 \mid \phi(s^\alpha)$, поэтому $s^2 \mid pqr$, что приводит к противоречию. Если $\alpha = 2$, то $\frac{s-1}{2} s \,\Big|\, pqr$. Рассмотрим возникающие при этом три случая.

1. Если $s = p$, то $(s - 1)/2 < p$, поэтому $(s - 1)/2 = 1$ и $s = p = 3$, что противоречит нашему предположению.

2. Если $s = q$, то $(s - 1)/2 = p$, поэтому $s = q = 2p + 1$ и $n = r$.

3. Если $s = r$, то $(s - 1)/2 \in \{p, pq, q\}$. Если $(s - 1)/2 = pq$, то $\phi(k) = 2pqr$, поэтому из леммы 2.3 следует, что группа G сверхразрешима, что приводит к противоречию.

Таким образом, $s = r \in \{2p + 1, 2q + 1\}$.

Если $\alpha = 1$, то $(s - 1)/2 \mid pqr$. Если $s = 2pqr + 1$, то с учетом того, что $\phi(k) = 2pqr = M(G)$, приходим к противоречию по лемме 2.3. Таким образом, $s \in \{2p + 1, 2q + 1, 2r + 1, 2pq + 1, 2pr + 1, 2qr + 1\}$.

3. Доказательство теоремы. Пусть G — неразрешимая группа. Согласно нашему предположению G имеет n циклических подгрупп порядка k. Для каждого $1 \leq i \leq d$ выберем полную систему представителей A_i сопряженных классов этих подгрупп и положим $n_i = [G : N_G(A_i)]$. Поскольку группа G неразрешима, из леммы 2.6(3) следует, что $d \geq 2$. Кроме того, согласно предположениям леммы 2.5, число s является простым. Рассмотрим структуру группы G при различных значениях s, указанных в лемме 2.9.

***Случай* 1.** Пусть $\alpha = 2$, $s = q = 2p + 1$ и $n = r$. Тогда $k = 2(2p + 1)^2 = 2q^2$ по лемме 2.9. Предположим, что группа $A_i = \langle a_i \rangle$ такова, что $O(a_i) = 2q^2$. Из леммы 2.2 следует, что $|G| \mid 2^\alpha prq^\beta$, причем $\alpha, \beta > 0$. В силу нашего предположения $n = r$, поэтому $n = \sum_{i=1}^{d} n_i = r$ по лемме 2.6(1), так что $r \nmid n_i$ для всех $1 \leq i \leq d$. Кроме того, из леммы 2.6(2) следует, что

$[N_G(A_i)\colon C_G(A_i)] \mid 2pq$ и $\pi(C_G(A_i)) = \{2, q\}$. Поэтому G является $\{2, p, q\}$-группой. Однако в силу леммы 2.7 $3 \in \pi(H)$ для каждой простой K_3-группы H. Но наше предположение влечет, что $3 < p < q$ и, следовательно, мы приходим к противоречию.

***Случай* 2.** Пусть $\alpha = 2$ и $s = r \in \{2p+1, 2q+1\}$. Кроме того, пусть сначала $s = r = 2p+1$. Предположим, что группа $A_i = \langle a_i \rangle$ такова, что $O(a_i) = 2r^2$. Поскольку $k = 2r^2$, из леммы 2.2 следует, что G является $\{2, p, q, r\}$-группой. В силу лемм 2.1 и 2.6(1) отсюда получаем $n = \sum_{i=1}^{d} n_i = q$, так что $q \nmid n_i$ для каждого $1 \le i \le d$. По лемме 2.6(2) имеем $[N_G(A_i)\colon C_G(A_i)] \mid 2pr$ и $\pi(C_G(A_i)) = \{2, r\}$. Значит, G является $\{2, p, r\}$-группой. Поскольку $3 < p < r$, это приводит к противоречию по лемме 2.7. Заменяя в предыдущем случае q на p, приходим к противоречию и в случае, когда $s = r = 2q+1$.

***Случай* 3.** Пусть $\alpha = 1$ и $s \in \{2pr+1, 2qr+1, 2pq+1\}$. Тогда $k \in \{2(2pr+1), 2(2qr+1), 2(2pq+1)\}$ по лемме 2.9. Если $s = 2pr+1$, то в силу неравенства $(2pr+1)2pr > 2pqr$ и леммы 2.4 имеем $S_{2pr+1} \trianglelefteq G$ и $|S_{2pr+1}| = 2pr+1$. Поэтому $S_{2pr+1}(G)$ — циклическая подгруппа группы G. Поскольку $(2pr+1)q > k$, имеем $(2pr+1)q \notin \pi_e(G)$. Следовательно, действие группы S_q на S_{2pr+1} является фробениусовым. Отсюда получаем делимость $q \mid 2pr$, приводящую к противоречию. Снова заменяя в предыдущем рассуждении q на p, приходим к противоречию и в случае, когда $s = 2qr+1$.

Если $s = 2pq+1$, то с учетом $k = 2s$ из леммы 2.2 следует, что $|G| \mid 2^{\alpha} pqrs^{\beta}$, где $\alpha, \beta > 0$. Следовательно, $n = r$ по лемме 2.1. Пусть группа $A_i = \langle a_i \rangle$ такова, что $O(a_i) = 2s$. Тогда $n = \sum_{i=1}^{d} n_i = r$ по лемме 2.6(1), так что $r \nmid n_i$ для каждого $1 \le i \le d$. Кроме того, по лемме 2.6(2) имеем $[N_G(A_i)\colon C_G(A_i)] \mid 2pq$, $\pi(C_G(A_i)) = \{2, s\}$ и, значит, $\pi(G) \subseteq \{2, p, q, s\}$. Однако из нашего предположения следует, что $3 < p < q < s$, поэтому в силу леммы 2.7 группа G не допускает в качестве фактора никакой простой K_3-группы. Следовательно, существует фактор группы G, изоморфный простой K_4-группе. Однако $3 \notin \pi(G)$. Поэтому $G \cong Sz(8)$ или $Sz(32)$ в силу замечания 2.1 и, следовательно, $s = 2pq+1 = 13$ или 41 соответственно. Пришли к противоречию.

***Случай* 4.** Пусть $\alpha = 1$ и $s = 2r+1$. Тогда $k = 2s$ по лемме 2.9. В силу леммы 2.2 справедливо включение $\pi(G) \subseteq \{2, p, q, r, s\}$. Пусть группа $A_i = \langle a_i \rangle$ такова, что $O(a_i) = 2s$. Тогда реализуется одна из двух возможностей, рассматриваемых ниже.

1. Если существует такое $1 \le i \le d$, что $p \nmid n_i$, то $[N_G(A_i)\colon C_G(A_i)] \mid 2r$ и $\pi(C_G(A_i)) = \pi(A_i) = \{2, s\}$ по лемме 2.6(2). Следовательно, $\pi(G) \subseteq \{2, q, r, s\}$. Поскольку $3 < q < r < s$, в силу леммы 2.7 группа G не допускает в качестве фактора никакой простой K_3-группы. Значит, существует фактор группы G, изоморфный простой K_4-группе. Но тогда $3 \notin \pi(G)$ и из замечания 2.1 следует, что $G \cong Sz(8)$ или $Sz(32)$. Поэтому $s = 2r+1 = 13$ или 41 соответственно, что дает требуемое противоречие.

2. Если $p \mid n_i$ для каждого $1 \le i \le d$, то в силу лемм 2.6(1) и 2.2 имеем $n = \sum_{i=1}^{d} n_i = pq$. Поэтому существует $1 \le i \le d$ такое, что $q \nmid n_i$. Таким образом, G является $\{2, p, r, s\}$-группой по лемме 2.6(2). Поскольку $3 < p < r < s$, в силу леммы 2.7 группа G не допускает в качестве фактора никакой простой K_3-группы. Значит, существует фактор группы G, изоморфный простой K_4-группе. Проводя рассуждение, аналогичное использованному в предыдущем случае, мы снова приходим к противоречию.

***Случай* 5.** Пусть $\alpha = 1$ и $s = 2q+1$. Тогда $k = 2s$ по лемме 2.9. В силу леммы 2.2 справедливо включение $\pi(G) \subseteq \{2, p, q, r, s\}$. Пусть группа $A_i = \langle a_i \rangle$ такова, что $O(a_i) = 2s$. Тогда реализуется одна из двух возможностей, рассматриваемых ниже.

1. Если существует такое $1 \leq i \leq d$, что $p \nmid n_i$, то из леммы 2.6(2) следует, что $[N_G(A_i) : C_G(A_i)] \mid 2q$ и $\pi(C_G(A_i)) = \pi(A_i) = \{2, s\}$, поэтому $\pi(G) \subseteq \{2, q, r, s\}$. Поскольку $3 < q < s$ и $3 < r$, в силу леммы 2.7 группа G не допускает в качестве фактора никакой простой K_3-группы. Значит, существует фактор группы G, изоморфный простой K_4-группе. Однако $3 \notin \pi(G)$, и, значит, $G \cong Sz(8)$ или $Sz(32)$ в силу замечания 2.1 и соответственно $s = 2q + 1 = 13$ или 41. Получили противоречие.

2. Если $p \mid n_i$ для каждого $1 \leq i \leq d$, то $n = \sum_{i=1}^{d} n_i = pr$ по леммам 2.6(1) и 2.2. Поэтому найдется такое $1 \leq i \leq d$, что $r \nmid n_i$. Поскольку $[N_G(A_i) : C_G(A_i)] \mid 2q$ и $\pi(C_G(A_i)) = \pi(A_i) = \{2, s\}$, из леммы 2.6(2) следует, что G является $\{2, p, q, s\}$-группой. Поскольку $3 < p < q < s$, в силу леммы 2.7 группа G не допускает в качестве фактора никакой простой K_3-группы. Значит, существует фактор группы G, изоморфный простой K_4-группе. Это приводит к противоречию так же, как и в предыдущем случае.

***Случай* 6.** Пусть $\alpha = 1$ и $s = 2p + 1$. Тогда $k = 2(2p + 1)$ по лемме 2.9. В силу леммы 2.2 отсюда следует, что $\pi(G) \subseteq \{2, p, q, r, s\}$. Пусть группа $A_i = \langle a_i \rangle$ такова, что $O(a_i) = 2s$. Тогда реализуется одна из двух возможностей, рассматриваемых ниже.

1. Если существует такое $1 \leq i \leq d$, что $q \nmid n_i$, то $[N_G(A_i) : C_G(A_i)] \mid 2p$ и $\pi(C_G(A_i)) = \pi(A_i) = \{2, s\}$ по лемме 2.6(2). Поэтому $\pi(G) \subseteq \{2, p, r, s\}$. Поскольку $3 < p < s$ и $3 < r$, в силу леммы 2.7 группа G не допускает в качестве фактора никакой простой K_3-группы. Значит, существует фактор группы G, изоморфный простой K_4-группе. Однако $3 \notin \pi(G)$, поэтому в силу замечания 2.1 имеем $G \cong Sz(8)$ или $Sz(32)$ и, значит, $s = 2p + 1 = 13$ или 41 соответственно. Получили противоречие.

2. Если $q \mid n_i$ для каждого $1 \leq i \leq d$, то $n = \sum_{i=1}^{d} n_i = qr$ по леммам 2.6(1) и 2.2. Следовательно, существует такое $1 \leq i \leq d$, что $r \nmid n_i$. Поскольку $[N_G(A_i) : C_G(A_i)] \mid 2p$ и $\pi(C_G(A_i)) = \pi(A_i) = \{2, s\}$, группа G является $\{2, p, q, s\}$-группой по лемме 2.6(2). Поскольку $3 < p < s$ и $3 < q$, в силу леммы 2.7 группа G не допускает в качестве фактора никакой простой K_3-группы. Значит, существует фактор группы G, изоморфный простой K_4-группе. Это приводит к противоречию так же, как и в предыдущем случае.

Таким образом, группа G является разрешимой, что и требовалось доказать.

Литература

1. *Chen G. Y., Shi J.* Finite groups with 30 elements of maximal order // Appl. Categ. Structures. – 2008. – **16**, № 1. – P. 239 – 247.
2. *Gorenstein D.* Finite groups. – New York: Harper and Row Press, 1968.
3. *Herzog M.* On finite simple groups of order divisible by three primes only // J. Algebra. – 1968. – **120**, № 10. – P. 383 – 388.
4. *Jiang Q., Shao C.* Finite groups with 24 elements of maxiamal order // Front. Math. China. – 2010. – **5**, № 4. – P. 665 – 678.
5. *Mazurov V., Khukhro E. I.* The Kourovka notebook: unsolved problems in group theory. – 17th ed. – Novosibirsk: Russ. Acad. Sci. Sib. Division. Inst. Math., 2010.
6. *Miller G.* Addition to a theorem due to Frobenius // Bull. Amer. Math. Soc. – 1904. – **11**, № 1. – P. 6 – 7.
7. *Shi W.* Groups whose elements have given orders // Chin. Sci. Bull. – 1997. – **42**, № 21. – P. 1761 – 1764.
8. *Shi W.* On simple K_4-group // Chin. Sci. Bull. – 1991. – **36**, № 7. – P. 1281 – 1283.
9. *Yang C.* Finite groups based on the numbers of elements of maximal order // Chin. Ann. Math. Ser. A. – 1993. – **14**, № 5. – P. 561 – 567 (in Chinese).
10. *Yong X., Juanjuan G., Hailong H.* Finite groups with $6pq$ elements of the largest order // Ital. J. Pure and Appl. Math. – 2013. – **31**. – P. 277 – 284.

Получено 08.08.14,
после доработки — 30.07.14