УДК 517.53

**Дз. В. Луківська** (Львів. нац. ун-т ім. І. Франка)

# ДЕЯКІ ГОЛОМОРФНІ УЗАГАЛЬНЕННЯ ЛОКСОДРОМНИХ ФУНКЦІЙ

The functional equation of the form $f(qz) = p(z)f(z),\ z \in \mathbb{C}\backslash\{0\},\ q \in \mathbb{C}\backslash\{0\},\ |q| < 1$ is considered. For certain fixed elementary functions $p(z)$, holomorphic solutions of this equation are found. These solutions are some generalizations of loxodromic functions. Some of solutions are represented via the Schottky – Klein prime function.

Рассматривается функциональное уравнение $f(qz) = p(z)f(z),\ z \in \mathbb{C}\backslash\{0\},\ q \in \mathbb{C}\backslash\{0\},\ |q| < 1$. При определенных фиксированных элементарных функциях $p(z)$ найдены его голоморфные решения. Эти решения являются некоторыми обобщениями локсодромных функций. Некоторые из решений представляются с помощью первичной функции Шоттки – Кляйна.

**Вступ.** Позначимо $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Для $z \in \mathbb{C}^*$ розглянемо рівняння

$$f(qz) = p(z)f(z), \tag{1}$$

де $p(z)$ — деяка функція, $q \in \mathbb{C}^*,\ |q| < 1$.

У випадку $p(z) \equiv 1$ розв'язком цього рівняння є класична локсодромна функція [3]. Клас локсодромних функцій із мультиплікатором $q$ (тобто таких, що задовольняють умову $f(qz) = f(z),\ q \in \mathbb{C}^*,\ |q| < 1$) позначатимемо $\mathcal{L}_q$. Теорія локсодромних функцій була розроблена О. Раузенбергером [14]. Ж. Валірон [17] назвав ці функції локсодромними, тому що точки, в яких ці функції у випадку недодатного $q$ набувають однакових значень, лежать на логарифмічних спіралях. Поверхня Землі може бути змодельованою математично у вигляді сфери Рімана, тобто як проекція сфери на комплексну площину. Образи логарифмічних спіралей при стереографічній проекції на сферу Рімана перетинають меридіани під одним і тим же кутом і називаються локсодромними кривими ($\lambda o\xi o\zeta$ — косий, $\delta\rho o\mu o\zeta$ — шлях).

Історія локсодроми сягає тих часів, коли мореплавці вперше зрозуміли, що Земля не є плоскою. Отже, вони повинні були взяти до уваги кривину. Важливою подією стала поява у 1569 р. проекції Меркатора, тобто рівнокутної циліндричної проекції. „Рівнокутна” в назві проекції підкреслює те, що проекція зберігає кути між напрямками. Проекція Меркатора виявилася досить зручною для потреб мореплавства. Пояснюється це тим, що траєкторія руху корабля, що йде під одним і тим же румбом до меридіана (тобто з незмінним положенням стрілки компаса щодо шкали), зображується прямою лінією на карті в проекції Меркатора, тобто всі локсодроми в ній зображуються прямими лініями. Для проекції Меркатора характерно те, що на картах не спотворюються кути і форми, а відстані зберігаються тільки на екваторі (на півночі і півдні істотно спотворюються відстані і розміри). В даний час вона застосовується для складання морських навігаційних і аеронавігаційних карт, а також в геодезії, системах GPS навігації. Сьогодні у геоінформаційних системах широко застосовується універсальна трансверсальна проекція Меркатора (Universal Transverse Mercator — UTM). Багато навігаційних сервісів, зокрема Google Maps, користуються системою координат Web Mercator. У статтях [2, 15] також можна знайти деякі застосування локсодромних функцій.

Відновлення інтересу до вивчення локсодромних мероморфних функцій відбулося відносно нещодавно, після звернення до цієї тематики А. Кондратюка. Так, у серії робіт А. Кондратюка та його учнів отримано важливі результати в теорії локсодромних функцій та їх узагальнень.

Уперше до питання локсодромності А. Кондратюк звернувся у статті [9], присвяченій мероморфним відображенням двовимірного тора на сферу Рімана та їх зв'язку з локсодромними мероморфними функціями у проколеній комплексній площині. У роботах [4, 5, 10] вивчається зв'язок локсодромності з Жюліа-винятковістю. Розглянувши локсодромні різниці субгармонічних функцій, А. Кондратюк спільно зі своїми учнями отримав зображення таких функцій та описав їх міри Ріса у [6, 8 12, 13]. Варто також згадати роботу Н. Сокульської та В. Хорощак [7], у якій розглядаються класи локсодромних (мультиплікативно періодичних) мероморфних функцій у верхній півплощині комплексної площини.

Природним чином постало завдання узагальнити поняття локсодромної функції, тобто знайти розв'язок рівняння (1) і для інших функцій $p(z)$. У [5] знайдено мероморфний і голоморфний розв'язок цього рівняння у випадку $p(z) \equiv \mathrm{const}$.

Мета даної статті — отримати голоморфні розв'язки рівняння (1), де $p(z)$ — деякі елементарні функції. Ці розв'язки будуть деякими узагальненнями локсодромних функцій.

**Випадок $p(z) = 1/(1-z)$.** Розглянемо функціональне рівняння

$$f(qz) = \frac{1}{1-z} f(z), \quad z \in \mathbb{C}^*. \tag{2}$$

Наше завдання полягає у знаходженні голоморфних у $\mathbb{C}^*$ розв'язків даного рівняння.

Для цього визначимо цілу функцію

$$H(z) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^n z)$$

з послідовністю нулів $\{q^{-n}\}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 < |q| < 1$.

**Теорема 1.** *Ціла функція $f(z) = CH(z)$, де $C$ — стала, задовольняє рівняння* (2).

***Доведення.*** Справді,

$$(1-z)f(qz) = (1-z)\, C \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - q^{n+1} z\right) =$$

$$= C(1-z) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - q^k z\right) = C \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^n z) = f(z).$$

**Теорема 2.** *Кожен голоморфний у $\mathbb{C}^*$ розв'язок рівняння* (1) *має вигляд $f(z) = CH(z)$, де $C$ — стала.*

***Доведення.*** Із теореми 1 відомо, що $f$ задовольняє рівняння (2). Оскільки $f(z)$ голоморфна в $\mathbb{C}^*$, звідси випливає, що $f(qz)$ голоморфна в $\mathbb{C}^*$. Отже, $f(1) = 0$.

Покладемо у рівнянні (2) $z = \dfrac{1}{q}$. Ми отримали

$$f\left(\frac{1}{q}\right) = \left(1 - \frac{1}{q}\right) f\left(q\frac{1}{q}\right) = \left(1 - \frac{1}{q}\right) f(1) = 0.$$

Методом математичної індукції легко показати, що $f\left(\dfrac{1}{q^n}\right) = 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Оскільки $f(1) = 0$ і $f\left(\dfrac{1}{q^n}\right) = 0$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, то $f(z) = g(z)H(z)$, де $g$ — голоморфна функція.

Таким чином,

$$f(qz) = g(qz)H(qz) = g(qz)\,\frac{1}{1-z}\,H(z). \tag{3}$$

Використовуючи рівняння (2), отримуємо

$$f(qz) = \frac{1}{1-z}\,g(z)H(z). \tag{4}$$

Прирівнюючи праві частини рівностей (3) і (4), бачимо, що $g(qz) = g(z)$ для кожного $z \neq q^{-n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Іншими словами, для всіх $z \in \mathbb{C}^*$ виконується $g(qz) = g(z)$. З останньої рівності безпосередньо випливає, що функція $g$ є локсодромною. Крім того, $g$ голоморфна. Отже, $g$ є сталою [3, с. 93].

Теорему 2 доведено.

***Зауваження.*** З теореми 2 випливає, що всі голоморфні розв'язки рівняння (2) є цілими функціями.

**Випадок $p(z) = 1/z$.** Тепер розглянемо функціональне рівняння

$$f(qz) = \frac{1}{z}\,f(z), \quad z \in \mathbb{C}^*. \tag{5}$$

Знайдемо його голоморфний у $\mathbb{C}^*$ розв'язок. Для цього розглянемо первинну функцію Шотткі – Кляйна [1, 5]

$$P(z) = (1-z)\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n z)\left(1-\frac{q^n}{z}\right). \tag{6}$$

Її досліджували Ф. Кляйн [11] та Ф. Шотткі [16] у другій половині XIX — на початку XX століття. Дана функція голоморфна в $\mathbb{C}^*$. Вона має нулі у точках $\{q^n\}$, $n \in \mathbb{Z}$. Первинна функція Шотткі – Кляйна має властивість [3, с. 94]

$$P(qz) = -z^{-1}P(z). \tag{7}$$

Нам знадобиться таке допоміжне твердження.

**Лема .** *Для всіх* $z \in \mathbb{C}^*$

$$P(z) = A\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} z^n, \tag{8}$$

*де*

$$A = \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n)^2 \Big/ \sum_{n=1}^{+\infty} q^{\frac{n(n-1)}{2}}. \tag{9}$$

***Доведення.*** Функція $P$ аналітична в $\mathbb{C}^*$, розвинемо її в ряд Лорана в $\mathbb{C}^*$. Нехай

$$P(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n. \tag{10}$$

Знайдемо коефіцієнти $a_n$. Розглянувши функцію $P(qz)$ і застосувавши до неї властивість (7), одержимо

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n q^n z^n = P(qz) \overset{(6)}{=} -\frac{1}{z}\, P(z) \overset{(9)}{=} -\frac{1}{z} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-a_n) z^{n-1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-a_{n+1}) z^n.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях $z$, бачимо, що $a_{n+1} = -a_n q^n$ для всіх $n \in \mathbb{Z}$. Нехай $a_0 = A$. Застосовуючи метод математичної індукції по $n$, можна показати, що $a_n = (-1)^n A q^{n(n-1)/2}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Подібні міркування застосуємо до $n \in \mathbb{Z}_-$ і отримаємо $a_{-n} = (-1)^n A q^{n(n+1)/2}$, $n \in \mathbb{N}$. Оскільки $q^{\frac{n(n-1)}{2}} = q^{\frac{(-n)(-n+1)}{2}}$, то можна зробити висновок, що для всіх $z \in \mathbb{C}^*$

$$P(z) = A \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} z^n.$$

Залишилося знайти $A$. Розглянемо $P(-1)$:

$$P(-1) = A \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{\frac{n(n-1)}{2}} = \ldots + \underset{n=-2}{Aq^3} + \underset{n=-1}{Aq} + \underset{n=0}{A} + \underset{n=1}{A} + \underset{n=2}{Aq} + \underset{n=3}{Aq^3} + \ldots = 2A \sum_{n=1}^{+\infty} q^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

З іншого боку, із виразу (6) ми бачимо, що

$$P(-1) = 2 \prod_{n=1}^{\infty} (1+q^n)^2.$$

Таким чином,

$$A = \prod_{n=1}^{\infty} (1+q^n)^2 \Big/ \sum_{n=1}^{+\infty} q^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Зауважимо, що оскільки $0 < |q| < 1$, то $\prod_{n=1}^{\infty} (1+q^n)^2$ і $\sum_{n=1}^{+\infty} q^{\frac{n(n-1)}{2}}$ є збіжними.

**Теорема 3.** *Голоморфна в $\mathbb{C}^*$ функція $f(z) = CP(-z)$, де $C$ — стала, задовольняє рівняння* (5).

***Доведення.*** Використовуючи рівність (7), отримуємо

$$f(qz) = CP(-qz) = C\,\frac{1}{z}\, P(-z) = \frac{1}{z}\, f(z).$$

**Теорема 4.** *Кожен голоморфний у $\mathbb{C}^*$ розв'язок рівняння* (5) *має вигляд $f(z) = CP(-z)$, де $C$ — стала.*

***Доведення.*** Нехай функція $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ є голоморфним у $\mathbb{C}^*$ розв'язком рівняння (5). Тоді для всіх $z \in \mathbb{C}^*$ маємо

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n q^n z^n = f(qz) \overset{(5)}{=} \frac{1}{z} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^{n-1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{n+1} z^n.$$

Прирівнюючи відповідні коефіцієнти, отримуємо $a_{n+1} = a_n q^n$ для кожного $n \in \mathbb{Z}$. Нехай $a_0 = B$. Якщо $B = 0$, то $f(z) \equiv 0$, і немає що доводити. Нехай $B \neq 0$. За індукцією легко показати, що $a_n = B q^{n(n-1)/2}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Аналогічні міркування застосовуємо для від'ємних цілих $n$. Отже, для всіх $n \in \mathbb{Z}$

$$f(z) = B \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{\frac{n(n-1)}{2}} z^n. \tag{11}$$

З леми відомо розвинення в ряд Лорана функції $P$ в $\mathbb{C}^*$. Комбінуючи (8), (9) і (11), отримуємо $f(z) = CP(-z)$, де $C = B/A$, що і потрібно було довести.

Як наслідок, ми отримуємо наступну цікаву властивість розв'язків рівняння (5).

***Наслідок.*** *Нехай $f$ є голоморфним у $\mathbb{C}^*$ розв'язком рівняння* (5) *і для довільного $R$ виконується* $\displaystyle\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z}\,dz = 0$. *Тоді* $f(z) \equiv 0$.

***Доведення.*** Оскільки $f$ голоморфна в $\mathbb{C}^*$, ми можемо розвинути її в ряд Лорана в $\mathbb{C}^*$: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$, де $a_n = a_0 q^{n(n-1)/2}$ для всіх $n \in \mathbb{Z}$ згідно з теоремою 4. З рівності $a_0 = \displaystyle\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z}\,dz = 0$ випливає, що $a_n = 0$ для всіх $n \in \mathbb{Z}$. Таким чином, $f(z) \equiv 0$.

## Література


1. *Crowdy D. G.* Geometric function theory: a modern view of a classical subject // Nonlinearity. – 2008. – **21**, № 10. – P. T205 – T219.
2. *Marcotte J., Salomone M.* Loxodromic spirals in M. C. Escher's sphere surface // J. Humanist. Math. – 2014. – **4**, № 2. – P. 25 – 46.
3. *Hellegouarch Y.* Invitation to the mathematics of Fermat – Wiles. – Acad. Press, 2002.
4. *Hushchak O., Kondratyuk A.* The Julia exceptionality of loxodromic meromorphic functions // Visnyk Lviv Univ. Ser. Mech., Mat. – 2013. – **78**. – P. 35 – 41.
5. *Khoroshchak V. S., Khrystiyanyn A. Ya., Lukivska D. V.* A class of Julia exceptional functions // Carpath. Math. Publ. – 2016. – **8**, № 1. – P. 172 – 180.
6. *Khoroshchak V. S., Kondratyuk A. A.* The Riesz measures and a representation of multiplicatively periodic $\delta$-subharmonic functions in a punctured Euclidean space // Mat. Stud. – 2015. – **43**, № 1. – P. 61 – 65.
7. *Khoroshchak V. S., Sokulska N. B.* Multiplicatively periodic meromorphic functions in the upper halfplane // Mat. Stud. – 2014. – **42**, № 2. – P. 143 – 148.
8. *Khoroshchak V. S., Kondratyuk A. A.* Stationary harmonic functions on homogeneous spaces // Ufimsk. Mat. Zh. – 2015. – **7**, № 4. – P. 155 – 159.
9. *Khrystiyanyn A. Ya., Kondratyuk A. A.* Meromorphic mappings of torus onto the Riemann sphere // Carpath. Math. Publ. – 2012. – **4**, № 1. – P. 155 – 159.
10. *Khrystiyanyn A. Ya., Kondratyuk A. A.* Modulo-loxodromic meromorphic function in $C\backslash 0$ // Ufimsk. Mat. Zh. – 2016. – **8**, № 4. – P. 156 – 162.
11. *Klein F.* Zur Theorie der Abel'schen Functionen // Math. Ann. – 1890. – **36**. – P. 1 – 83.
12. *Kondratyuk A. A., Zaborovska V. S.* Multiplicatively periodic subharmonic functions in the punctured Euclidean space // Mat. Stud. – 2013. – **40**, № 2. – P. 159 – 164.
13. *Kondratyuk A. A.* Loxodromic meromorphic and $\delta$-subharmonic functions // Proc. Workshop Complex Anal. and Appl. Different. and Funct. Equat. – Joensuu, Finland: Publ. Univ. East. Finland Repts and Stud. Forestry and Natural Sci., 2014. – **14**. – P. 89 – 99.
14. *Rausenberger O.* Lehrbuch der Theorie der Periodischen Functionen Einer variabeln. – Leipzig: Druck und Ferlag von B. G. Teubner, 1884.
15. *Kos S., Pogány T. K.* On the mathematics of navigational calculations for meridian sailing // Electron. J. Geography and Math. – 2012.
16. *Schottky F.* Über eine specielle Function welche bei einer bestimmten linearen Transformation ihres Arguments unverändert bleibt // J. reine and angew. Math. – 1887. – **101**. – S. 227 – 272.
17. *Valiron G.* Cours d'Analyse Mathematique, Theorie des fonctions. – 2nd ed. – Paris: Masson et Cie., 1947.


Одержано 27.10.16