УДК 519.21

В. В. Павленков (Нац. техн. ун-т України „КПІ ім. І. Сікорського”, Київ)

ІНТЕГРАЛЬНІ ЗОБРАЖЕННЯ КАРАМАТИ ДЛЯ ФУНКЦІЙ, ЯКІ УЗАГАЛЬНЮЮТЬ ПРАВИЛЬНО ЗМІННІ ФУНКЦІЇ

We consider the classes of functions that generalized regularly varying and receive Karamata's type integral representations for this functions.

Рассмотрены классы функций, обобщающих правильно меняющиеся функции, и получены интегральные представления типа Караматы для таких функций.

1. Вступ. Поняття *правильно змінної* (RV) функції з'явилося в 30-х роках XX століття в роботах Й. Карамати [1, 2]. У своїх роботах Й. Карамата довів ряд фундаментальних теорем для RV функцій, серед яких є теорема про інтегральне зображення. На сьогодні теорія правильно змінних функцій широко використовується в різних розділах математики, зокрема в теорії ймовірностей та аналізі (див., наприклад, [4 – 6]).

Існує багато узагальнень поняття правильної зміни, головне з яких — О-регулярна зміна (ORV) (див., наприклад, [3, 7, 8]). Теорема про інтегральне зображення ORV функції є відомою. Нижче будуть розглянуті деякі інші класи функцій, які узагальнюють правильно змінні функції, та теореми про їх інтегральне зображення.

Всі результати роботи були анонсовані під час доповіді на Сімнадцятій міжнародній науковій конференції ім. акад. Михайла Кравчука (див. [14]).

2. Означення та попередні відомості. Нехай $\mathbf{R}$ — множина дійсних чисел та $\mathbf{R}_+$ — множина додатних дійсних чисел. Скрізь далі вимірність розумітимемо в сенсі Лебега. Для $A > 0$ розглянемо сім'ю $\mathbb{FM}_+(A)$ додатних і вимірних функцій $f = (f(x),\, x \geq A)$ та

$$\mathbb{FM}_+ = \bigcup_{A>0} \mathbb{FM}_+(A).$$

Для $f \in \mathbb{FM}_+$ розглянемо *верхню* і *нижню граничні функції*:

$$f^*(\lambda) = \limsup_{x\to\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} \qquad \text{та} \qquad f_*(\lambda) = \liminf_{x\to\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)}, \quad \lambda > 0. \tag{1}$$

***Зауваження* 1.** Верхня та нижня граничні функції з (1) набувають значень у множині $[0,\infty]$.

RV та ORV функції.

Означення 1. *Функція $f \in \mathbb{FM}_+$ називається правильно змінною (RV), якщо для кожного $\lambda > 0$*

$$f_*(\lambda) = f^*(\lambda) = \kappa_f(\lambda) \in (0,\infty), \tag{2}$$

тобто якщо границя

$$\kappa_f(\lambda) = \lim_{x\to\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)}$$

існує та є додатною і скінченною для кожного $\lambda > 0$.

Правильно змінну функцію f називають *повільно змінною* (SV), якщо $\kappa_f(\lambda) = 1$ для всіх $\lambda > 0$. В теоремі про зображення RV функцій стверджується (див., наприклад, [4]), що якщо f — RV функція, то знайдеться таке $\rho \in \mathbf{R}$, що $\kappa_f(\lambda) = \lambda^\rho$, $\lambda > 0$. Число ρ називають *індексом або показником* функції f. Індекс $\rho = 0$ мають SV функції і тільки вони. Довільна RV функція f з індексом ρ має вигляд

$$f(x) = x^\rho \ell(x), \quad x \geq A,$$

де ℓ — відповідна SV функція.

***Зауваження* 2.** Відомо (див., наприклад, [4]), що для довільної RV функції f з індексом ρ справджується рівність

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log f(x)}{\log x} = \rho.$$

Означення 2. *Функція $f \in \mathbb{FM}_+$ називається O-регулярно змінною (ORV) (див.* [3, 7]), *якщо для кожного $\lambda > 0$*

$$f^*(\lambda) < \infty. \tag{3}$$

З (3) випливають нерівності (див., наприклад, [6])

$$0 < f_*(\lambda) \leq f^*(\lambda) < \infty, \quad \lambda > 0,$$

які також використовуються як означення ORV функції.

ORV функції з індексом. У роботі [8] показано, що для довільної ORV функції f існують границі

$$p = \lim_{x\to 0+} \frac{\log f^*(x)}{\log x}, \qquad q = \lim_{x\to\infty} \frac{\log f^*(x)}{\log x},$$

для яких

$$-\infty < p \leq q < \infty.$$

Більш того, в роботі [8] також показано, що для довільної ORV функції f та відповідних їй чисел p та q виконуються нерівності

$$p \leq \liminf_{x\to\infty} \frac{\log f(x)}{\log x} \leq \limsup_{x\to\infty} \frac{\log f(x)}{\log x} \leq q. \tag{4}$$

Тому для довільної ORV функції f визначено її *верхній та нижній індекси*

$$\rho_* = \liminf_{x\to\infty} \frac{\log f(x)}{\log x}, \qquad \rho^* = \limsup_{x\to\infty} \frac{\log f(x)}{\log x}.$$

Більш детально про верхній та нижній індекси ORV функції див., наприклад, у [4].

Означення 3. *ORV функція f називається ORV функцією з індексом ρ, якщо для її нижнього та верхнього індексів виконується рівність*

$$\rho_* = \rho^* = \rho.$$

Клас таких функцій будемо позначати ORV(ρ). Нехай також

$$ORV_{\text{ind}} = \bigcup_{\rho\in\mathbf{R}} ORV(\rho).$$

ORV функції з невиродженими групами регулярних точок. Прикладами ORV функцій з індексом є ORV функції з невиродженими групами регулярних точок та регулярно log-періодичні функції (див. [6, 9, 10]).

Означення 4. *Число* $\lambda > 0$ *називається регулярною точкою функції* $f \in \mathbb{FM}_+$, *якщо*

$$f_*(\lambda) = f^*(\lambda) \in (0, \infty).$$

Множину всіх регулярних точок функції f позначимо через $\mathbb{G}_r(f)$. Зауважимо, що множина $\mathbb{G}_r(f)$ непорожня, оскільки $1 \in \mathbb{G}_r(f)$. Крім того, $\mathbb{G}_r(f)$ є групою відносно множення (див. [6, 9]). Будемо казати, що $\mathbb{G}_r(f)$ є *невиродженою,* якщо вона містить принаймні два елементи.

Клас ORV функцій із невиродженими групами регулярних точок позначимо через ORN.

Означення 5. *Функція* $f \in \mathbb{FM}_+$ *називається регулярно* $\log$*-періодичною функцією*, *якщо для деякого* $A > 0$

$$f(x) = x^\rho \ell(x) H(\ln x), \quad x \geq A, \tag{5}$$

де $\rho \in \mathbf{R}$, $\ell = (\ell(x),\, x \geq A)$ — *повільно змінна функція та* $H = (H(u),\, u \in \mathbf{R})$ — *додатна неперервна періодична функція. Клас таких функцій позначимо через* RLP.

Клас регулярно log-періодичних функцій міститься у класі ORV функцій із невиродженими групами регулярних точок (див. [6, 9, 10]). У роботі будуть отримані результати для ORV функцій із невиродженими групами регулярних точок, і ці результати будуть також справедливими і для регулярно $\log$-періодичних функцій.

***Зауваження* 3.** В [9] показано, що для довільної ORV функції f із невиродженою групою регулярних точок має місце таке зображення її верхньої граничної функції:

$$f^*(\lambda) = \lambda^\rho P(\log \lambda), \quad \lambda > 0,$$

де $\rho \in \mathbf{R}$ — деяке єдине число, P — додатна обмежена періодична функція (будемо далі її називати *періодичною компонентою* для функції f). Тому з (4) випливає, що верхній та нижній індекси такої функції задовольняють рівність

$$\rho_* = \rho^* = \rho.$$

Отже, ORV функція f із невиродженою групою регулярних точок є ORV функцією з індексом, а тому

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\log f(x)}{\log x} = \rho. \tag{6}$$

Клас функцій $\mathcal{M}$. Для розглянутих вище функцій f, які узагальнюють правильно змінні функції, можна говорити про їх індекс, який знаходиться з рівності (6). Зауважимо, що є інші підходи до означення індексу функції, наприклад індекси Матушевської (див. [13]). У цій роботі індекс функції будемо розуміти лише в сенсі рівності (6).

У роботах [11, 12] вводиться клас $\mathcal{M}$ функцій, які узагальнюють правильно змінні функції і для яких також можна означити індекс за допомогою рівності (6).

Означення 6. *Функція* $f \in \mathbb{FM}_+$ *належить класу* $\mathcal{M}$, *якщо знайдеться таке число* $\rho \in \mathbf{R}$, *що для кожного* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^{\rho+\varepsilon}} = 0, \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^{\rho-\varepsilon}} = \infty.$$

Число ρ з означення 6 називають *індексом* функції з класу $\mathcal{M}$. Через $\mathcal{M}_\rho$ позначимо клас функцій з $\mathcal{M}$, які мають індекс ρ.

***Зауваження* 4.** В [11] доводиться, що рівність (6) є визначальною для класу $\mathcal{M}$. Тобто довільна функція $f \in \mathbb{FM}_+$ належить класу $\mathcal{M}$ тоді і тільки тоді, коли виконується рівність (6).

Інтегральні зображення типу Карамати. Відомо (див., наприклад, [8]), що f належить RV з індексом ρ тоді і тільки тоді, коли для деякого $x_0 > 0$ та для всіх $x \geq x_0$

$$f(x) = \exp\left\{\alpha(x) + \int\limits_{x_0}^{x} \beta(s)\frac{ds}{s}\right\}, \tag{7}$$

де α та β — обмежені вимірні функції, для яких існують скінченні границі

$$\lim_{x\to\infty} \alpha(x) = a, \qquad \lim_{x\to\infty} \beta(x) = \rho.$$

Зображення типу (7) будемо називати *інтегральним зображенням типу Карамати.*

Відомим (див., наприклад, [8]) є наступне інтегральне зображення типу Карамати для ORV функцій.

Твердження 1. *Функція f належить ORV тоді і тільки тоді, коли виконується* (7), *де α та β — обмежені вимірні функції.*

В роботі [11] отримано наступне інтегральне зображення для функцій із класу $\mathcal{M}$.

Твердження 2. *Функція f належить $\mathcal{M}_\rho$ тоді і тільки тоді, коли для деякого $x_0 > 0$ та для всіх $x \geq x_0$*

$$f(x) = \exp\left\{\hat{\alpha}(x) + \hat{\epsilon}(x)\int\limits_{x_0}^{x} \hat{\beta}(s)\frac{ds}{s}\right\}, \tag{8}$$

де $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ та $\hat{\epsilon}$ — вимірні функції, для яких

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\hat{\alpha}(x)}{\log x} = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} \hat{\beta}(x) = \rho, \qquad \lim_{x\to\infty} \hat{\epsilon}(x) = 1.$$

Зауважимо, що зображення (8) не є зображенням типу Карамати через наявність функції $\hat{\epsilon}$. Також на сьогодні не існує інтегрального зображення типу Карамати для ORV функцій із невиродженими групами регулярних точок.

Основною метою роботи є отримання інтегральних зображень типу Карамати для ORV функцій із невиродженими групами регулярних точок та для функцій із класу $\mathcal{M}$. У пункті 3 сформульовано основні результати та встановлено наслідки з них; пункт 4 присвячено доведенню основних результатів.

3. Інтегральні зображення типу Карамати для функцій із класу $\mathcal{M}$ та для ORV функцій із невиродженими групами регулярних точок. У цьому пункті наводяться формулювання теорем про інтегральні зображення типу Карамати та встановлюються основні наслідки з них.

Теорема 1. *Нехай f належить $\mathbb{FM}_+$. Функція f належить $\mathcal{M}_\rho$ тоді і тільки тоді, коли для деякого $x_0 > 0$ та для всіх $x \geq x_0$ виконується* (7), *де α та β — такі вимірні функції, що*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\alpha(x)}{\log x} = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} \beta(x) = \rho. \tag{9}$$

Тобто для функцій із класу $\mathcal{M}$ має місце інтегральне зображення типу Карамати.

***Зауваження* 5.** З умови (9) випливає обмеженість функції $\beta(x)$ для достатньо великих x, проте обмеженість функції α не випливає. У випадку ORV функції α та β із (7) мають бути обмеженими (див. твердження 1). Тому $\mathcal{M} \nsubseteq ORV$. Приклад функції з класу $\mathcal{M}$, який не належить класу ORV, наведено у [12], а саме

$$f(x) = \exp\left\{(\log x)^a \cos((\log x)^b)\right\},$$

де $0 < a < 1,\ 0 < b < 1,\ a + b > 1$.

***Зауваження* 6.** В інтегральному зображенні для ORV функції відсутня умова $\lim_{x\to\infty}\beta(x) = \rho$, тому не кожна ORV функція має індекс, а отже, $ORV \nsubseteq \mathcal{M}$.

Розглянемо функції $f \in \mathbb{FM}_+$, для яких має місце зображення (7), в якому α та β — вимірні обмежені функції, та $\lim_{x\to\infty}\beta(x) = \rho$. Оскільки α та β — вимірні обмежені функції, то з твердження 1 випливає, що f — ORV функція. Більш того, оскільки α — обмежена функція, то виконується (9), і тому за теоремою 1 функція f належить класу $\mathcal{M}$. Тобто такі функції належать класу ORV функцій з індексом. Отже, справджується такий наслідок.

***Наслідок* 1.**

$$ORV_{\text{ind}} = ORV \bigcap \mathcal{M}. \tag{10}$$

Рівність (10) також отримано у [12], але іншим способом.

Наступна теорема встановлює інтегральні зображення типу Карамати для ORV функцій із невиродженими групами регулярних точок.

Теорема 2. *Нехай f належить $\mathbb{FM}_+$. Функція f належить ORN тоді і тільки тоді, коли для деякого $x_0 > 0$ та для всіх $x \geq x_0$ виконується* (7), *де α та β — такі обмежені вимірні функції, що*:

(A_1) $\lim_{x\to\infty}\beta(x) = \rho$;

(A_2) *для всіх $u \in \mathbf{R}_+$*

$$\limsup_{x\to\infty}(\alpha(ux) - \alpha(x)) = \boldsymbol{p}(\log u), \qquad \liminf_{x\to\infty}(\alpha(ux) - \alpha(x)) = -\boldsymbol{p}(-\log u);$$

(A_3) *$\boldsymbol{p}$ — така періодична функція, що $\boldsymbol{p}(0) = 0$ та*

$$-\infty < \inf_{u\in\mathbf{R}} \boldsymbol{p}(u) \leq \sup_{u\in\mathbf{R}} \boldsymbol{p}(u) < \infty.$$

При цьому група регулярних точок $\mathbb{G}_r(f)$ містить такі числа λ, для яких $\log\lambda$ є періодом функції $\boldsymbol{p}$.

***Наслідок* 2.** *З твердження* 1, *теорем* 1 *та* 2 *випливає, що $ORN \subset ORV_{\text{ind}}$.*

Періодична функція $\mathbf{p}$ з теореми 2 однозначно визначається функцією f, але вона може бути достатньо загальною. Справджується таке твердження.

Твердження 3. *Нехай p — довільна обмежена періодична функція та $p(0) = 0$, тобто виконано умову* (A_3) *теореми* 2, *крім того,*

$$f(x) = \exp\left\{p(\log x)\right\}, \quad x > 0.$$

Тоді для функції f виконується рівність (7), *причому виконано умови* (A_1)–(A_3) *теореми* 2 *з функцією $\boldsymbol{p} = p$.*

Підсумовуючи результати, отримані у пункті 3, можна сформулювати наступне твердження щодо введених класів функцій.

Твердження 4.

$$RV \subset RLP \subset ORN \subset ORV_{\mathrm{ind}} = ORV \bigcap \mathcal{M}.$$

4. Доведення основних результатів. У цьому пункті наведено доведення теорем 1 та 2. Зауважимо, що доведення теореми 1 базується на доведенні твердження 2, яке міститься в роботі [11], та є дещо модифікованим.

***Доведення теореми* 1.** *Необхідність.* Нехай f належить $\mathcal{M}_\rho$. Тоді із зауваження 4 випливає, що

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log f(x)}{\log x} = \rho. \tag{11}$$

Тому з теореми про інтегральне зображення RV функції маємо, що для деякого $x_0 > 0$ функція

$$R(x) = \exp\left\{\int\limits_{x_0}^{x} \frac{\log f(s)}{\log s}\frac{ds}{s}\right\}, \quad x \geq x_0,$$

є правильно змінною з індексом ρ, а тому

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log R(x)}{\log x} = \rho.$$

Отже, для деякого $x_0 > 0$ можна записати рівність

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{\log f(s)}{\log s}\frac{ds}{s}}{\log x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\log f(x)}{\log x} = \rho. \tag{12}$$

Покладемо

$$\gamma(x) = \frac{\log f(x)}{\log x} - \frac{\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{\log f(s)}{\log s}\frac{ds}{s}}{\log x}, \quad x \geq x_0. \tag{13}$$

Тоді з (12) випливає, що

$$\lim_{x\to\infty} \gamma(x) = 0. \tag{14}$$

З рівності (13) отримуємо таке зображення:

$$f(x) = \exp\left\{\gamma(x)\log x + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\log f(s)}{\log s}\frac{ds}{s}\right\}, \quad x \geq x_0. \tag{15}$$

Позначимо

$$\alpha(x) = \gamma(x)\log x, \qquad \beta(x) = \frac{\log f(x)}{\log x}, \quad x \geq x_0. \tag{16}$$

Тоді з (15) та (16) випливає зображення (7).

Покажемо, що виконуються рівності (9). З (11) бачимо, що

$$\lim_{x\to\infty} \beta(x) = \rho,$$

а з (14) та (16) випливає, що

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha(x)}{\log x}=0.$$

Вимірність функцій α та β випливає з їх означення та вимірності функції f. Отже, необхідність доведено.

Достатність. Нехай деяка функція f має зображення (7) та виконується умова (9) для вимірних функцій α та β. Тоді f є вимірною та

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log f(x)}{\log x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha(x)}{\log x}+\frac{\int_{x_0}^{x}\beta(s)\frac{ds}{s}}{\log x}=\rho.$$

Тому із зауваження 4 випливає, що f належить $\mathcal{M}_\rho$.

Теорему 1 доведено.

***Доведення теореми* 2.** *Необхідність.* Нехай f належить ORN. Тоді з теореми 7.2 з [9] випливає, що функцію f можна записати у вигляді

$$f(x)=x^\rho\ell(x)\exp\big\{h(\log x)\big\},\quad x>0, \tag{17}$$

де $\rho\in\mathbf{R}$, $(\ell(x),x>0)$ — SV функція, $(h(u),u\in\mathbf{R})$ — така вимірна обмежена функція, що для всіх $u\in\mathbf{R}$

$$\limsup_{x\to\infty}\,(h(u+x)-h(x))=\mathbf{p}(u),\qquad \liminf_{x\to\infty}\,(h(u+x)-h(x))=-\mathbf{p}(-u), \tag{18}$$

а $(\mathbf{p}(u),\ u\in\mathbf{R})$ — функція, яка задовольняє умову (A_3) теореми 2.

Функція $r(x)=x^\rho\ell(x)$, $x>0$, належить класу RV функцій, а тому для неї має місце інтегральне зображення

$$r(x)=\exp\left\{\alpha_1(x)+\int\limits_{x_0}^{x}\beta(s)\frac{ds}{s}\right\},\quad x\geq x_0, \tag{19}$$

де α_1 та β — такі обмежені вимірні функції, що існують границі

$$\lim_{x\to\infty}\alpha_1(x)=a,\qquad \lim_{x\to\infty}\beta(x)=\rho. \tag{20}$$

Покладемо $\alpha(x)=\alpha_1(x)+h(\log x)$, $x\geq x_0$. Тоді із зображень (17) та (19) випливає зображення (7). Із (20) випливає твердження (A_1) теореми 2.

Для доведення твердження (A_2) розглянемо дві функції:

$$f_1(x)=\exp\{h(\log x)\},\qquad f_2(x)=\exp\{\alpha(x)\},\quad x\geq x_0.$$

Використовуючи рівності (18), можна показати, що f_1 є ORN функцією. Більш того, функція $f_2(x)=\tilde\ell(x)f_1(x)$, $x\geq x_0$, де $\tilde\ell$ — SV функція, а тому вона є також ORN функцією і періодичні компоненти цих функцій однакові та дорівнюють $\exp\{\mathbf{p}\}$. Тому виконуються твердження (A_2), (A_3) теореми 2. Це доводить необхідність.

Достатність. Нехай має місце зображення (7) та виконуються умови (A_1)–(A_3) теореми 2. Тоді з (7) та умов (A_1)–(A_3) теореми 2 для довільного $\lambda>0$ та деякого $x_0>0$ маємо

$$f^*(\lambda) = \limsup_{x\to\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} =$$

$$= \limsup_{x\to\infty} \exp\left\{ \alpha(\lambda x) - \alpha(x) + \int\limits_{x_0}^{\lambda x} \beta(s)\frac{ds}{s} - \int\limits_{x_0}^{x} \beta(s)\frac{ds}{s} \right\} = \lambda^\rho \exp\{\mathbf{p}(\log\lambda)\}.$$

Аналогічно

$$f_*(\lambda) = \frac{\lambda^\rho}{\exp\{\mathbf{p}(-\log\lambda)\}}.$$

Тепер зрозуміло, що якщо $\log\lambda$ є періодом функції **p**, то λ належить $\mathbb{G}_r(f)$, а оскільки функція **p** має принаймні один додатний період $T > 0$, то група регулярних точок $\mathbb{G}_r(f)$ буде невиродженою.

Теорему 2 доведено.

Література

1. *Karamata J.* Sur un mode de croissance reguliere // Mathematica (Cluj). – 1930. – **4.** – P. 38 – 53.
2. *Karamata J.* Sur un mode de croissance régulière. Théoremès fondamentaux // Bull. Soc. Math. France. – 1933. – **61.** – P. 55 – 62.
3. *Karamata J.* Bemerkung über die vorstehende Arbeit des Herrn Avakumović, mit näherer Betrachtung einer Klasse von Funktionen, welche bei den Inversionssätzen vorkommen // Bull. Int. Acad. Youg. Sci. – 1936. – **29-30.** – P. 117 – 123.
4. *Bingham N. M., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular variation. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987. – 508 p.
5. *de Haan L.* On regular variation and its application to the weak convergence of sample extremes. – Amsterdam: Math. Centrum, 1975. – 124 p.
6. *Булдигін В. В., Індлекофер К.-Х., Клесов О. І., Штайнебах Й. Г.* Псевдорегулярні функції та узагальнені процеси відновлення. – Київ: ТВіМС, 2012. – 441 с.
7. *Avakumović V. G.* Über einen O-Inversionssatz // Bull. Int. Acad. Youg. Sci. – 1936. – **29-30.** – P. 107 – 117.
8. *Aljancić S., Arandelović D.* O-regularly varying functions // Publ. Inst. Math. (Beograd). – 1977. – **22.** – P. 5 – 22.
9. *Buldygin V. V., Klesov O. I., Steinebach J. G.* On factorization representation for Avakumovic – Karamata functions with nondegenerate groups of regular points // Anal. Math. – 2004. – **30.** – P. 161 – 192.
10. *Булдыгин В. В., Павленков В. В.* Теорема Караматы для регулярно LOG-периодических функций // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 11. – С. 1443 – 1463.
11. *Cadena M., Kratz M.* A new extension of the class of regularly varying functions // Hal-01181346v1. – 2015.
12. *Cadena M.* Revisiting extensions of the class of regularly varying functions // ArXiv:1502.06488v2 [math. CA]. – 2015.
13. *Matuszewska W.* A remark on my paper "Regularly increasing functions in connection with the theory of $L^{*\varphi}$-spaces" // Stud. Math. – 1965. – P. 265 – 269.
14. *Павленков В. В.* Інтегральні представлення функцій, які узагальнюють правильно змінні // Сімнадцята міжнар. конф. ім. акад. Михайла Кравчука (Київ, 19 – 20 травня 2016 р.): Матер. конф. – 2016. – Т. 3. – С. 121 – 123.

Одержано 09.09.16