УДК 517.946

Д. А. Жураев (Каршин. гос. ун-т, Узбекистан)

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ МАТРИЧНЫХ ФАКТОРИЗАЦИЙ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

We study the Cauchy problem for a system of elliptic equations of the first order with constant coefficients factorizing the Helmholtz operator in a two-dimensional bounded domain. An approximate solution of this problem based on the method of Carleman matrix is constructed.

Розглядається задача Коші для системи рівнянь еліптичного типу першого порядку зі сталими коефіцієнтами, що факторизують оператор Гельмгольца у двовимірній обмеженій області. Побудовано наближений розв'язок цієї задачі, що ґрунтується на методі матриць Карлемана.

1. Введение. Задача Коши для системы уравнений эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами, факторизующих оператор Гельмгольца, как и многие задачи Коши для нахождения регулярных решений эллиптических уравнений, в общем случае оказывается неустойчивой относительно малых изменений начальных данных. Таким образом, эти задачи являются некорректно сформулированными.

В некорректных задачах теорема существования не доказывается, существование предполагается заданным априори. Более того, предполагается, что решение принадлежит некоторому заданному подмножеству функционального пространства, обычно компактному. Единственность решения следует из общей теоремы Холмгрена [8]. Условная устойчивость задачи следует из работы А. Н. Тихонова [7], если сузить класс возможных решений до компакта.

В работе построено семейство вектор-функций $U_{\sigma\delta}(x) = U_\sigma(x,\, f_\delta)$, зависящих от параметра σ, и доказано, что при некоторых условиях и специальном выборе параметра $\sigma = \sigma(\delta)$ при $\delta \to 0$ семейство $U_{\sigma\delta}(x)$ сходится в обычном смысле к решению $U(x)$ в точке $x \in G$.

Следуя А. Н. Тихонову [7], семейство вектор-функций $U_{\sigma\delta}(x)$ назовем регуляризованным решением задачи. Регуляризованное решение определяет устойчивый метод приближенного решения задачи. Для специальных областей задача продолжения ограниченных аналитических функций в случае, когда данные задаются только на части границы, было рассмотрена Т. Карлеманом [2]. Исследования Т. Карлемана были продолжены Г. М. Голузиным и В. И. Крыловым [6]. В работе [5] построен многомерный аналог формулы Карлемана для аналитических функций многих переменных. Использование классической формулы Грина для построения регуляризованного решения задачи Коши для уравнения Лапласа было предложено М. М. Лаврентьевым в монографии [3]. Используя идеи М. М. Лаврентьева, Ш. Ярмухамедов построил в явном виде регуляризованное решение задачи Коши для уравнения Лапласа [4]. Построением матрицы Карлемана для эллиптических систем занимались Ш. Ярмухамедов, Н. Н. Тарханов, О. И. Махмудов и др.

Система, рассматриваемая в данной работе, была введена Н. Н. Тархановым. Для этой системы им были изучены корректные граничные задачи и найден аналог интегральной формулы Коши в ограниченной области. Во многих корректных задачах для систем уравнений эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами, факторизующих оператор Гельмгольца, недоступно вычисление значения вектор-функции на всей границе. Поэтому задача восстановления решения системы уравнений эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами, факторизующих оператор Гельмгольца [10 – 15], является одной из актуальных задач теории дифференциальных уравнений.

Пусть $\mathbb{R}^2$ — двумерное вещественное евклидово пространство,

$$x = (x_1,\, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad y = (y_1,\, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

$G \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная односвязная область, граница которой состоит из отрезка $a \leq y_1 \leq b$ и некоторой гладкой кривой S $(S \in y^1)$, лежащей на полуплоскости $y_2 > 0$, т. е. $\partial G = S \bigcup T$.

Введем следующие обозначения:

$$x^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ — транспонированный вектор } \quad x,\ r = |y - x|\,,\ \ \alpha = |y_1 - x_1|\,,$$

$$w = i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_2,\ \ u \geq 0,\ \ \frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1},\, \frac{\partial}{\partial x_2}\right)^T,$$

$$U(x) = (U_1(x), \ldots, U_n(x))^T,\ \ u^0 = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n,\ \ \ n = 2^m,\ \ \ m = 2,$$

$$E(z) = \left\| \begin{matrix} z_1 \ldots 0 \\ \ldots\ldots \\ 0\ \ldots z_n \end{matrix} \right\| \text{ — диагональная матрица, } \quad z = (z_1, \ldots,\, z_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть $D(x^T)$ — $(n \times n)$-матрица с элементами, состоящими из множества линейных функций с постоянными коэффициентами комплексной плоскости, для которых выполняется условие

$$D^*(x^T)D(x^T) = E((|x|^2 + \lambda^2)u^0),$$

где $D^*(x^T)$ — эрмитово-сопряженная матрица $D(x^T)$, λ — вещественное число.

Пусть $x = (x_1,\, x_2) \in G$, $y = (y_1, y_2) \in \partial G$. Рассмотрим в области G систему дифференциальных уравнений

$$D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) U(x) = 0, \tag{1}$$

где $D\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ — матрица дифференциальных операторов первого порядка.

Обозначим через $H(G)$ класс вектор-функций в области G, непрерывных на $\overline{G} = G \bigcup \partial G$ и удовлетворяющих системе (1).

2. Задача Коши и построение функции Карлемана. Пусть $U(y) \in H(G)$ и

$$U(y)|_S = f(y), \quad y \in S. \tag{2}$$

Здесь $f(y)$ — заданная непрерывная вектор-функция на S.

Требуется восстановить вектор-функцию $U(y)$ в области G, исходя из ее значений $f(y)$ на S.

Если $U(y) \in H(G)$, то справедлива следующая интегральная формула типа Коши:

$$U(x)=\int\limits_{\partial G} M(y,\,x)U(y)ds_y, \quad x\in G, \tag{3}$$

где

$$M(y,\,x)=\left(E\left(-\frac{i}{4}H_0^{(1)}(\lambda r)u^0\right)D^*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right)D(t^T).$$

Здесь $t=(t_1,\,t_2)$ — единичная внешняя нормаль, проведенная в точке y поверхности ∂G, $-\dfrac{i}{4}H_0^{(1)}(\lambda r)$ — фундаментальное решение уравнения Гельмгольца, определяемое через функцию Ханкеля первого рода [9].

Обозначим через $K(w)$, $w=\xi+i\eta$, целую функцию, принимающую вещественные значения при вещественном w (ξ, η — действительные числа) и удовлетворяющую условиям

$$K(\xi)\neq 0, \quad \sup_{\eta\geq 1}|\xi^p K^p(w)|=\mathrm{M}(\xi,\,p)<\infty, \quad -\infty<\xi<\infty, \quad p=0,1. \tag{4}$$

Функцию $\Phi(y,\,x)$ при $y\neq x$ определим равенством

$$\Phi(y,\,x)=-\frac{1}{2\pi K(x_2)}\int\limits_0^\infty \mathrm{Im}\frac{K(w)}{w-x_2}\frac{u\,I_0(\lambda u)}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}\,du. \tag{5}$$

Здесь $I_0(\lambda u)=J_0(i\lambda u)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка [8].

В дальнейшем воспользуемся равенствами

$$-2\pi K(x_2)\frac{\partial\Phi(y,\,x)}{\partial y_1}=\frac{(y_1-x_1)\mathrm{Re}\,K(w_0)-\mathrm{sign}(y_1-x_1)(y_2-x_2)\mathrm{Im}\,K(w_0)}{r^2}-$$

$$-(y_1-x_1)\lambda\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{u^2+\alpha^2}\mathrm{Re}\,K(w)-(y_2-x_2)\mathrm{Im}\,K(w)}{u^2+r^2}\frac{I_1(\lambda u)du}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}, \quad y\neq x, \tag{6}$$

$$w_0=i\,|y_1-x_1|+y_2, \quad I_1(\lambda u)=I_0'(\lambda u),$$

и

$$-2\pi K(x_2)\frac{\partial\Phi(y,\,x)}{\partial y_2}=\frac{(y_2-x_2)\mathrm{Re}\,K(w_0)-(y_1-x_1)\mathrm{Im}\,K(w_0)}{r^2}-$$

$$-\lambda\int\limits_0^\infty \frac{(y_2-x_2)\mathrm{Re}\,K(w)-\sqrt{u^2+\alpha^2}\mathrm{Im}\,K(w)}{u^2+r^2}I_1(\lambda u)du, \quad y_1\neq x_1, \tag{7}$$

которые получаются из (5).

Выбирая в формуле (5)

$$K(w)=\exp(\sigma w^2), \quad K(x_2)=\exp(\sigma x_2^2), \quad \sigma>0, \tag{8}$$

получаем

$$\Phi_\sigma(y,\,x)=-\frac{e^{-\sigma x_2^2}}{2\pi}\int\limits_0^\infty \mathrm{Im}\frac{\exp(\sigma w^2)}{w-x_2}\frac{u\,I_0(\lambda u)}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}\,du, \tag{9}$$

$$\sigma \geq \lambda + \sigma_0, \quad \sigma_0 > 0.$$

Формула (3) справедлива, если вместо $-\dfrac{i}{4}H_0^{(1)}(\lambda r)$ подставить функцию

$$\Phi_\sigma(y,\, x) = -\frac{i}{4}H_0^{(1)}(\lambda r) + g_\sigma(y,\, x), \tag{10}$$

где $g_\sigma(y,\, x)$ — регулярное решение уравнения Гельмгольца по переменной y, включая и точку $y = x$.

Тогда интегральная формула имеет вид

$$U(x) = \int\limits_{\partial G} N_\sigma(y,\, x)U(y)ds_y, \quad x \in G, \tag{11}$$

где

$$N_\sigma(y,\, x) = \left(E\left(\Phi_\sigma(y,\, x)u^0\right) D^*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right) D(t^T).$$

Теорема 1. *Пусть $U(y) \in H(G)$ удовлетворяет неравенству*

$$|U(y)| \leq 1, \quad y \in T. \tag{12}$$

Если

$$U_\sigma(x) = \int\limits_{S} N_\sigma(y,\, x)U(y)ds_y, \quad x \in G, \tag{13}$$

то справедлива оценка

$$|U(x) - U_\sigma(x)| \leq C(\lambda,\, x)\sigma\, e^{-\sigma\, x_2^2}, \quad \sigma > 1, \quad x \in G. \tag{14}$$

Здесь и ниже для удобства функции, зависящие от λ и x, обозначим через $C(\lambda,\, x)$, причем в различных неравенствах они различные.

Доказательство. Используя формулы (11) и равенство (13), получаем

$$U(x) = U_\sigma(x) + \int\limits_a^b N_\sigma(y,\, x)U(y)ds_y, \quad x \in G.$$

Учитывая неравенства (12), оцениваем следующее:

$$|U(x) - U_\sigma(x)| \leq \left|\int\limits_T N_\sigma(y,\, x)U(y)ds_y\right| \leq$$

$$\leq \int\limits_T |N_\sigma(y,\, x)|\, ds_y, \quad x \in G. \tag{15}$$

Оценим интегралы $\displaystyle\int_a^b |\Phi_\sigma(y,x)|\; dy_1$, $\displaystyle\int_a^b \left|\frac{\partial\Phi_\sigma(y,\, x)}{\partial y_1}\right| ds_y$ и $\displaystyle\int_a^b \left|\frac{\partial\Phi_\sigma(y,\, x)}{\partial y_2}\right| ds_y$.

Пусть $\sigma > 0$. Отделяя мнимую часть равенства (9), получаем

$$\Phi_\sigma(y,\, x) = \frac{\exp\sigma(y_2^2 - x_2^2)}{2\pi}\left[\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\sigma(u^2+\alpha^2)}\cos 2\sigma y_2\sqrt{u^2+\alpha^2}}{u^2+r^2}\; uI_0(\lambda u)du - \right.$$

$$\left. -\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\sigma(u^2+\alpha^2)}(y_2-x_2)\sin 2\sigma y_2\sqrt{u^2+\alpha^2}}{u^2+r^2}\frac{u\, I_0(\lambda u)}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}du\right], \quad y \neq x, \quad x_2 > 0. \qquad (16)$$

Учитывая (16) и неравенство

$$I_0(\lambda u) \leq \exp(\lambda u), \qquad (17)$$

имеем

$$\int\limits_a^b |\Phi_\sigma(y,\, x)|\; ds_y \leq C(\lambda, x)\sigma\, e^{-\sigma\, x_2^2}, \quad \sigma > 1, \quad x \in G. \qquad (18)$$

Для оценки интегралов $\int_a^b \left|\frac{\partial\Phi_\sigma(y,\, x)}{\partial y_1}\right| ds_y$ и $\int_a^b \left|\frac{\partial\Phi_\sigma(y,\, x)}{\partial y_2}\right| ds_y$ воспользуемся равенствами (6) и (7). Для этого, используя равенства (8) и выбирая

$$K(w_0) = \exp(\sigma w_0^2), \quad \sigma > 0, \qquad (19)$$

получаем следующие формулы:

$$-2\pi\exp(\sigma x_2^2)\frac{\partial\Phi_\sigma(y,\, x)}{\partial y_1} = \frac{(y_1-x_1)\mathrm{Re}\,\exp(\sigma w_0^2) + \mathrm{sign}(y_1-x_1)(y_2-x_2)\mathrm{Im}\,\exp(\sigma w_0^2)}{r^2} -$$

$$-(y_1-x_1)\lambda\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{u^2+\alpha^2}\mathrm{Re}\,\exp(\sigma w^2) - (y_2-x_2)\mathrm{Im}\,\exp(\sigma w^2)}{u^2+r^2}\frac{I_1(\lambda u)du}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}, \quad y \neq x, \qquad (20)$$

и

$$-2\pi\exp(\sigma x_2^2)\frac{\partial\Phi_\sigma(y,\, x)}{\partial y_2} = \frac{(y_2-x_2)\mathrm{Re}\,\exp(\sigma w_0^2) + (y_1-x_1)\mathrm{Im}\,\exp(\sigma w_0^2)}{r^2} -$$

$$-\lambda\int\limits_0^\infty \frac{(y_2-x_2)\mathrm{Re}\,\exp(\sigma w^2) - \sqrt{u^2+\alpha^2}\mathrm{Im}\,\exp(\sigma w^2)}{u^2+r^2} I_1(\lambda u)du, \quad y_1 \neq x_1. \qquad (21)$$

Учитывая равенство (20) и неравенство

$$I_1(\lambda u) \leq \lambda u\exp(\lambda u), \qquad (22)$$

имеем

$$\int\limits_a^b \left|\frac{\partial\Phi_\sigma(y,\, x)}{\partial y_1}\right| ds_y \leq C(\lambda, x)\sigma\, e^{-\sigma\, x_2^2}, \quad \sigma > 1, \quad x \in G. \qquad (23)$$

Аналогично, учитывая равенство (21) и неравенство (22), оцениваем интеграл

$$\int_a^b \left| \frac{\partial \Phi_\sigma(y,\, x)}{\partial y_2} \right| ds_y \le C(\lambda, x)\sigma\, e^{-\sigma\, x_2^2}, \quad \sigma > 1, \quad x \in G. \tag{24}$$

Из неравенств (18), (23) и (24) следует (14).

Теорема 1 доказана.

***Следствие* 1.** *Предельное равенство*

$$\lim_{\sigma\to\infty} U_\sigma(x) = U(x)$$

имеет место равномерно на каждом компакте из области G.

Теорема 2. *Пусть $U(y) \in H(G)$ удовлетворяет условию* (12), *а на гладкой кривой S — неравенству*

$$|U(y)| \le \delta, \quad 0 < \delta < e^{-\sigma\, \bar{y}_2^2}, \tag{25}$$

где $\bar{y}_2^2 = \max_{y\in S}\, y_2^2$. Тогда справедлива оценка

$$|U(x)| \le C(\lambda,\, x)\sigma\delta^{\frac{x_2^2}{\bar{y}_2^2}}, \quad \sigma > 1, \quad x \in G. \tag{26}$$

Доказательство. Из (11) и равенства (13) при $x \in G$ имеем

$$U(x) = \int_S N_\sigma(y,\, x)U(y)ds_y + \int_a^b N_\sigma(y,\, x)U(y)ds_y. \tag{27}$$

Оценим следующее:

$$|U(x)| \le \left| \int_S N_\sigma(y,\, x)U(y)ds_y \right| + \left| \int_a^b N_\sigma(y,\, x)U(y)ds_y \right|, \quad x \in G. \tag{28}$$

Учитывая неравенство (25), оцениваем первое слагаемое неравенства (28):

$$\left| \int_S N_\sigma(y,\, x)U(y)ds_y \right| \le \int_S |N_\sigma(y,\, x)|\, |U(y)|\, ds_y \le$$

$$\le \delta \int_S |N_\sigma(y,\, x)|\, ds_y, \quad x \in G. \tag{29}$$

Далее, оценим интегралы $\delta \int_S |\Phi_\sigma(y,\, x)|\, ds_y$, $\delta \int_S \left| \frac{\partial \Phi_\sigma(y,\, x)}{\partial y_1} \right| ds_y$ и $\delta \int_S \left| \frac{\partial \Phi_\sigma(y,\, x)}{\partial y_2} \right| ds_y$ на гладкой поверхности S.

Учитывая равенство (16) и неравенство (17), находим

$$\delta \int\limits_S |\Phi_\sigma(y,\, x)|\, ds_y \leq C(\lambda, x)\sigma\delta\, e^{\sigma(y_2^2 - x_2^2)}, \quad \sigma > 1, \quad x \in G. \tag{30}$$

Используя равенство (20) и неравенство (22), имеем

$$\delta \int\limits_S \left| \frac{\partial \Phi_\sigma(y,\, x)}{\partial y_1} \right| ds_y \leq C(\lambda, x)\sigma\delta\, e^{\sigma(y_2^2 - x_2^2)}, \quad \sigma > 1, \quad x \in G. \tag{31}$$

Аналогично, используя равенство (21) и неравенство (22), получаем

$$\delta \int\limits_S \left| \frac{\partial \Phi_\sigma(y,\, x)}{\partial y_2} \right| ds_y \leq C(\lambda, x)\sigma\delta\, e^{\sigma(y_2^2 - x_2^2)}, \quad \sigma > 1, \quad x \in G. \tag{32}$$

Из (30) – (32) следует, что

$$\left| \int\limits_S N_\sigma(y,\, x) U(y) ds_y \right| \leq C(\lambda, x)\sigma\delta\, e^{\sigma(y_2^2 - x_2^2)}, \quad \sigma > 1, \quad x \in G. \tag{33}$$

Известно, что

$$\left| \int\limits_a^b N_\sigma(y,\, x) U(y) ds_y \right| \leq C(\lambda, x)\sigma\, e^{-\sigma x_2^2}, \quad \sigma > 1, \quad x \in G. \tag{34}$$

Теперь, учитывая (33), (34), имеем

$$|U(x)| \leq \frac{C(\lambda, x)\sigma}{2} (\delta\, e^{\sigma\, \bar{y}_2^2} + 1) e^{-\sigma\, x_2^2}, \quad \sigma > 1, \quad x \in G. \tag{35}$$

Выбирая σ из равенства

$$\sigma = \frac{1}{\bar{y}_2^2} \ln \frac{1}{\delta}, \tag{36}$$

получаем неравенство (26).

Теорема 2 доказана.

Пусть $U(y) \in H(G)$ и вместо $U(y)$ на S задано ее приближение $f_\delta(y)$ с погрешностью $0 < \delta < e^{-\sigma \bar{y}_2^2}$, $\max_S |U(y) - f_\delta(y)| \leq \delta$.

Положим

$$U_{\sigma\delta}(x) = \int\limits_S N_\sigma(y,\, x) f_\delta(y) ds_y, \quad x \in G. \tag{37}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть $U(y) \in H(G)$ на части плоскости $y_2 = 0$ удовлетворяет неравенству* (12). *Тогда справедлива оценка*

$$|U(x) - U_{\sigma\delta}(x)| \leq C(\lambda, x)\sigma\delta^{\frac{x_2^2}{\bar{y}_2^2}}, \quad \sigma > 1, \quad x \in G. \tag{38}$$

Доказательство. Из интегральной формулы (11) и равенства (37) имеем

$$U(x) - U_{\sigma\delta}(x) = \int_S N_\sigma(y, x) \{ U(y) - f_\delta(y)\} \, ds_y + \int_a^b N_\sigma(y, x) U(y) \, ds_y.$$

Теперь, повторяя рассуждения из доказательств теорем 1 и 2, находим

$$|U(x) - U_{\sigma\delta}(x)| \le \frac{C(\lambda, x)\sigma}{2} (\delta \, e^{\sigma \, \bar{y}_2^2} + 1) \, e^{-\sigma \, x_2^2}.$$

Отсюда, выбирая σ из равенства (36), получаем (38).

Теорема 3 доказана.

***Следствие* 2.** *Предельное равенство*

$$\lim_{\delta \to 0} U_{\sigma\delta}(x) = U(x)$$

имеет место равномерно на каждом компакте из области G.

Литература

1. *Тарханов Н. Н.* Об интегральном представлении решений систем линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка в частных производных и некоторых его приложениях // Некоторые вопросы многомерного комплексного анализа. – Красноярск: Ин-т физики АН СССР, 1980. – С. 147 – 160.
2. *Carleman T.* Les fonctions quasi analytiques. – Paris: Gautier-Villars et Cie., 1926.
3. *Лаврентьев М. М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. – Новосибирск: Наука, 1962. – 96 с.
4. *Ярмухамедов Ш.* Функция Карлемана и задача Коши для уравнения Лапласа // Сиб. мат. журн. – 2004. – **45**, № 3. – С. 702 – 719.
5. *Айзенберг Л. А.* Формулы Карлемана в комплексном анализе. – Новосибирск: Наука, 1990. – 116 с.
6. *Голузин Г. М., Крылов В. И.* Обобщенная формула Карлемана и ее приложение к аналитическому продолжению функций // Мат. сб. – 1993. – **40**, № 2. – С. 144 – 149.
7. *Тихонов А. Н.* О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР. – 1963. – **151**, № 3. – С. 501 – 504.
8. *Берс А., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1966. – 351 с.
9. *Алексидзе М. А.* Фундаментальные функции в приближенных решениях граничных задач. – М.: Наука, 1991. – 164 с.
10. *Жураев Д. А.* Интегральная формула для систем уравнений эллиптического типа // II Междунар. науч.-практ. конф. студентов и аспирантов „Математика и ее приложения в современной науке и практике" (Курск, 5-6 апр. 2012 г.). – С. 33 – 38.
11. *Жураев Д. А.* Регуляризированное решение задачи Коши для систем уравнений эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами, факторизующих оператор Гельмгольца в трехмерной ограниченной области // Междунар. конф. „Обратные и некорректные задачи математической физики", посвященная 80-летию со дня рождения академика М. М. Лаврентьева (Новосибирск, 5 – 12 авг. 2012 г.). – С. 124 – 125.
12. *Жураев Д. А.* Интегральная формула для систем уравнений эллиптического типа в ограниченной области // Междунар. конф. „Актуальные проблемы механики, математики, информатики-2012", посвященная 100-летию со дня рождения профессоров С. Н. Черникова, И. Ф. Верещагина, Л. И. Волковысского (30 окт. — 1 нояб. 2012 г.) – Пермь: Перм. гос. нац. исслед. ун-т, 2012. – С. 43.
13. *Жураев Д. А.* Регуляризация задачи Коши для систем уравнений эллиптического типа первого порядка в трехмерной ограниченной области // Прикл. математика, управление и информатика: Сб. тр. Междунар. мол. конф. (Белгород, 3 – 5 окт. 2012 г.). – 2012. – Т. 1. – С. 132 – 135.
14. *Жураев Д. А.* Конструкция фундаментального решения уравнения Гельмгольца // Докл. АН Республики Узбекистан. – 2012. – № 4. – С. 14 – 17.

Получено 23.01.17