УДК 517.956

Ш. Т. Каримов (Ферган. гос. ун-т, Узбекистан)

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ АНАЛОГА ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПОЛИКАЛОРИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С СИНГУЛЯРНЫМ ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ

We study an analog of the Cauchy problem for an inhomogeneous singular polycaloric (polyparabolic) equation with Bessel operator. By using the Erdélyi–Kober operator of the fractional order, we deduce an explicit formula for the solution of the formulated problem.

Досліджується аналог задачі Коші для неоднорідного сингулярного полікалоричного (поліпараболічного) рівняння з оператором Бесселя. З допомогою оператора Ердеї – Кобера дробового порядку побудовано явну формулу розв'язку цієї задачі.

1. Введение. Постановка задачи. Сингулярные параболические уравнения с оператором Бесселя относятся к классу уравнений, вырождающихся на границе области по пространственным переменным, и часто встречаются в приложениях. Например, при математическом моделировании многих задач теплопереноса в неподвижной среде (твердом теле), задач диффузионного пограничного слоя [1] и задач распространения тепла при закачке горячей жидкости в нефтяной пласт [2] возникают сингулярные параболические уравнения с оператором Бесселя.

Вырождающиеся уравнения и уравнения с сингулярными коэффициентами представляют собой одно из важных направлений в современной теории дифференциальных уравнений с частными производными, и число опубликованных работ по этой тематике весьма значительно. Среди них особое место занимают начальные и краевые задачи для параболических уравнений с оператором Бесселя. Теория классических решений задачи Коши для сингулярных параболических уравнений второго порядка развита в работах [3 – 13]. Задача Коши для сингулярных параболических уравнений в классах распределений и в классах обобщенных функций типа S' изучалась [14, 15]. Однако начальные и краевые задачи для уравнений с оператором Бесселя высокого порядка к настоящему времени остаются малоизученными.

В данной работе для сингулярного полипараболического уравнения, т. е. для уравнения с оператором Бесселя высокого порядка вида

$$L_\gamma^m(u) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} - B_\gamma^x\right)^m u(x,t) = f(x,t), \qquad x>0, \quad t>0, \tag{1}$$

где $m \in N,\ \gamma \in R$, причем $\gamma > -1/2,\ f(x,t)$ — заданная гладкая функция,

$$B_\gamma^x \equiv x^{-2\gamma-1}\frac{\partial}{\partial x}x^{2\gamma+1}\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2\gamma+1}{x}\frac{\partial}{\partial x}$$

— сингулярный дифференциальный оператор Бесселя, будем исследовать следующую задачу: найти классическое решение $u(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальным

$$\left.\left(\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right)\right|_{t=0} = \varphi_k(x), \qquad x>0, \quad k=\overline{0,m-1}, \tag{2}$$

и граничным

$$\left(\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}}\right)\bigg|_{x=0}=0 \qquad t>0, \quad k=\overline{0,m-1}, \tag{3}$$

условиям. Здесь $\varphi_k(x)$, $k=\overline{0,m-1}$, — заданные гладкие функции, удовлетворяющие условиям согласования

$$\varphi_{k-j}^{(2j+1)}(0)=0, \qquad j=\overline{0,k}, \quad k=\overline{0,m-1}.$$

Следует отметить, что подобная задача исследована в работе [16] для однородного абстрактного уравнения $(\partial^2/\partial t^2-A)^m u(t)=0$, $t>0$, где A — позитивный оператор в банаховом пространстве. Решение поставленной задачи при $f(x,y)\equiv 0$ можно получить из результатов этой работы как частный случай. В настоящей работе рассмотрено неоднородное уравнение (1) и получена явная формула решения поставленной задачи. Кроме того, для решения задачи при $f(x,y)\equiv 0$, в отличие от традиционных методов, в которых применяются соответствующие интегральные преобразования Фурье – Бесселя, применен другой подход. В связи с этим кратко изложим этот подход, который основан на применении свойств оператора Эрдейи – Кобера дробного порядка. Но сначала рассмотрим некоторые свойства этого оператора.

2. Операторы Эрдейи – Кобера дробного порядка. В теории и приложениях широко используются различные модификации и обобщения классических операторов интегрирования и дифференцирования дробного порядка. К таким модификациям относятся, в частности, операторы Эрдейи – Кобера дробного порядка [17]

$$I_{\eta,\alpha}f(x)=\frac{2x^{-2(\eta+\alpha)}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x (x^2-\xi^2)^{\alpha-1}\xi^{2\eta+1}f(\xi)\,d\xi, \tag{4}$$

где $f(x)\in L_1(0,b)$, $\alpha,\eta,b\in R$, причем $\alpha>0$, $\eta\geq -1/2$, $b>0$, $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера [18].

Основные свойства этого оператора можно найти в работе [17].

Оператор, обратный к оператору (4), при $0<\alpha<1$ имеет вид

$$I_{\eta,\alpha}^{-1}g(x)=\frac{x^{-2\eta-1}}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x (x^2-s^2)^{-\alpha}s^{2(\eta+\alpha)+1}g(s)ds. \tag{5}$$

Пусть функция $u(x,t)$ по переменной x имеет непрерывные производные до порядка $2m$ включительно, а по t — порядка не меньше чем m; L — линейный дифференциальный оператор любого конечного порядка по переменной t, не зависящий от x; $[B_\eta^x]^0=E$, E — единичный оператор, $[B_\eta^x]^m=[B_\eta^x]^{m-1}[B_\eta^x]=[B_\eta^x][B_\eta^x]\ldots[B_\eta^x]$ — m-я степень оператора Бесселя. В работе [19] доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $\alpha>0$, $\eta\geq -1/2$, $x^{2\eta+1}[B_\eta^x]^k u(x,t)$ *интегрируемы при* $x\to 0$ *и* $\lim_{x\to 0}x^{2\eta+1}\dfrac{\partial}{\partial x}[B_\eta^x]^k u(x,t)=0$, $k=\overline{0,m-1}$. *Тогда имеет место равенство*

$$(L\pm B_{\eta+\alpha}^x)^m I_{\eta,\alpha}^{(x)}u(x,t)=I_{\eta,\alpha}^{(x)}(L\pm B_\eta^x)^m u(x,t),$$

причем верхний индекс x *в операторе* $I_{\eta,\alpha}^{(x)}$ *означает переменную, по которой действует этот оператор.*

Теорема 2. *Пусть* $0 < \alpha < 1$, $\eta \geq -1/2$, $g(x) \in C^{2m}(0, b)$, $b > 0$, $m \in N$, *функции* $x^{2(\eta+\alpha)+1}[B^x_{\eta+\alpha}]^{k+1}g(x)$ *интегрируемы при* $x \to 0$ *и* $\lim_{x\to 0} x^{2(\eta+\alpha)+1}\dfrac{d}{dx}[B^x_{\eta+\alpha}]^k g(x) = 0$, $k = \overline{0, m-1}$. *Тогда справедливо равенство*

$$[B^x_\eta]^m I^{-1}_{\eta,\alpha} g(x) = I^{-1}_{\eta,\alpha}[B^x_{\eta+\alpha}]^m g(x).$$

В частности, при $\eta = -1/2$ и выполнении остальных условий теоремы 2 имеет место равенство

$$\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} I^{-1}_{-1/2,\alpha} g(x) = I^{-1}_{-1/2,\alpha}[B^x_\gamma]^m g(x), \quad \gamma = \alpha - 1/2. \tag{6}$$

3. Решение поставленной задачи в случае однородного уравнения. Предположим, что решение однородного уравнения $L^m_\gamma(u) = 0$, удовлетворяющее условиям (2), (3), существует. Это решение будем искать в виде

$$u(x, t) = I^{(x)}_{-1/2,\alpha} v(x, t), \tag{7}$$

где $v(x, t)$ — неизвестная достаточное число раз дифференцируемая функция, $\alpha = \gamma + 1/2 > 0$, причем $\alpha \in (0, 1)$.

Подставляя (7) в уравнение $L^m_\gamma(u) = 0$, начальные условия (2), а затем используя теорему 2 при $L \equiv \partial/\partial t$ и учитывая граничные условия (3), получаем задачу нахождения решения $v(x, t)$ уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^m v(x, t) = 0, \qquad x > 0, \quad t > 0, \tag{8}$$

удовлетворяющего начальным

$$\left.\left(\frac{\partial^k v}{\partial t^k}\right)\right|_{t=0} = \Phi_k(x), \qquad x > 0, \quad k = \overline{0, m-1}, \tag{9}$$

и однородным граничным

$$\left.\left(\frac{\partial^{2k+1} v}{\partial x^{2k+1}}\right)\right|_{x=0} = 0, \qquad t > 0, \quad k = \overline{0, m-1}, \tag{10}$$

условиям, где

$$\Phi_k(x) = I^{-1}_{-1/2,\alpha}\varphi_k(x), \quad k = \overline{0, m-1}. \tag{11}$$

Учитывая граничные условия (10), продолжаем функции $\Phi_k(x)$ четным образом на $x < 0$, и продолженные функции обозначим через $\tilde{\Phi}_k(x)$. Тогда в верхней полуплоскости получим задачу нахождения решения уравнения (8), удовлетворяющего начальным условиям

$$\left.\left(\frac{\partial^k v}{\partial t^k}\right)\right|_{t=0} = \tilde{\Phi}_k(x), \qquad x \in R, \quad k = \overline{0, m-1}. \tag{12}$$

Введем обозначения

$$w_0(x,t) = v(x,t), \qquad w_k(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^k w_0(x,t).$$

В этих обозначениях задача (8), (12) эквивалентна задаче нахождения функций $w_k(x,t),\ k = \overline{0, m-1}$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{\partial w_k}{\partial t} - \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} = w_{k+1}, \qquad k = \overline{0, m-2}, \\ &\frac{\partial w_{m-1}}{\partial t} - \frac{\partial^2 w_{m-1}}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

и начальным условиям

$$w_k(x,0) = F_k(x), \qquad x \in R, \quad k = \overline{0, m-1}, \tag{14}$$

где

$$F_k(x) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^j \tilde{\Phi}_{k-j}^{(2j)}(x), \quad k = \overline{0, m-1}, \tag{15}$$

$C_k^j = k!/[\,j!(k-j)!]$ — биномиальные коэффициенты.

При решении задачи (13), (14) воспользуемся следующей леммой.

Лемма 1. *Если $g(x)$ принадлежит $L_1(R)$, то имеет место равенство*

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{d\eta}{\sqrt{t-\eta}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(\xi-x)^2}{4(t-\eta)}\right] \left\{\frac{1}{2\sqrt{\pi\eta}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(s) \exp\left[-\frac{(s-\xi)^2}{4\eta}\right]\right\} d\xi =$$

$$= \frac{t}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(s) \exp\left[-\frac{(s-x)^2}{4t}\right] ds. \tag{16}$$

Доказательство. В левой части равенства (16), в силу равномерной сходимости несобственных интегралов, выполним перестановку порядка интегрирования по ξ и s. Затем, вычислив внутренний интеграл по формуле [20]

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-p\xi^2 - q\xi\right] d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{p}} \exp\left(\frac{q^2}{4p}\right), \qquad \operatorname{Re} p > 0,$$

получим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(\xi-x)^2}{4(t-\eta)} - \frac{(s-\xi)^2}{4\eta}\right] d\xi = 2\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}} \sqrt{\eta(t-\eta)} \exp\left[-\frac{(s-x)^2}{4t}\right]. \tag{17}$$

Подставляя (17) в левую часть равенства (16), после сокращения подобных членов получаем равенство (16).

Лемма 1 доказана.

Теперь, последовательно решая каждое уравнение системы (13), начиная с последнего, и используя начальные условия (14) и лемму 1, находим решение задачи (13), (14). Затем, принимая во внимание $w_0(x,t) = v(x,t)$, получаем решение задачи (8), (12) в виде

$$v(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_k(s) \exp\left[-\frac{(s-x)^2}{4t}\right] ds, \tag{18}$$

где $F_k(x)$ — известные функции, определяемые равенствами (15).

Принимая во внимание четность функций $F_k(x)$, $k = \overline{0, m-1}$, равенство (18) записываем в виде

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} v_k(x,t), \tag{19}$$

где

$$v_k(x,t) = \int\limits_0^{+\infty} F_k(s) G_0(x,t,s)\, ds,$$
$$G_0(x,t,s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \left\{ \exp\left[-\frac{(s-x)^2}{4t}\right] + \exp\left[-\frac{(s+x)^2}{4t}\right] \right\}. \tag{20}$$

Чтобы исследовать поведение функций $F_k(x)$, $k = \overline{0, m-1}$, выполним некоторые преобразования. Для этого введем обозначение $R^+ = \{x \in R \colon x > 0\}$ и докажем следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть функции $\varphi_j(x) \in C^{2(m-j)-1}(R^+)$, $j = \overline{0, m-1}$, непрерывны, ограничены и все производные функций $\varphi_j(x)$ до порядка $2(m-j)-1$, $j = \overline{0, m-1}$, включительно равны нулю при $x = 0$. Тогда имеют место равенства*

$$\lim_{x \to 0} x^{2\alpha} \frac{d}{dx} [B_\gamma^x]^p \varphi_{k-j}(x) = 0, \qquad \lim_{x \to 0} [B_\gamma^x]^j \varphi_{k-j}(x) = 0, \tag{21}$$
$$p = \overline{0, j}, \quad j = \overline{0, k}, \quad k = \overline{0, m-1}.$$

Доказательство. Методом математической индукции можно доказать, что справедливо равенство

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^k f(x) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} A_{kj} \frac{f^{(k-j+1)}(x)}{x^{k+j-1}}, \tag{22}$$

где A_{kj} — постоянные, определяемые из рекуррентных равенств

$$A_{(k+1)1} = A_{k1} = 1, \quad k \geq 1, \qquad A_{(k+1)j} = (k+j-1) A_{k(j-1)} + A_{kj}, \qquad k \geq 2, \quad j = \overline{2, k},$$
$$A_{(k+1)(k+1)} = (2k-1) A_{kk} = (2k-1)!!, \quad k \geq 1.$$

Первое из равенств (21) запишем в виде

$$h(x) = \lim_{x\to 0} x^{2\alpha} \frac{d}{dx} [B_\gamma^x]^p \varphi_{k-j}(x) = \lim_{x\to 0} x^{1+2\alpha} \sum_{q=0}^{p} C_p^q (2\alpha)^{p-q} \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^{p-q+1} \varphi_{k-j}^{(2q)}(x).$$

Учитывая равенство (22), имеем

$$h(x) = \sum_{q=0}^{p} C_p^q (2\alpha)^{p-q} \sum_{l=1}^{p-q+1} (-1)^{l+1} A_{(p-q+1)l} \lim_{x\to 0} \frac{\varphi_{k-j}^{(p-q-l+2)}(x)}{x^{p-q+l-1-2\alpha}}.$$

Применяя к последнему равенству правило Лопиталя $p-q+l-1$ раз [21, с. 270] и учитывая условия доказываемой леммы, получаем

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi_{k-j}^{(p-q-l+2)}(x)}{x^{p-q+l-1-2\alpha}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} x^{2\alpha} \varphi_{k-j}^{(2p+1)}(x)}{(-2\alpha)_{p-q+l-1}} = 0.$$

Отсюда следует справедливость первого из равенств (21). Остальные равенства из (21) доказываются аналогично.

Лемма 2 доказана.

Теперь преобразуем функции $F_k(x),\ k = \overline{0, m-1}$. В силу леммы 2 для функций $\Phi_k(x)$ выполняются условия теоремы 2. Поэтому, учитывая обозначение (11) и формулу (6), равенство (15) при $x > 0$ можно представить в виде

$$F_k(x) = I_{-1/2,\alpha}^{-1} f_k(x), \tag{23}$$

где

$$f_k(x) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^j [B_\gamma^x]^j \varphi_{k-j}(x), \quad k = \overline{0, m-1}. \tag{24}$$

Согласно формуле (5) равенство (23) запишем в виде $F_k(x) = \tilde{F}_k'(x)$, где

$$\tilde{F}_k(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^x (x^2 - s^2)^{-\alpha} s^{2\alpha} f_k(s)\, ds. \tag{25}$$

Кроме того, в силу леммы 2 из равенства (24) следует, что функции $f_k(x)$ при $x \geq 0$ непрерывны, ограничены и удовлетворяют равенствам $f_k(0) = 0,\ k = \overline{0, m-1}$. С учетом этого из последнего равенства следует, что

$$\tilde{F}_k(0) = 0, \quad k = \overline{0, m-1}. \tag{26}$$

Теперь, подставляя в равенство (20) выражение $F_k(x) = \tilde{F}_k'(x)$, а затем применяя правило интегрирования по частям и учитывая равенство (26), получаем

$$v_k(x,t) = -\int\limits_0^\infty G_{0\xi}(x,t,\xi) \tilde{F}_k(\xi)\, d\xi.$$

Подставляя выражение (25) в последний интеграл и учитывая равномерную сходимость интегралов, меняем порядок интегрирования:

$$v_k(x,t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^{+\infty} f_k(s) s^{2\alpha} G_1(x,t,s)\, ds, \tag{27}$$

где

$$G_1(x,t,s) = \int\limits_s^{+\infty} G_{0\xi}(x,t,\xi)(\xi^2 - s^2)^{-\alpha}\, d\xi. \tag{28}$$

Вычислим интеграл (28). Применив формулу [20, с. 451]

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-a\lambda^2} \cos(b\lambda)\, d\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{4a}} \exp\left[-\frac{b^2}{4a}\right], \quad \operatorname{Re} a > 0,$$

функцию $G_0(x,t,s)$ представим в виде

$$G_0(x,t,\xi) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} e^{-t\lambda^2} \cos(x\lambda)\cos(\xi\lambda)\, d\lambda.$$

Отсюда вычислим производную по ξ и полученное выражение функции $G_{0\xi}$ подставим в (28). Затем, учитывая равномерную сходимость интегралов, меняем порядок интегрирования. После этого, вычисляя внутренний интеграл с помощью формулы Мелера – Сонина [18, с. 93], находим

$$G_1(x,t,s) = -\frac{2^{\frac{1}{2}-\alpha}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(1-\alpha) s^{\frac{1}{2}-\alpha} \int\limits_0^{+\infty} e^{-t\lambda^2} \lambda^{\alpha+\frac{1}{2}} J_{\alpha-1/2}(\lambda s)\cos(x\lambda)\, d\lambda, \tag{29}$$

где $J_\nu(z)$ — функция Бесселя первого рода порядка ν [18, с. 12].

Теперь, подставляя (27) в (19), а (19) в (7) и меняя порядок интегрирования, находим решение поставленной задачи в виде

$$u(x,t) = -\frac{2x^{1-2\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} \int\limits_0^{+\infty} f_k(s) s^{2\alpha} G_2(x,t,s)\, ds, \tag{30}$$

где

$$G_2(x,t,s) = \int\limits_0^{x} (x^2 - \xi^2)^{\alpha-1}\, G_1(\xi,t,s)\, d\xi. \tag{31}$$

Далее преобразуем формулу (31). С этой целью подставляем (29) в (31) и меняем порядок интегрирования. Затем, вычисляя внутренний интеграл с помощью формулы Пуассона [18, с. 93], имеем

$$G_2(x,t,s) = -\frac{1}{2}\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)\Big(\frac{s}{x}\Big)^{1/2-\alpha}\int\limits_0^{\infty} e^{-t\lambda^2} J_{\alpha-1/2}(s\lambda) J_{\alpha-1/2}(x\lambda)\lambda\, d\lambda.$$

Отсюда, учитывая формулу [20, с. 60]

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-t\lambda^2} J_\nu(s\lambda) J_\nu(x\lambda)\lambda d\lambda = \frac{1}{2t}\exp\left(-\frac{x^2+s^2}{4t}\right) I_\nu\Big(\frac{xs}{2t}\Big), \qquad \mathrm{Re}\,\nu > -1, \quad \mathrm{Re}\, t > 0,$$

получаем

$$G_2(x,t,s) = -\frac{1}{4t}\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)\left(\frac{s}{x}\right)^{1/2-\alpha}\exp\left(-\frac{x^2+s^2}{4t}\right) I_{\alpha-1/2}\Big(\frac{xs}{2t}\Big), \tag{32}$$

где $I_\nu(z)$ — модифицированная функция Бесселя порядка ν [18, с. 13].

Теперь, подставляя (32) в (30) и учитывая неравенства $\alpha = \gamma + 1/2 < 1$ и $\gamma > -1/2$, находим окончательный вид решения уравнения $L_\gamma^m(u) = 0$, удовлетворяющего условиям (2), (3), при $|\gamma| < 1/2:$

$$u(x,t) = \frac{x^{-\gamma}}{2t}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^k}{k!}\int\limits_0^{+\infty} f_k(s)s^{\gamma+1}\exp\left(-\frac{x^2+s^2}{4t}\right) I_\gamma\left(\frac{xs}{2t}\right) ds, \tag{33}$$

где $f_k(x),\ k = \overline{0, m-1},$ — известные функции, определяемые равенствами (24).

***Замечание* 1.** При $m = 1$ формула (33) совпадает с формулами, найденными в работах [11, 14] другими методами.

Поскольку при получении решения (33) мы исходили из предположения о его существовании, необходимо это решение обосновать. Покажем, что функция $u(x,t)$, определяемая равенством (33), является решением уравнения $L_\gamma^m(u) = 0$, удовлетворяющего условиям (2), (3). С этой целью равенство (33) запишем в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^k}{k!}u_k(x,t), \tag{34}$$

где

$$u_k(x,t) = \int\limits_0^{+\infty} f_k(s)s^{2\gamma+1}G(x,t,s)ds,$$
$$G(x,t,s) = \frac{(xs)^{-\gamma}}{2t}\exp\left(-\frac{x^2+s^2}{4t}\right) I_\gamma\Big(\frac{xs}{2t}\Big). \tag{35}$$

Функции $u_k(x,t),\ k = \overline{0, m-1}$, определяемые равенствами (35), удовлетворяют уравнению $L_\gamma^1(u_k) = 0$, так как функция $G(x,t,s)$ является фундаментальным решением данного однородного уравнения [11, 14]. Кроме того, легко доказать, что если $L_\gamma^1(u_k) = 0$, то функция $u(x,t)$, определяемая равенством (34), является решением уравнения $L_\gamma^m(u) = 0$. Аналогично, исходя из свойств фундаментального решения $G(x,t,s)$, можно доказать выполнимость условий (2), (3).

4. Решение поставленной задачи в случае неоднородного уравнения. Теперь рассмотрим задачу о нахождении решения неоднородного уравнения (1), удовлетворяющего однородным граничным условиям (3) и однородным начальным условиям

$$\left(\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right)\bigg|_{t=0} = 0, \qquad x > 0, \quad k = \overline{0, m-1}. \tag{36}$$

Чтобы найти решение задачи (1), (3), (36), воспользуемся следующим аналогом второго принципа Дюамеля для уравнения высокого порядка.

Лемма 3. *Пусть функция $U(x,t,\tau)$, зависящая от параметра τ, является решением однородного уравнения $L_\gamma^m(U) = 0$, $x > 0$, $t > \tau$, удовлетворяющего однородным граничным условиям* (3) *при $t > \tau$ и начальным условиям*

$$\frac{\partial^k U}{\partial t^k}\bigg|_{t=\tau} = 0, \qquad x > 0, \quad k = \overline{0, m-2}, \qquad \frac{\partial^{m-1} U}{\partial t^{m-1}}\bigg|_{t=\tau} = f(x,\tau), \quad x > 0. \tag{37}$$

Тогда функция

$$w(x,t) = \int\limits_0^t U(x,t,\tau)\,d\tau \tag{38}$$

будет решением задачи (1), (3), (36).

Доказательство. Дифференцируя равенство (38) по t и учитывая первое из условий (37), находим

$$\frac{\partial w}{\partial t} = U(x,t,\tau)\big|_{\tau=t} + \int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial t} U(x,t,\tau)\,d\tau = \int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial t} U(x,t,\tau)\,d\tau,$$

Далее, применяя к равенству (38) оператор B_γ^x, имеем

$$B_\gamma^x w(x,t) = \int\limits_0^t B_\gamma^x U(x,t,\tau)\,d\tau.$$

Составим выражение

$$L_\gamma^1(w) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - B_\gamma^x\right) U = \int\limits_0^t L_\gamma^1\big(U(x,t,\tau)\big)\,d\tau.$$

Повторяя этот процесс $m-1$ раз, с учетом (37) получаем

$$L_\gamma^{m-1}(w) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - B_\gamma^x\right)^{m-1} w = \int\limits_0^t L_\gamma^{m-1}\big(U(x,t,\tau)\big)\,d\tau. \tag{39}$$

Далее, дифференцируя (39) по t, находим

$$\frac{\partial}{\partial t} L_\gamma^{m-1}(w) = L_\gamma^{m-1}\big(U(x,t,\tau)\big)\big|_{\tau=t} + \int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial t} L_\gamma^{m-1}\big(U(x,t,\tau)\big)\, d\tau. \tag{40}$$

В силу последнего из условий (37) имеем

$$L_\gamma^{m-1}\big(U(x,t,\tau)\big)\big|_{\tau=t} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - B_\gamma^x\right)^{m-1} U\Bigg|_{\tau=t} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^k [-B_\gamma^x]^{m-k-1} \left.\frac{\partial^k U}{\partial t^k}\right|_{\tau=t} = \left.\frac{\partial^{m-1} U}{\partial t^{m-1}}\right|_{\tau=t} = f(x,t).$$

Принимая во внимание последнее равенство, из (40) получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} L_\gamma^{m-1}(w) = f(x,t) + \int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial t} L_\gamma^{m-1}\big(U(x,t,\tau)\big)\, d\tau. \tag{41}$$

Применяя к равенству (39) оператор B_γ^x, а затем вычитая полученное равенство из (41) и учитывая равенство $L_\gamma^m(U) = 0$, находим $L_\gamma^m(w) = f(x,t)$.

Непосредственными вычислениями можно проверить, что функция $w(x,t)$, определяемая равенством (37), удовлетворяет граничным условиям (3) и начальным условиям (36).

Лемма 3 доказана.

Чтобы найти решение однородного уравнения $L_\gamma^m(U) = 0,\ x > 0,\ t > \tau$, удовлетворяющего граничным условиям (3) и начальным условиям (36), выполним замену переменных $t_1 = t - \tau$. Тогда решение этой задачи определяется формулой (33), которая после возвращения к старым переменным t и τ принимает вид

$$U(x,t,\tau) = \frac{x^{-\gamma}(t-\tau)^{m-2}}{2(m-1)!} \int\limits_0^{+\infty} f(s,\tau) s^{\gamma+1} \exp\left(-\frac{x^2+s^2}{4(t-\tau)}\right) I_\gamma\left(\frac{xs}{2(t-\tau)}\right) ds.$$

Подставляя это выражение для функции $U(x,t,\tau)$ в (37), находим решение задачи (1), (3), (36) в виде

$$w(x,t) = x^{-\gamma} \int\limits_0^t \frac{(t-\tau)^{m-2}}{2(m-1)!} d\tau \int\limits_0^{+\infty} f(s,\tau) s^{\gamma+1} \exp\left(-\frac{x^2+s^2}{4(t-\tau)}\right) I_\gamma\left(\frac{xs}{2(t-\tau)}\right) ds. \tag{42}$$

***Замечание* 2.** При $m = 1$ и $\gamma = -1/2$, уравнение (1) переходит в одномерное неоднородное уравнение теплопроводности в четверть плоскости, а формула (42), в силу $I_{-1/2}(z) = \sqrt{2/(\pi z)}\,\mathrm{ch}(z)$, — в известную формулу [1, с. 57]

$$w(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int\limits_0^{+\infty} f(s,\tau) \left\{ \exp\left[-\frac{(x-s)^2}{4(t-\tau)}\right] + \exp\left[-\frac{(x+s)^2}{4(t-\tau)}\right] \right\} ds.$$

5. Однозначная разрешимость поставленной задачи (1) – (3). Покажем, что в задаче (1) – (3) вместо граничного условия (3) можно взять условие

$$\frac{\partial}{\partial x}[B_\gamma^x]^k u(x,t)\Big|_{x=0} = 0, \qquad \gamma = \alpha - 1/2, \quad t > 0, \quad k = \overline{0, m-1}. \tag{43}$$

Лемма 4. *Если $u(x,t)$ является решением задачи* (1) – (3), *то она будет и решением задачи* (1), (2), (43) *и наоборот.*

Доказательство. При выполнении граничного условия (10) из теоремы 1 при $\eta = -1/2$ следует справедливость равенства

$$\left[B_{\alpha-1/2}^x\right]^k u(x,t) = \left[B_{\alpha-1/2}^x\right]^k I_{-1/2,\alpha} v(x,t) = I_{-1/2,\alpha}\frac{\partial^{2k} v}{\partial x^{2k}}.$$

Дифференцируя последнее равенство по x, а затем полагая $x = 0$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[B_\gamma^x\right]^k u(x,t)\Big|_{x=0} = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\frac{\partial^{2k+1} v}{\partial x^{2k+1}}\Big|_{x=0} = 0. \tag{44}$$

С другой стороны, непосредственными вычислениями из (7) находим

$$\frac{\partial^{2k+1} u}{\partial x^{2k+1}} = \frac{\partial^{2k+1}}{\partial x^{2k+1}} I_{-1/2,\,\alpha}^x v(x,t) = \frac{2}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 (1-s^2)^{\alpha-1} s^{2k+1}\,\frac{\partial^{2k+1} v}{\partial \xi^{2k+1}}\Big|_{\xi = xs} ds.$$

Отсюда при $x = 0$ имеем

$$\frac{\partial^{2k+1} u}{\partial x^{2k+1}}\Big|_{x=0} = \frac{k!}{\Gamma(\alpha+k+1)}\,\frac{\partial^{2k+1} v}{\partial \xi^{2k+1}}\Big|_{\xi=0} = 0, \qquad t \geq 0, \quad k = \overline{0, m-1}. \tag{45}$$

Сравнивая (44) и (45), получаем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[B_\gamma^x\right]^k u(x,t)\Big|_{x=0} = \frac{(\alpha+1)_k}{k!}\frac{\partial^{2k+1} u}{\partial x^{2k+1}}\Big|_{x=0} = 0, \quad k = \overline{0, m-1}.$$

Последнее равенство означает, что решение задачи (1), (2), (43) является решением задачи (1) – (3) и наоборот (так как в обоих случаях получим одну и ту же вспомогательную задачу (8) – (10)).

Лемма 4 доказана.

Теперь докажем единственность решения задачи (1) – (3).

Теорема 3. *Задача* (1) – (3) *не может иметь более одного решения.*

Доказательство. Достаточно показать, что однородная задача

$$L_\gamma^m(u) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} - B_\gamma^x\right)^m u(x,t) = 0, \quad \gamma = \alpha - 1/2, \tag{46}$$

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\Big|_{t=0} = 0, \quad x \geq 0, \qquad \frac{\partial^{2k+1} u}{\partial x^{2k+1}}\Big|_{x=0} = 0, \qquad t \geq 0, \quad k = \overline{0, m-1}, \tag{47}$$

имеет лишь тривиальное решение. Докажем это.

Пусть $u_1(x,t) = L_\gamma^{m-1}(u)$. Тогда в силу леммы 4 из равенства

$$u_1(x,t) = L_\gamma^{m-1}(u) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} - B_\gamma^x\right)^{m-1} u(x,t) = \sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^k \big[-B_\gamma^x\big]^{m-k-1} \frac{\partial^k u}{\partial t^k},$$

где C_{m-1}^k — биномиальные коэффициенты, учитывая (43), (46) и (47), получаем следующую задачу относительно $u_1(x,t)$:

$$L_\gamma^1(u_1) = 0, \qquad u_1(x,0) = 0, \quad x > 0, \qquad u_{1x}(0,t) = 0, \qquad t > 0.$$

Как доказано в работе [7], эта задача в классе ограниченных функций имеет единственное тривиальное решение, т. е. $u_1(x,t) \equiv 0$.

Пусть теперь $u_2(x,t) = L_\gamma^{m-2}(u)$. Тогда, учитывая $u_1(x,t) = L_\gamma^{m-1}(u) = 0$ и (37), имеем $L_\gamma^1(u_2) = 0$, $u_2(x,0) = 0$, $x > 0$, $u_{2x}(0,t) = 0$, $t > 0$, откуда следует, что $u_2(x,t) \equiv 0$. Повторяя этот прием еще $m-2$ раза, получаем $u(x,t) \equiv 0$.

Теорема 3 доказана.

Из доказанного выше следует, что справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть* $|\gamma| < 1/2$, $\varphi_j(x) \in C^{2(m-j)-1}(R^+)$, $j = \overline{0, m-1}$, *и все производные функции* $\varphi_j(x)$ *до порядка* $2(m-j)-1$, $j = \overline{0, m-1}$, *включительно, равны нулю при* $x = 0$, *а функция* $f(x,t)$ *непрерывна и ограничена в области* $R^+ \times R^+$. *Тогда сумма функций* $u(x,t)$ *и* $w(x,t)$, *определяемых соответственно равенствами* (33) *и* (42), *является единственным решением задачи* (1)–(3).

***Замечание* 3.** Этот метод можно применить и к решению задачи Коши для многомерного полипараболического уравнения с оператором Бесселя, действующим по всем пространственным переменным.

Литература

1. *Полянин А. Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.
2. *Чупров И. Ф., Канева Е. А., Мордвинов А. А.* Уравнения математической физики с приложениями к задачам нефтедобычи и трубопроводного транспорта газа. – Ухта: УГТУ, 2004. – 128 с.
3. *Крехивский В. В., Матийчук М. И.* Фундаментальные решения и задача Коши для линейных параболических систем с оператором Бесселя // Докл. АН СССР. – 1968. – **181**, № 6. – С. 1320–1323.
4. *Крехивский В. В., Матийчук М. И.* О краевых задачах для параболических систем с оператором Бесселя // Докл. АН СССР. – 1971. – **139**, № 4. – С. 773–775.
5. *Colton D.* Cauchy's problem for a singular parabolic differential equation // J. Different. Equat. – 1970. – **8**. – P. 250–257.
6. *Arena O.* On a singular parabolic equation related to axially symmetric heat potentials // Ann. Mat. Pura ed Appl. – 1975. – **105**, № 1. – P. 347–393.
7. *Киприянов И. А., Катрахов В. В., Ляпин В. М.* О краевых задачах в области общего вида для сингулярных параболических систем уравнений // Докл. АН СССР. – 1976. – **230**, № 6. – С. 1271–1274.
8. *Кочубей А. Н.* Сингулярные параболические уравнения и марковские процессы // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1984. – **48**, вып. 1. – С. 77–103.
9. *Крехивский В. В.* Теоремы единственности решений задачи Коши для уравнений с оператором Бесселя // Мат. моделирование физических процессов. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. – С. 82–86.
10. *Веренич И. И.* Внутренние оценки решений параболических уравнений с оператором Бесселя // Докл. АН УССР. – 1977. – № 11. – С. 969–974.
11. *Терсенов С. А.* Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. – Новосибирск: Наука, 1985. – 105 с.

12. *Ивасишен С. Д., Лавренчук В. П.* Об интегральном представлении решений параболической системы с оператором Бесселя // Нелинейные граничные задачи. – 1992. – Вып. 4. – С. 19 – 25.
13. *Муравник А. Б.* Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства решений задачи Коши // Соврем. математика. Фундам. направления. – 2014. – **52**. – С. 3 – 141.
14. *Житомирский Я. И.* Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальным оператором Бесселя // Мат. сб. – 1955. – **36**. – № 2. – С. 299 – 310.
15. *Городецкий В. В., Житарюк I. В.* Задача Коші для одного класу параболічних систем з оператором Бесселя в просторах узагальнених функцій // Доп. АН УРСР. – 1991. – № 7. – С. 20 – 23.
16. *Горбачук М. Л., Горбачук В. И.* О решениях дифференциальных уравнений эллиптического типа в банаховом пространстве на полуоси // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 2. – С. 14 – 25.
17. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 702 с.
18. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функци: В 3 т. – М.: Наука, 1973. – Т. 1. – 296 с.
19. *Каримов Ш. Т.* Новые свойства обобщенного оператора Эрдейи – Кобера и их приложения // Докл. АН РУз. – 2014. – № 5. – С. 11 – 13.
20. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Т. 1. Элементарные функции. – 2-е изд., исправ. – М.: Физматлит, 2002. – 632 с.
21. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа: В 2 ч. – 7-е изд. – М.: Физматлит, 2005. – Ч. 1. – 648 с.

Получено 29.01.17