УДК 519.21

М. М. Осипчук (Прикарпат. нац. ун-т ім. В. Стефаника, Івано-Франківськ),
М. І. Портенко (Ін-т математики НАН України, Київ)

СИМЕТРИЧНИЙ α-СТІЙКИЙ ВИПАДКОВИЙ ПРОЦЕС ТА ТРЕТЯ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ВІДПОВІДНОГО ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

We consider a pseudodifferential equation of parabolic type with operator of fractional differentiation with respect to a space variable generating a symmetric α-stable process in a multidimensional Euclidean space with an initial condition and a boundary condition imposed on the values of an unknown function at the points of the boundary of a given domain. The last condition is quite similar to the condition of the so-called third (mixed) boundary-value problem in the theory of differential equations with the difference that a traditional (co)normal derivative is replaced in our problem with a pseudodifferential operator. Another specific feature of the analyzed problem is the two-sided character of the boundary condition, i.e., a consequence of the fact that, in the case of α with values between 1 and 2, the corresponding process reaches the boundary making infinitely many visits to both the interior and exterior regions with respect to the boundary.

Рассматривается псевдодифференциальное уравнение параболического типа с оператором дробного дифференцирования по пространственной переменной, являющимся генератором симметричного α-устойчивого случайного процесса в многомерном евклидовом пространстве. Область, на границе которой задаются краевые условия, ограничивается замкнутой достаточно гладкой поверхностью. Краевое условие, называемое в работе третьим, приравнивает к нулю некоторую линейную комбинацию предельных значений (изнутри и снаружи области) в каждой точке поверхности результата действия на неизвестную функцию определенного псевдодифференциального оператора по пространственной переменной — аналога нормальной производной в классике — и предельных значений этой же функции в той же точке.

1. Вступ. Крайові чи початково-крайові задачі посідають важливе місце в теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними. Для диференціальних рівнянь параболічного та еліптичного типів узагальнені розв'язки згаданих задач мають явні ймовірнісні зображення (див., наприклад, [2, с. 4 – 7]). Ми розглядатимемо псевдодиференціальне рівняння параболічного типу

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \mathbf{A}u(t,\cdot)(x), \qquad t>0, \quad x\in\mathbb{R}^d, \tag{1}$$

де $\mathbb{R}^d$ — d-вимірний ($d\ge 2$) евклідів простір, а оператор $\mathbf{A}$ визначається символом $(-c|\lambda|^\alpha)_{\lambda\in\mathbb{R}^d}$ з деякими фіксованими параметрами $c>0$ та $\alpha\in(1,2)$. Одновимірний випадок ($d=1$) ми розглядати не будемо, оскільки результати, які нас тут цікавитимуть, є частковими випадками відповідних тверджень, одержаних у [7]. Граничний випадок $\alpha=2$ (а тому $\mathbf{A}=c\cdot\Delta$ з оператором Лапласа Δ) добре вивчений і тут не розглядатиметься.

Оператор $\mathbf{A}$ є генератором симетричного (чи краще — ротаційно інваріантного) α-стійкого процесу. Це — процес Маркова в $\mathbb{R}^d$ $\big($позначимо його через $(x_0(t))_{t\ge 0}\big)$ зі щільністю ймовірності переходу $\big($відносно лебегової міри в $\mathbb{R}^d\big)$, що задається рівністю

$$g_0(t,x,y) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} \exp\big\{i(x-y,\xi) - ct|\xi|^\alpha\big\}\,d\xi, \qquad t>0, \quad x\in\mathbb{R}^d, \quad y\in\mathbb{R}^d.$$

Функція $\big(g_0(t,x,y)\big)_{t>0,x\in\mathbb{R}^d,y\in\mathbb{R}^d}$ є фундаментальним розв'язком задачі Коші для псевдодиференціального рівняння (1).

Позначимо через $\mathbf{B}$ оператор, символ якого є $\mathbb{R}^d$-значною функцією $(2ci|\lambda|^{\alpha-2}\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}^d}$. Неважко зрозуміти, що між операторами $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ є досить простий зв'язок: $\mathbf{A} = \dfrac{1}{2}\mathbf{div}(\mathbf{B})$, де $\mathbf{div}$ — оператор дивергенції. Таким чином, $\mathbf{B}$ є деяким аналогом градієнта у класичній (при $\alpha = 2$) теорії. Для фіксованого орта $\nu \in \mathbb{R}^d$ через $\mathbf{B}_\nu$ позначатимемо оператор, що визначається символом $(2ci|\lambda|^{\alpha-2}(\lambda,\nu))_{\lambda\in\mathbb{R}^d}$. Цей оператор є аналогом оператора диференціювання в напрямку ν.

Нехай задано деяку обмежену замкнену поверхню S, яка розділяє множину $\mathbb{R}^d \setminus S$ на дві відкриті підмножини: внутрішню D та зовнішню $\mathbb{R}^d \setminus \overline{D}$ ($\overline{D}$ означає замикання множини D в $\mathbb{R}^d$). Будемо припускати, що в кожній точці $x \in S$ існує дотична до S гіперплощина. Через $\nu(x)$ позначатимемо одиничний вектор зовнішньої нормалі до S в точці $x \in S$.

Нехай $\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$ — банахів простір неперервних обмежених дійснозначних заданих на $\mathbb{R}^d$ функцій із рівномірною нормою $\|\cdot\|$. Задавши на S деякі неперервні дійснозначні функції $(q(x))_{x\in S}$ та $(r(x))_{x\in S}$ (другу з них вважатимемо невід'ємною), а також зафіксувавши деяку функцію $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$, розглянемо задачу (далі — основна задача) побудови неперервної функції $(U(t,x,\varphi))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d}$, яка задовольняє:

(i) псевдодиференціальне рівняння $\dfrac{\partial U(t,x,\varphi)}{\partial t} = \mathbf{A}U(t,\cdot,\varphi)(x),\ t>0,\ x\in\mathbb{R}^d\setminus S$;

(ii) початкову умову $U(0+,x,\varphi) = \varphi(x),\ x \in \mathbb{R}^d$;

(iii) граничну умову

$$\frac{1+q(x)}{2}\mathbf{B}_{\nu(x)}U(t,\cdot,\varphi)(x+) - \frac{1-q(x)}{2}\mathbf{B}_{\nu(x)}U(t,\cdot,\varphi)(x-) =$$
$$= r(x)U(t,x,\varphi) \quad \text{при} \quad t>0, \quad x\in S.$$

В умові (iii) під записом $f(x+)$ $\big($відповідно $f(x-)\big)$ розуміємо границю функції $(f(y))_{y\in\mathbb{R}^d}$ в точці $x \in S$, якщо y наближається до x уздовж довільної кривої, розташованої в деякому замкненому обмеженому конусі $\mathcal{K}$ в $\mathbb{R}^d$ з вершиною в точці x такому, що $\mathcal{K} \subset (\mathbb{R}^d \setminus \overline{D}) \cup \{x\}$ $\big($відповідно $\mathcal{K} \subset D \cup \{x\}\big)$. Таку задачу ми називаємо третьою початково-крайовою задачею для псевдодиференціального рівняння (1). При $r(x) \equiv 0$ вона стає другою початково-крайовою задачею, її розв'язок побудовано в [6]. У цій роботі ми цікавимось фундаментальними розв'язками згаданих задач.

Як і в класичній теорії, сформульовану задачу ми будемо розв'язувати з використанням потенціалів простого шару (див. [6]) та теореми про стрибок нормальної, в даному випадку, дробової похідної останніх. У наступному пункті будуть сформульовані теорема про стрибок та деякі інші потрібні нам результати. Основні твердження цієї роботи наведено в пункті 3. Там ми побудуємо фундаментальний розв'язок задачі (i)–(iii). При цьому розглянемо окремо випадок $q(x) \equiv 0$ — так звану симетричну початково-крайову задачу, та випадок $r(x) \equiv 0$ — другу початково-крайову задачу.

Задача (i)–(iii) у випадку, коли S є гіперплощиною, розглядалася в [7]. Там, звичайно, є свої особливості та складнощі.

Якщо $\alpha = 2$ $\left(\text{та } c = \dfrac{1}{2}\right)$, то $(x_0(t))_{t\geq 0}$ є вінеровим процесом. Деякі результати щодо сформульованої задачі в цьому випадку можна знайти, зокрема, в книгах [2, 3] та статті [1].

2. Допоміжні результати. ***2.1. Поверхня класу $H^{1+\gamma}$ та потенціал простого шару.*** З кожною точкою $x \in S$ пов'яжемо локальну ортогональну систему координат $(y^1, y^2, \ldots, y^d)$ з початком у цій точці і таку, що $y^d = (\nu(x), y)$ для $y \in \mathbb{R}^d$. Далі припустимо існування такої сталої $r_0 > 0$, що для кожної точки $x \in S$ частина поверхні S: $S_r(x) = S \cap B_r(x)$ $\big(B_r(x)$ — куля в $\mathbb{R}^d$ радіуса r з центром у точці $x\big)$ при $r = r_0$ може бути задана в локальній системі координат з початком у точці x рівнянням $y^d = F_x(y^1, \ldots, y^{d-1})$ з деякою однозначною функцією $\big(F_x(y)\big)_{y \in D_x}$ $(D_x \subset \mathbb{R}^{d-1})$. Поверхня S називається поверхнею класу $H^{1+\gamma}$ для деякого $\gamma \in (0,1)$, якщо для кожної точки $x \in S$ відповідна функція F_x в області, локальні координати точок якої задовольняють нерівність $\sum_{k=1}^{d-1} (y^k)^2 \leq r_0^2/4$, має частинні похідні $\dfrac{\partial F_x}{\partial y^k}$, $k = 1, 2, \ldots, d-1$, які задовольняють в цій області умову Гельдера з показником γ і сталою, що не залежить від x (див., наприклад, [9], гл. III, § 8).

Нехай розглядувана поверхня S належить до класу $H^{1+\gamma}$ з деякою сталою $\gamma \in (0,1)$. Із властивостей поверхні класу $H^{1+\gamma}$ ми регулярно будемо використовувати те, що існують додатне число δ_0 та натуральне число m такі, що для кожної точки $x \in S$ існує скінченний набір точок $\{x_1, x_2, \ldots, x_l\}$ на поверхні S, для яких має місце співвідношення $S \setminus S_{r_0/2}(x) \subset$ $\subset \bigcup\limits_{k=1}^{l} S_{r_0/2}(x_k)$ з деяким $l \leq m$ і при цьому $\min_{1 \leq k \leq l} \inf_{y \in S_{r_0/2}(x_k)} |y - x| \geq \delta_0$.

Для зручності подальших формулювань будемо говорити, що функція $(v(t,x))_{t>0, x \in S}$ належить класу $\mathbb{U}$, якщо вона неперервна та існує стала $\beta < 1$ така, що для кожного $T > 0$ при всіх $(t,x) \in (0,T] \times S$ має місце нерівність $|v(t,x)| \leq C_T t^{-\beta}$ з деякою сталою $C_T > 0$.

Далі всі сталі, що залежать від T і вигляд яких для нас не має значення (навіть, якщо вони різні), будемо позначати саме через C_T.

Потенціалом простого шару називається задана при $t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d$ функція

$$V_0(t,x) = \int_0^t d\tau \int_S g_0(t-\tau, x, y) v(\tau, y)\, d\sigma_y \tag{2}$$

за умови, що відповідні інтеграли збігаються. Внутрішній інтеграл у правій частині рівності (2) є поверхневим інтегралом першого роду по поверхні S за змінною y. Нагадаємо деякі потрібні нам далі властивості функції V_0 у припущенні, що поверхня S належить класу $H^{1+\gamma}$, а функція v — класу $\mathbb{U}$ (див. [6]).

По-перше, функція $(V_0(t,x))_{t>0, x \in \mathbb{R}^d}$ неперервна на всій області визначення та для кожного $T > 0$ задовольняє нерівність $|V_0(t,x)| \leq C_T t^{1-\beta-1/\alpha}$ в області $(t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R}^d$. По-друге, в області $(t,x) \in (0,+\infty) \times (\mathbb{R}^d \setminus S)$ виконується рівність $\dfrac{\partial V_0(t,x)}{\partial t} = \mathbf{A} V_0(t,\cdot)(x)$. І по-третє, при фіксованих $t > 0,\ x \in S$ має місце співвідношення

$$\mathbf{B}_{\nu(x)} V_0(t,\cdot)(x\pm) = \mp v(t,x) + \int_0^t d\tau \int_S g_0^{\nu(x)}(t-\tau, x, y) v(\tau, y)\, d\sigma_y, \tag{3}$$

де $g_0^{\nu(x)}(t,x,y) = \mathbf{B}_{\nu(x)} g_0(t,\cdot,y)(x)$. Інтеграл у правій частині (3) називається прямим значенням дії оператора $\mathbf{B}_{\nu(x)}$ на потенціал простого шару V_0 в точці $x \in S$ при фіксованому $t > 0$.

Його існування, як і справедливість формули (3), доведено в [6]. Саме ж співвідношення (3) будемо далі називати твердженням теореми про стрибок.

2.2. Рівняння збурення. Для заданої неперервної невід'ємної функції $(r(x))_{x\in S}$ розглянемо функцію $\big(g(t,x,y)\big)_{t>0,x\in\mathbb{R}^d,y\in\mathbb{R}^d}$, що є розв'язком рівняння

$$g(t,x,y)=g_0(t,x,y)-\int\limits_0^t d\tau\int\limits_S g_0(t-\tau,x,z)g(\tau,z,y)r(z)\,d\sigma_z. \tag{4}$$

Для початку зауважимо, що рівняння (4) може бути розв'язане методом послідовних наближень. А саме, шукатимемо розв'язок цього рівняння у вигляді

$$g(t,x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k g_k(t,x,y), \tag{5}$$

де при всіх $t>0,\ x\in\mathbb{R}^d,\ y\in\mathbb{R}^d$ та $k=1,2,\ldots$

$$g_k(t,x,y)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_S g_0(t-\tau,x,z)g_{k-1}(\tau,z,y)r(z)\,d\sigma_z. \tag{6}$$

Для оцінювання членів ряду в (5) скористаємось відомою (див. [4], гл. IV, а також [8]) нерівністю

$$g_0(t,x,y)\le N\frac{t}{\big(t^{1/\alpha}+|y-x|\big)^{d+\alpha}},\quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d,y\in\mathbb{R}^d, \tag{7}$$

з деякою сталою $N>0$ та доведемо два твердження, необхідні для подальшого викладу.

Лема 1. *Для кожних $t>0,\ x\in\mathbb{R}^d$ та $\theta>-1$ має місце нерівність*

$$\int\limits_S\frac{d\sigma_y}{\big(t^{1/\alpha}+|y-x|\big)^{d+\theta}}\le Ct^{-\frac{1}{\alpha}(\theta+1)} \tag{8}$$

з деякою сталою $C>0$.

Доведення. Позначивши через I інтеграл у лівій частині нерівності (8), при $t\ge 1$, очевидно, можна записати (оскільки $d\ge 2$) $I\le |S|t^{-\frac{1}{\alpha}(d+\theta)}\le |S|t^{-\frac{1}{\alpha}(\theta+1)}$, де $|S|$ — площа поверхні S.

Якщо ж $0<t<1$ і $\rho(x,S)=\inf_{y\in S}|y-x|\ge\rho_0$ з деякою сталою $\rho_0>0$, то $I\le$ $\le|S|\rho_0^{-d-\theta}<|S|\rho_0^{-d-\theta}t^{-\frac{1}{\alpha}(\theta+1)}$. Виберемо тепер $\rho_0>0$ досить малим і розглянемо випадок $x\in\mathbb{R}^d$ з $\rho(x,S)<\rho_0$. Нехай $\tilde{x}\in S$ задовольняє рівність $\rho(x,S)=|x-\tilde{x}|$. Позначимо через $\tilde{y}$ проекцію точки $y\in S$ на гіперплощину, дотичну до S в точці $\tilde{x}$. Розіб'ємо поверхню S на дві частини: $S_{r_0/2}(\tilde{x})$ та $S\setminus S_{r_0/2}(\tilde{x})$. Враховуючи властивості поверхні S (див. пп. 2.1), можемо записати

$$I\le\int\limits_{S_{r_0/2}(\tilde{x})}\frac{d\sigma_y}{(t^{1/\alpha}+|\tilde{y}-\tilde{x}|)^{d+\theta}}+\sum_{k=1}^{l}\int\limits_{S_{r_0/2}(x_k)}\frac{d\sigma_y}{(t^{1/\alpha}+|y-\tilde{x}|-|x-\tilde{x}|)^{d+\theta}}=I'+I''.$$

Для I' справджується нерівність

$$I' \leq \text{const} \cdot \int\limits_0^{r_0/2} \frac{\xi^{d-2}\, d\xi}{(t^{1/\alpha}+\xi)^{d+\theta}} = \text{const} \cdot \int\limits_0^{\frac{r_0}{2}t^{-1/\alpha}} \frac{\xi^{d-2}\, d\xi}{(1+\xi)^{d+\theta}} t^{-\frac{1}{\alpha}(\theta+1)} \leq \text{const} \cdot t^{-\frac{1}{\alpha}(\theta+1)},$$

де const означає деяку додатну сталу, значення якої для нас не є важливим.

Вибравши тепер $\rho_0 < \delta_0$ (число δ_0 означено в пп. 2.1), матимемо $|y-\tilde{x}|-|x-\tilde{x}| > \delta_0-\rho_0 > > 0$, і тому

$$I'' \leq m|S|(\delta_0-\rho_0)^{-d-\theta} < m|S|(\delta_0-\rho_0)^{-d-\theta} t^{-\frac{1}{\alpha}(\theta+1)},$$

що завершує доведення леми 1.

Зауважимо, що стала в нерівності (8) залежить лише від d, θ і поверхні S.

Наступна лема містить нерівність, подібну до тих, що розглядалися А. Н. Кочубеєм (див. [4], гл. IV). Ми використаємо запропонований там метод доведення.

Лема 2. *Для кожних $k > -1$, $l > -1$, $\varkappa > k-\alpha+1$, $\lambda > l-\alpha+1$ і для всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $y \in \mathbb{R}^d$ має місце нерівність*

$$\int\limits_0^t d\tau \int\limits_S \frac{(t-\tau)^{\varkappa/\alpha}}{((t-\tau)^{1/\alpha}+|z-x|)^{d+k}} \frac{\tau^{\lambda/\alpha}}{(\tau^{1/\alpha}+|y-z|)^{d+l}}\, d\sigma_z \leq$$

$$\leq K\left(B\left(1+\frac{1}{\alpha}(\varkappa-k-1), 1+\frac{\lambda}{\alpha}\right) \frac{t^{1+\frac{1}{\alpha}(\varkappa+\lambda-k-1)}}{\big(t^{1/\alpha}+|y-x|\big)^{d+l}} + \right.$$

$$\left. +B\left(1+\frac{1}{\alpha}(\lambda-l-1), 1+\frac{\varkappa}{\alpha}\right) \frac{t^{1+\frac{1}{\alpha}(\varkappa+\lambda-l-1)}}{\big(t^{1/\alpha}+|y-x|\big)^{d+k}}\right) \tag{9}$$

з деякою сталою $K > 0$, що залежить лише від d, l, k та поверхні S, де $B(\cdot,\cdot)$ — бета-функція Ейлера.

Доведення. Розіб'ємо множину інтегрування у лівій частині нерівності, що доводиться, на частини ($t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$ фіксовані):

$$\Pi_1 = \big\{(\tau,z)\colon \tau \in (0,t/2], z \in S\big\}, \quad \Pi_2 = \big\{(\tau,z)\colon \tau \in (t/2,t], z \in S\big\},$$

а їх, у свою чергу, на частини:

$$\Pi_{11} = \left\{(\tau,z) \in \Pi_1\colon (t-\tau)^{1/\alpha}+|z-x| \leq \frac{1}{2}\big(t^{1/\alpha}+|y-x|\big)\right\}, \quad \Pi_{12} = \Pi_1 \setminus \Pi_{11},$$

$$\Pi_{21} = \left\{(\tau,z) \in \Pi_2\colon \tau^{1/\alpha}+|y-z| \leq \frac{1}{2}\big(t^{1/\alpha}+|y-x|\big)\right\}, \quad \Pi_{22} = \Pi_2 \setminus \Pi_{21}.$$

Використавши очевидні нерівності $(u-v)^\rho \geq u^\rho - v^\rho$ при $0 < v < \dfrac{u}{2}$, $0 < \rho < 1$ та $|y-x| \leq |y-z|+|z-x|$, можемо записати

$$\tau^{1/\alpha}+|y-z| \geq t^{1/\alpha}-(t-\tau)^{1/\alpha}+|y-x|-|z-x| \geq \frac{1}{2}\big(t^{1/\alpha}+|y-x|\big) \quad \text{при} \quad (\tau,z) \in \Pi_{11},$$

$$(t-\tau)^{1/\alpha}+|z-x| \geq t^{1/\alpha}-\tau^{1/\alpha}+|y-x|-|y-z| \geq \frac{1}{2}\big(t^{1/\alpha}+|y-x|\big) \quad \text{при} \quad (\tau,z) \in \Pi_{21}.$$

Крім того, очевидно, що

$$(t-\tau)^{1/\alpha}+|z-x|>\frac{1}{2}\big(t^{1/\alpha}+|y-x|\big)\quad \text{при}\quad (\tau,z)\in\Pi_{12},$$

$$\tau^{1/\alpha}+|y-z|>\frac{1}{2}\big(t^{1/\alpha}+|y-x|\big)\quad \text{при}\quad (\tau,z)\in\Pi_{22}.$$

Тому для лівої частини нерівності (9) (позначимо її через I) виконується

$$I\le\frac{2^{d+l}}{\big(t^{1/\alpha}+|y-x|\big)^{d+l}}\int\limits_{\Pi_{11}\cup\Pi_{22}}\frac{(t-\tau)^{\varkappa/\alpha}\tau^{\lambda/\alpha}}{\big((t-\tau)^{1/\alpha}+|z-x|\big)^{d+k}}\,d\tau d\sigma_z+$$

$$+\frac{2^{d+k}}{\big(t^{1/\alpha}+|y-x|\big)^{d+k}}\int\limits_{\Pi_{12}\cup\Pi_{21}}\frac{(t-\tau)^{\varkappa/\alpha}\tau^{\lambda/\alpha}}{\big(\tau^{1/\alpha}+|y-z|\big)^{d+l}}\,d\tau d\sigma_z\le$$

$$\le\frac{2^{d+l}}{\big(t^{1/\alpha}+|y-x|\big)^{d+l}}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_S\frac{(t-\tau)^{\varkappa/\alpha}\tau^{\lambda/\alpha}}{\big((t-\tau)^{1/\alpha}+|z-x|\big)^{d+k}}\,d\sigma_z+$$

$$+\frac{2^{d+k}}{\big(t^{1/\alpha}+|y-x|\big)^{d+k}}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_S\frac{(t-\tau)^{\varkappa/\alpha}\tau^{\lambda/\alpha}}{\big(\tau^{1/\alpha}+|y-z|\big)^{d+l}}\,d\sigma_z.$$

З огляду на нерівність (8) можемо тепер записати

$$I\le K\left(\frac{1}{\big(t^{1/\alpha}+|y-x|\big)^{d+l}}\int\limits_0^t(t-\tau)^{\frac{1}{\alpha}(\varkappa-k-1)}\tau^{\lambda/\alpha}\,d\tau+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\big(t^{1/\alpha}+|y-x|\big)^{d+k}}\int\limits_0^t(t-\tau)^{\varkappa/\alpha}\tau^{\frac{1}{\alpha}(\lambda-l-1)}\,d\tau\right)=$$

$$=K\left(B\left(1+\frac{1}{\alpha}(\varkappa-k-1),1+\frac{\lambda}{\alpha}\right)\frac{t^{1+\frac{1}{\alpha}(\varkappa+\lambda-k-1)}}{\big(t^{1/\alpha}+|y-x|\big)^{d+l}}+\right.$$

$$\left.+B\left(1+\frac{1}{\alpha}(\lambda-l-1),1+\frac{\varkappa}{\alpha}\right)\frac{t^{1+\frac{1}{\alpha}(\varkappa+\lambda-l-1)}}{\big(t^{1/\alpha}+|y-x|\big)^{d+k}}\right),$$

де K — деяка додатна стала, що залежить лише від d, l, k та поверхні S.

Лему 2 доведено.

Перейдемо тепер до оцінювання членів ряду з рівності (5). Із співвідношень (6) та нерівності (7) одержуємо

$$0<g_k(t,x,y)\le N\|r\|\int\limits_0^t d\tau\int\limits_S\frac{\tau}{(\tau^{1/\alpha}+|z-x|)^{d+\alpha}}\,g_{k-1}(t-\tau,z,y)\,d\sigma_z$$

при всіх $t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$, $y\in\mathbb{R}^d$ та $k=1,2,\ldots$, де $\|r\|=\sup_{x\in S}r(x)$.

Індукцією по k з допомогою леми 2 доводимо, що при всіх $t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d,\ y \in \mathbb{R}^d$ та $k = 0, 1, 2, \ldots$ має місце нерівність

$$g_k(t,x,y) \le R_k \frac{t^{1+k(1-1/\alpha)}}{\big(t^{1/\alpha} + |y-x|\big)^{d+\alpha}}, \tag{10}$$

де числова послідовність $\{R_k : k \ge 0\}$ задовольняє рекурентне співвідношення (при $k \ge 1$)

$$R_k = R_{k-1} N K \|r\| \Big(B\big(1 - 1/\alpha, 2 + (k-1)(1-1/\alpha)\big) + B\big(2, k(1-1/\alpha)\big)\Big)$$

з $R_0 = N$, де $N > 0$ — стала з нерівності (7), а $K > 0$ — з нерівності (9).

Таким чином, ряд у рівності (5) збігається абсолютно при всіх $t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d,\ y \in \mathbb{R}^d$ та рівномірно на множині $(t,x,y) \in (0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ для кожного $T > 0$. Звідси робимо висновок, що його сума $\big(g(t,x,y)\big)_{t>0, x\in\mathbb{R}^d, y\in\mathbb{R}^d}$ є неперервною функцією, яка задовольняє рівняння (4), причому для кожного $T > 0$ існує така стала $C_T > 0$, що при всіх $t \in (0,T],\ x \in \mathbb{R}^d,\ y \in \mathbb{R}^d$ має місце нерівність

$$\big|g(t,x,y)\big| \le C_T \frac{t}{\big(t^{1/\alpha} + |y-x|\big)^{d+\alpha}}. \tag{11}$$

***Зауваження* 1.** Функція $\big(g(t,x,y)\big)_{t>0, x\in\mathbb{R}^d, y\in\mathbb{R}^d}$ задовольняє також і рівняння

$$g(t,x,y) = g_0(t,x,y) - \int_0^t d\tau \int_S g(t-\tau, x, z) g_0(\tau, z, y) r(z)\, d\sigma_z. \tag{12}$$

Це стає зрозумілим, якщо довести, наприклад, за індукцією по k співвідношення

$$g_k(t,x,y) = \int_0^t d\tau \int_S g_{k-1}(t-\tau, x, z) g_0(\tau, z, y) r(z)\, d\sigma_z$$

для всіх $t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d,\ y \in \mathbb{R}^d$ та $k = 1, 2, \ldots$.

Зауважимо, що розв'язки кожного з рівнянь (4) та (12) єдині у класі функцій, які задовольняють нерівність (11). Це випливає з того, що оцінка (10) при всіх $k \ge 1$ має місце для різниці кожних двох розв'язків кожного із згаданих рівнянь.

У наступному підпункті ми встановимо, що функція $\big(g(t,x,y)\big)_{t>0, x\in\mathbb{R}^d, y\in\mathbb{R}^d}$ є щільністю ймовірності переходу процесу Маркова, який утворюється з процесу $(x_0(t))_{t\ge0}$ обривом $\big($з інтенсивністю $(r(x))_{x\in S}\big)$ у точках поверхні S.

2.3. Формула Фейнмана – Каца та апроксимаційна процедура. При кожному $t > 0$ розглянемо функцію $(F_t(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$, що задається рівністю

$$F_t(x) = \int_0^t d\tau \int_S g_0(\tau, x, y) r(y)\, d\sigma_y, \tag{13}$$

в якій функція $(r(x))_{x\in S}$ та ж, що і в попередньому підпункті.

Функція (13) (як функція аргументів (t,x)) є потенціалом простого шару з невід'ємними значеннями. Зауважимо, що функція $(r(x))_{x\in S}$ належить класу $\mathbb{U}$ зі сталими $\beta = 0$ та $C_T = \|r\|$.

Тому, як нескладно бачити, при всіх $t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d$ має місце нерівність $F_t(x) \leq K \cdot t^{1-1/\alpha}$ з деякою сталою $K > 0$. Крім того, з допомогою рівняння Колмогорова – Чепмена, яке задовольняє функція g_0, легко перевірити, що при $t > 0,\ s > 0$ та $x \in \mathbb{R}^d$ виконується співвідношення $F_s(x) + \int_{\mathbb{R}^d} g_0(s,x,y)F_t(y)\,dy = F_{s+t}(x)$. Це дозволяє стверджувати, що функція (13) є W-функцією, для якої виконується $\sup_{x\in\mathbb{R}^d} F_t(x) \to 0,\ t \to 0+$. Звідси випливає існування W-функціонала $(\eta_t)_{t\geq 0}$ від процесу $(x_0(t))_{t\geq 0}$ з характеристикою (13) (див. [2], теорема 6.6). Тобто при всіх $t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^d$ виконується рівність $\mathbb{E}_x\eta_t = F_t(x)$, де $\mathbb{E}_x$ означає умовне математичне сподівання при умові $x_0(0) = x$.

Наша мета в цьому пункті — показати, що при всіх $t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d$ та $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$ має місце співвідношення

$$\mathbb{E}_x\varphi(x_0(t))e^{-\eta_t} = \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t,x,y)\varphi(y)\,dy, \tag{14}$$

в якому $\big(g(t,x,y)\big)_{t>0,x\in\mathbb{R}^d,y\in\mathbb{R}^d}$ — побудований у попередньому підпункті розв'язок рівнянь (4) та (12).

Для початку апроксимуємо функціонал η_t деякими простішими функціоналами від процесу $(x_0(t))_{t\geq 0}$. Для кожних $h > 0$ та $x \in \mathbb{R}^d$ покладемо $v_h(x) = \int_S g_0(h,x,y)r(y)\,d\sigma_y$. При фіксованому $h > 0$ ця функція є неперервною та обмеженою на $\mathbb{R}^d$. Визначимо (для фіксованого $h > 0$) адитивний функціонал $(\eta_t^{(h)})_{t\geq 0}$ від процесу $(x_0(t))_{t\geq 0}$ з допомогою співвідношення $\eta_t^{(h)} = \int_0^t v_h(x_0(\tau))\,d\tau$. Це — W-функціонал з характеристикою

$$\mathbb{E}_x\eta_t^{(h)} = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^d} g_0(\tau,x,y)v_h(y)\,dy = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g_0(\tau+h,x,y)r(y)\,d\sigma_y.$$

Після нескладних перетворень одержуємо

$$\mathbb{E}_x\eta_t^{(h)} - \mathbb{E}_x\eta_t = \int\limits_t^{t+h} d\tau \int\limits_S g_0(\tau,x,y)r(y)\,d\sigma_y - \int\limits_0^h d\tau \int\limits_S g_0(\tau,x,y)r(y)\,d\sigma_y.$$

З нерівності (7) та леми 1 при $\theta = \alpha$ випливає, що для кожного $T > 0$ при всіх $t \in (0,T]$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $h > 0$ має місце нерівність

$$\left|\mathbb{E}_x\eta_t^{(h)} - \mathbb{E}_x\eta_t\right| \leq C_T\frac{\alpha}{\alpha-1}\Big((t+h)^{1-1/\alpha} - t^{1-1/\alpha} + h^{1-1/\alpha}\Big),$$

де $C_T > 0$ — деяка стала. Теорема 6.4 з [2] дозволяє стверджувати, що $\eta_t^{(h)} \to \eta_t$ при $h \to 0+$ у середньому квадратичному при кожному $t > 0$. Звідси одержуємо, що для кожної $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$ між функціями $(t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d)$ $u^{(h)}(t,x,\varphi) = \mathbb{E}_x\varphi(x_0(t))e^{-\eta_t^{(h)}}$ та $u(t,x,\varphi) = \mathbb{E}_x\varphi(x_0(t))e^{-\eta_t}$ має місце співвідношення $\lim_{h\to 0+} u^{(h)}(t,x,\varphi) = u(t,x,\varphi)$ в сенсі поточкової збіжності.

При кожному $h > 0$ функція $(u^{(h)}(t,x,\varphi))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d}$ є розв'язком рівняння

$$u^{(h)}(t,x,\varphi) = u_0(t,x,\varphi) - \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^d} g_0(t-\tau,x,y)u^{(h)}(\tau,y,\varphi)\,v_h(y)\,dy, \tag{15}$$

в якому

$$u_0(t,x,\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} g_0(t,x,y)\varphi(y)\,dy. \tag{16}$$

Перейдемо тепер у рівнянні (15) до границі при $h \to 0+$. Для цього потрібно довести допоміжне твердження.

Для вимірної комплекснозначної функції $(\psi(t,x))_{t\geq 0, x\in\mathbb{R}^d}$ такої, що при кожному $T > 0$ $\sup_{0\leq t\leq T, x\in\mathbb{R}^d} |\psi(t,x)| < +\infty$, розглянемо її перетворення

$$\psi_h(t,x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^d} g_0(t-\tau,x,y)\psi(\tau,y)v_h(y)\,dy, \qquad t>0, \quad x\in\mathbb{R}^d, \quad h>0.$$

Лема 3. *Для даних чисел $\varepsilon > 0$, $L > 0$ та $T > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що нерівність*

$$\big|\psi_h(t',x') - \psi_h(t,x)\big| < \varepsilon$$

виконується при всіх $h > 0$, $t' \in (0,T]$, $t \in (0,T]$, $x' \in \mathbb{R}^d$, $x \in \mathbb{R}^d$ і для кожної функції $(\psi(t,x))_{t\geq 0, x\in\mathbb{R}^d}$ з властивістю $\sup_{0\leq t\leq T, x\in\mathbb{R}^d}|\psi(t,x)| < L$, якщо тільки $|t'-t| + |x'-x| < \delta$.

Доведення. Розглянемо при $0 < t < t' \leq T$ та $x' \in \mathbb{R}^d$, $x \in \mathbb{R}^d$ різницю $\psi_h(t',x') - \psi_h(t,x)$, записавши її у вигляді суми двох доданків:

$$I_1 = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^d} \big[g_0(t'-\tau,x',y) - g_0(t-\tau,x,y)\big]\psi(\tau,y)v_h(y)\,dy,$$

$$I_2 = \int\limits_t^{t'} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^d} g_0(t'-\tau,x',y)\psi(\tau,y)v_h(y)\,dy.$$

Оскільки з нерівностей (7) та (8) при $\theta = \alpha$ випливає оцінка

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} g_0(t,x,y)v_h(y)\,dy = \int\limits_S g_0(h+t,x,z)r(z)\,d\sigma_z \leq \|r\|C(t+h)^{-1/\alpha} \leq \|r\|Ct^{-1/\alpha}$$

з деякою сталою $C > 0$, то $|I_2| \leq \mathrm{const}\cdot(t'-t)^{1-1/\alpha}$. Це означає, що I_2 можна зробити як завгодно малим, якщо тільки малим вибрати $t'-t$.

Візьмемо тепер деяке число $\rho \in (0,t)$ і запишемо I_1 у вигляді суми двох інтегралів від тієї ж підінтегральної функції: перший, I_1', по $(\tau,y) \in (0,t-\rho)\times\mathbb{R}^d$, а другий, I_1'', по $(\tau,y) \in \in (t-\rho,t)\times\mathbb{R}^d$.

Враховуючи доведену вище нерівність, записуємо

$$|I_1''| \leq L\int\limits_{t-\rho}^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^d} g_0(t'-\tau,x',y)v_h(y)\,dy + L\int\limits_{t-\rho}^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^d} g_0(t-\tau,x,y)v_h(y)\,dy \leq$$

$$\leq L\|r\|C\int\limits_{t-\rho}^t \Big[(t'-\tau)^{-1/\alpha} + (t-\tau)^{-1/\alpha}\Big]\,d\tau =$$

$$= L\|r\|C\frac{\alpha}{\alpha-1}\left[(t'-t+\rho)^{1-1/\alpha}-(t'-t)^{1-1/\alpha}+\rho^{1-1/\alpha}\right].$$

Це дозволяє вибрати ρ так, щоб I_1'' стало малим рівномірно відносно $t\in(0;T]$, $t'\in(0;T]$ $(t<t')$, $x\in\mathbb{R}^d$, $x'\in\mathbb{R}^d$.

Якщо врахувати, що функція g_0 рівномірно неперервна на множині $[\rho,+\infty)\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ для кожного $\rho>0$, то для доведення того, що I_1' можна зробити малим при достатньо малих $t'-t$ та $|x'-x|$, досить довести, що $\sup_{h>0}\int_{\mathbb{R}^d}v_h(y)\,dy<+\infty$. Але, оскільки $\int_{\mathbb{R}^d}v_h(y)\,dy=$ $=\int_S r(z)\,d\sigma_z\le\|r\||S|<+\infty$, то лему 3 доведено.

З властивостей функції g_0, як фундаментального розв'язку задачі Коші для рівняння (1), випливає рівність

$$\lim_{h\to0+}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)v_h(x)\,dx=\int\limits_S\varphi(x)r(x)\,d\sigma, \tag{17}$$

справедлива для будь-якої $\varphi\in\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$.

Лема 3 дозволяє вибрати послідовність $h_n\to0+$, $n\to\infty$, таку, що для кожної $\varphi\in\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$ виконується $\lim_{n\to\infty}u^{(h_n)}(t,x,\varphi)=u(t,x,\varphi)$ локально рівномірно по $t\ge0$ та рівномірно по $x\in\mathbb{R}^d$.

З рівності (17), використовуючи лему 3, одержуємо

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^d}g_0(t-\tau,x,y)u^{(h_n)}(\tau,y,\varphi)v_{h_n}(y)\,dy=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_S g_0(t-\tau,x,y)u(\tau,y,\varphi)r(y)\,d\sigma_y.$$

Перехід до границі у (15) по послідовності h_n при $n\to\infty$ приводить до такого рівняння для функції u:

$$u(t,x,\varphi)=u_0(t,x,\varphi)-\int\limits_0^t d\tau\int\limits_S g_0(t-\tau,x,y)u(\tau,y,\varphi)r(y)\,d\sigma_y. \tag{18}$$

Це ж рівняння одержимо, якщо домножити обидві частини рівняння (4) на $\varphi(y)$ та зінтегрувати їх по $y\in\mathbb{R}^d$. Оскільки обмежений розв'язок рівняння (18) єдиний, то

$$u(t,x,\varphi)=\int\limits_{\mathbb{R}^d}g(t,x,y)\varphi(y)\,dy \tag{19}$$

і рівність (14) доведено.

3. Початково-крайові задачі. ***3.1. Симетрична задача.*** В цьому підпункті розглядатимемо задачу (i) – (iii) в частковому випадку, коли $q(x)\equiv0$. Тоді умова (iii) набере вигляду

(iii$'$) $\frac{1}{2}\mathbf{B}_{\nu(x)}U(t,\cdot,\varphi)(x+)-\frac{1}{2}\mathbf{B}_{\nu(x)}U(t,\cdot,\varphi)(x-)=r(x)U(t,x,\varphi)$, $t>0$, $x\in S$.

Теорема 1. *Побудована вище функція* $\big(g(t,x,y)\big)_{t>0,x\in\mathbb{R}^d,y\in\mathbb{R}^d}$ *є фундаментальним розв'язком задачі* (i), (ii), (iii$'$).

Доведення. Візьмемо довільну функцію $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$ і доведемо, що функція (19), яка є розв'язком рівняння (18), задовольняє умови задачі (i), (ii), (iii$'$).

У п. 1 вже згадувалось, що функція g_0 є фундаментальним розв'язком задачі Коші для рівняння (1). Тому функція $\big(u_0(t,x,\varphi)\big)_{t>0, x\in\mathbb{R}^d}$, задана рівністю (16), задовольняє рівняння з умови (i) в області $(t,x) \in (0,+\infty)\times\mathbb{R}^d$ та початкову умову (ii) із заданою функцією φ.

Нескладно зрозуміти, що функція $Q(t,x,\varphi) = \displaystyle\int_0^t d\tau \int_S g_0(t-\tau,x,y)u(\tau,y,\varphi)r(y)\,d\sigma_y$, визначена для $(t,x)\in(0,+\infty)\times\mathbb{R}^d$, є потенціалом простого шару. З його властивостей (див. пп. 2.1) маємо, що функція $\big(Q(t,x,\varphi)\big)_{t>0,x\in\mathbb{R}^d}$ при кожній $\varphi\in\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$ задовольняє умову (i) та при всіх $t>0,\ x\in S$ рівність

$$\mathbf{B}_{\nu(x)}Q(t,\cdot,\varphi)(x\pm) = \mp r(x)u(t,x,\varphi) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g_0^{\nu(x)}(t-\tau,x,y)u(\tau,y,\varphi)r(y)\,d\sigma_y.$$

Звідси одержуємо, що функція $\big(u(t,x,\varphi)\big)_{t>0,x\in\mathbb{R}^d}$, визначена рівністю (19), задовольняє умову (iii$'$). Завершує доведення очевидна тотожність $Q(0+,x,\varphi)\equiv 0$.

3.2. Несиметрична задача. Розглянемо загальний випадок, тобто, на відміну від попереднього підпункту, $q(x)\not\equiv 0$.

3.2.1. Фундаментальний розв'язок другої початково-крайової задачі. Припустимо, що $r(x)\equiv 0$ і крайова умова сформульованої в п. 1 основної задачі має вигляд

(iii$''$) $\dfrac{1+q(x)}{2}\mathbf{B}_{\nu(x)}U(t,\cdot,\varphi)(x+) - \dfrac{1-q(x)}{2}\mathbf{B}_{\nu(x)}U(t,\cdot,\varphi)(x-) = 0,\ t>0,\ x\in S.$

Зауваження 2. Задачу (i), (ii), (iii$''$) розглянуто у [6], де і побудовано її розв'язок. Тут ми побудуємо *фундаментальний розв'язок* цієї задачі.

Задамо функцію $(G_0(t,x,y))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d,y\in\mathbb{R}^d}$ рівністю

$$G_0(t,x,y) = g_0(t,x,y) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g_0(t-\tau,x,z)V(\tau,z,y)q(z)\,d\sigma_z \tag{20}$$

з деякою невідомою функцією $\big(V(t,x,y)\big)_{t>0,x\in S,y\in\mathbb{R}^d}$.

Нашою метою в цьому підпункті є побудова такої функції V, щоб для кожної $\varphi\in\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$ функція

$$U_0(t,x,\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} G_0(t,x,y)\varphi(y)\,dy, \quad t>0, \quad x\in\mathbb{R}^d, \tag{21}$$

задовольняла умови (i), (ii), (iii$''$). Це і означатиме, що функція G_0 є фундаментальним розв'язком другої початково-крайової задачі (i), (ii), (iii$''$). Очевидно, що для виконання умов (i), (ii) достатньо, щоб при кожній $\varphi\in\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$ функція

$$v(t,x,\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} V(t,x,y)\varphi(y)\,dy, \qquad t>0, \quad x\in S, \tag{22}$$

належала класу $\mathbb{U}$. Це випливатиме з властивостей функції g_0 та потенціалу простого шару $\displaystyle\int_0^t d\tau\int_S g_0(t-\tau,x,z)\,v(\tau,z,\varphi)q(z)\,d\sigma_z$, які були сформульовані у п. 1 та пп. 2.1 відповідно.

Теорема про стрибок (див. пп. 2.1) приводить нас до висновку, що умова (iii$''$) буде виконуватись, якщо функція V задовольнятиме рівняння ($t > 0,\ x \in S,\ y \in \mathbb{R}^d$)

$$V(t,x,y) = g_0^{\nu(x)}(t,x,y) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g_0^{\nu(x)}(t-\tau,x,z)V(\tau,z,y)q(z)\,d\sigma_z. \tag{23}$$

Спочатку оцінимо функцію $\big(g_0^{\nu(x)}(t,x,y)\big)_{t>0,x\in S,y\in\mathbb{R}^d}$, для якої має місце зображення (див., наприклад, [5])

$$g_0^{\nu(x)}(t,x,y) = \frac{2}{\alpha}\frac{\big(y-x,\nu(x)\big)}{t}g_0(t,x,y), \qquad t>0, \quad x\in S, \quad y\in\mathbb{R}^d. \tag{24}$$

Враховуючи оцінку (7) та властивості поверхні S (див. пп. 2.1), одержуємо при $t > 0,\ x \in S,\ y \in S$ оцінку

$$|g_0^{\nu(x)}(t,x,y)| \le \frac{C}{\big(t^{1/\alpha}+|y-x|\big)^{d+\alpha-1-\gamma}} \tag{25}$$

з деякою сталою $C > 0$. Якщо ж $t > 0,\ x \in S,\ y \in \mathbb{R}^d \setminus S$, то можемо записати, що

$$\big|g_0^{\nu(x)}(t,x,y)\big| \le \frac{C}{\big(\rho(y,S)\big)^{d+\alpha-1}}, \tag{26}$$

де $\rho(y,S) = \inf_{x\in S}|y-x|$, $C > 0$ — деяка стала.

Далі розв'язуватимемо рівняння (23) при $t > 0,\ x \in S,\ y \in S$ методом послідовних наближень. Покладемо при $t > 0,\ x \in S,\ y \in S$ нульове наближення $V_0(t,x,y) = g_0^{\nu(x)}(t,x,y)$ та для $k \ge 1$

$$V_k(t,x,y) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g_0^{\nu(x)}(t-\tau,x,z)V_{k-1}(\tau,z,y)q(z)\,d\sigma_z.$$

Індукцією по k, використовуючи лему 2, доводимо, що при всіх $t > 0,\ x \in S,\ y \in S$ та $k \ge 0$ виконуються нерівності

$$|V_k(t,x,y)| \le R_k \frac{t^{k\gamma/\alpha}}{\big(t^{1/\alpha}+|y-x|\big)^{d+\alpha-1-\gamma}}, \tag{27}$$

де числова послідовність $\{R_k : k \ge 0\}$ визначається співвідношеннями $R_0 = C$ та $R_k = C\left(\dfrac{\alpha}{k\gamma} + B\left(\dfrac{\gamma}{\alpha}, 1+(k-1)\dfrac{\gamma}{\alpha}\right)\right)R_{k-1}$ при $k \ge 1$, в яких $C > 0$ — деяка стала.

Одержані оцінки функцій $(V_k(t,x,y))_{t>0,x\in S,y\in S}$ приводять до того, що ряд $\sum_{k=0}^{\infty} V_k(t,x,y)$ збігається абсолютно при $(t,x,y) \in (0,+\infty)\times S\times S$ та рівномірно по $(x,y)\in S\times S$ і локально рівномірно по $t > 0$. Його сума $\big(V(t,x,y)\big)_{t>0,x\in S,y\in S}$ є неперервним розв'язком рівняння (23) і для кожного $T > 0$ існує така стала $C_T > 0$, що при всіх $t \in (0,T],\ x \in S,\ y \in S$ виконується нерівність

$$\big|V(t,x,y)\big| \le C_T \frac{1}{\big(t^{1/\alpha}+|y-x|\big)^{d+\alpha-1-\gamma}}. \tag{28}$$

Крім того, функція V задовольняє рівняння ($t > 0,\ x \in S,\ y \in S$)

$$V(t,x,y) = g_0^{\nu(x)}(t,x,y) + \int_0^t d\tau \int_S V(t-\tau,x,z) g_0^{\nu(z)}(\tau,z,y) q(z)\, d\sigma_z. \tag{29}$$

Останнє випливає із співвідношень ($t>0,\ x\in S,\ y\in S$)

$$V_k(t,x,y) = \int_0^t d\tau \int_S V_{k-1}(t-\tau,x,z) g_0^{\nu(z)}(\tau,z,y) q(z)\, d\sigma_z, \quad k\geq 1,$$

які легко доводяться з допомогою індукції по k та нерівностей (25), (27).

Співвідношення (29) продовжує функцію V на множину $(t,x,y)\in(0,+\infty)\times S\times\mathbb{R}^d$. Змінюючи порядок інтегрування з урахуванням оцінок (25) та (28), легко доводимо, що побудована функція $\big(V(t,x,y)\big)_{t>0,x\in S,y\in\mathbb{R}^d}$ задовольняє рівняння (23). На підставі оцінок (26), (28) та нерівності (8) можемо записати

$$\big|V(t,x,y)\big| \leq C_T \frac{1}{\big(\rho(y,S)\big)^{d+\alpha-1}} \tag{30}$$

при $t\in(0,T],\ x\in S$ та $y\in\mathbb{R}^d\setminus S$ для кожного $T>0$ з деякою сталою $C_T>0$.

Враховуючи нерівність (7) та співвідношення (24), можемо записати оцінку

$$\big|g_0^{\nu(x)}(t,x,y)\big| \leq \frac{2N}{\alpha}\frac{1}{\big(t^{1/\alpha}+|y-x|\big)^{d+\alpha-1}}, \qquad t>0, \quad x\in S, \quad y\in\mathbb{R}^d.$$

Тому, домноживши обидві частини співвідношення (29) на $\varphi(y)$ та зінтегрувавши його по $y\in\mathbb{R}^d$ (тут враховуємо нерівність (30)), для функції $\big(v(t,x,y)\big)_{t>0,x\in S}$, заданої рівністю (22), одержимо, що для кожної $\varphi\in\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$ при кожному $T>0$ виконується нерівність $\big|v(t,x,\varphi)\big|\leq$ $\leq C_T t^{-1+1/\alpha},\ t\in(0,T],\ x\in S$, з деякою сталою $C_T>0$. Отже, функція $(v(t,x,y))_{t>0,x\in S}$ належить класу $\mathbb{U}$.

Сформулюємо тепер основний результат цього підпункту у вигляді теореми.

Теорема 2. *Функція* $\big(G_0(t,\,x,\,y)\big)_{t>0,\,x\in\mathbb{R}^d,\,y\in\mathbb{R}^d}$, *задана рівністю* (20), *де* $\big(V(t,\,x,\,y)\big)_{t>0,x\in S,y\in\mathbb{R}^d}$ *задовольняє рівняння* (23), *є фундаментальним розв'язком задачі* (i), (ii), (iii$''$).

Зауважимо, що для функції G_0 можна запропонувати дещо інше зображення. А саме, для $t>0,\ x\in\mathbb{R}^d$ та $y\in S$ покладемо

$$\tilde V(t,x,y) = g_0(t,x,y) + \int_0^t d\tau \int_S g_0(t-\tau,x,z)\, V(\tau,z,y)\, q(z)\, d\sigma_z.$$

Використовуючи зображення $V(\tau,z,y)$ при $\tau>0,\ z\in S,\ y\in S$ у вигляді ряду $\sum_{k=0}^\infty V_k(\tau,z,y)$, отримуємо, що $\tilde V$ є розв'язком рівняння

$$\tilde V(t,x,y) = g_0(t,x,y) + \int_0^t d\tau \int_S \tilde V(t-\tau,x,z) g_0^{\nu(z)}(\tau,z,y) q(z)\, d\sigma_z$$

при $t>0,\ x\in\mathbb{R}^d$ та $y\in S$. Як наслідок, маємо дуальне до (20) зображення функції G_0 ($t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$ та $y\in\mathbb{R}^d\setminus S$):

$$G_0(t,x,y)=g_0(t,x,y)+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_S \tilde V(t-\tau,x,z)\,g_0^{\nu(z)}(\tau,z,y)\,q(z)\,d\sigma_z.$$

Звідси легко отримати формули $G_0(t,x,y\pm)=\big(1\pm q(y)\big)\tilde V(t,x,y)$, справедливі при $t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$ та $y\in S$. Тому цілком природно покласти для $t>0,\ x\in\mathbb{R}^d$ та $y\in S$

$$G_0(t,x,y)=\frac12\big[G_0(t,x,y+)+G_0(t,x,y-)\big]=\tilde V(t,x,y).$$

Зауважимо, що з рівності (20) при $t>0,\ x\in S$ та $y\in\mathbb{R}^d$ випливають співвідношення $\mathbf{B}_{\nu(x)}G_0(t,\cdot,y)(x\pm)=(1\mp q(x))V(t,x,y)$.

3.2.2. Фундаментальний розв'язок основної задачі. В цьому підпункті відмовимось від додаткових обмежень щодо функцій r і q, тобто розглянемо сформульовану у вступі основну задачу (i) – (iii). Фундаментальний розв'язок цієї задачі будуватимемо як спільний розв'язок пари рівнянь $(t>0,\ x\in\mathbb{R}^d,\ y\in\mathbb{R}^d)$

$$G(t,x,y)=G_0(t,x,y)-\int\limits_0^t d\tau\int\limits_S G_0(t-\tau,x,z)G(\tau,z,y)r(z)\,d\sigma_z, \tag{31}$$

$$G(t,x,y)=G_0(t,x,y)-\int\limits_0^t d\tau\int\limits_S G(t-\tau,x,z)G_0(\tau,z,y)r(z)\,d\sigma_z, \tag{32}$$

в яких функція $\big(G_0(t,x,y)\big)_{t>0,x\in\mathbb{R}^d,y\in\mathbb{R}^d}$ та ж, що і в попередньому підпункті.

Зауважимо, що рівняння (31), (32) достатньо розв'язувати на множині $(t,x,y)\in(0,+\infty)\times\times S\times S$. Тоді співвідношення (32) продовжить одержаний розв'язок на множину $(t,x,y)\in\in(0,+\infty)\times S\times\mathbb{R}^d$, а (31) — на множину $(t,x,y)\in(0,+\infty)\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$.

Розв'язок рівнянь (31), (32) шукаємо у вигляді суми ряду

$$G(t,x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kG_k(t,x,y), \tag{33}$$

де при $k\ge1$

$$G_k(t,x,y)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_S G_0(t-\tau,x,z)G_{k-1}(\tau,z,y)r(z)\,d\sigma_z=$$

$$=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_S G_{k-1}(t-\tau,x,z)G_0(\tau,z,y)r(z)\,d\sigma_z.$$

***Зауваження* 3.** Справедливість другої рівності доводиться індукцією по k з допомогою доведених нижче оцінок.

Співвідношення (20), нерівності (7), (28) та лема 2 приводять нас до оцінки

$$\big|G_0(t,x,y)\big|\le C_T\frac{t^{1-1/\alpha}}{\big(t^{1/\alpha}+|y-x|\big)^{d+\alpha-1}},$$

яка справджується при всіх $t \in (0,T]$, $x \in S$, $y \in S$ для кожного $T > 0$ з деякою сталою $C_T > 0$.

З допомогою індукції по k встановлюємо нерівності для кожних $k \geq 0$, $T > 0$:

$$\big|G_k(t,x,y)\big| \leq R_k \frac{t^{(k+1)(1-1/\alpha)}}{\big(t^{1/\alpha} + |y-x|\big)^{d+\alpha-1}}, \qquad t \in (0,T], \quad x \in S, \quad y \in S, \tag{34}$$

де числова послідовність $\{R_k : k \geq 0\}$ задається співвідношеннями $R_0 = C_T$ та $R_k = K\left(B\left(1 - \frac{1}{\alpha}, 1 + k\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\right) + B\left(2 - \frac{1}{\alpha}, k\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\right)\right) R_{k-1}$ при $k \geq 1$, в яких $C_T > 0$, $K > 0$ — деякі сталі (перша, можливо, залежить від T).

З оцінок (34) випливає, що ряд у співвідношенні (33) збігається абсолютно при $(t,x,y) \in (0,+\infty) \times S \times S$ та рівномірно по $(x,y) \in S \times S$ і локально рівномірно по $t > 0$. Його сума $\big(G(t,x,y)\big)_{t>0, x\in S, y \in S}$ задовольняє рівняння (31), (32) на множині $(t,x,y) \in (0,+\infty) \times S \times S$. Крім того, має місце оцінка

$$\big|G(t,x,y)\big| \leq C_T \frac{t^{1-1/\alpha}}{\big(t^{1/\alpha} + |y-x|\big)^{d+\alpha-1}} \tag{35}$$

при всіх $t \in (0,T]$, $x \in S$, $y \in S$ для кожного $T > 0$ з деякою сталою $C_T > 0$. Рівності (31), (32) продовжують функцію G на множину $(t,x,y) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ зі збереженням нерівності (35). Тут ми знову скористалися лемою 2.

Для кожної $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}_d)$ покладемо

$$U(t,x,\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} G(t,x,y)\varphi(y)\,dy, \qquad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{36}$$

З рівняння (31) випливає співвідношення

$$U(t,x,\varphi) = U_0(t,x,\varphi) - \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S G_0(t-\tau,x,z)U(\tau,z,\varphi)r(z)\,d\sigma_z, \qquad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{37}$$

де $U_0(t,x,\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} G_0(t,x,y)\varphi(y)\,dy$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$.

Функція U_0 задовольняє умови (i), (ii) та умову (iii) з функцією $r(x) \equiv 0$.

Для інтеграла у правій частині (37) $\big($позначимо його через $\big(W(t,x)\big)_{t>0, x\in\mathbb{R}^d}\big)$ має місце зображення $W(t,x) = \int_0^t d\tau \int_S g_0(t-\tau,x,z)w(\tau,z,\varphi)\,d\sigma_z$, в якому

$$w(t,x,\varphi) = r(x)U(t,x,\varphi) - q(x)\int\limits_0^t d\tau \int\limits_S V(\tau,x,z)U(t-\tau,z,\varphi)r(z)\,d\sigma_z,$$

де функція V визначена в пп. 3.2.1.

Лема 4. *Функція* $\big(w(t,x,\varphi)\big)_{t>0, x\in S}$ *при кожній* $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$ *належить класу* $\mathbb{U}$.

Доведення. Дійсно, з допомогою рівності (36) та безпосередніх обчислень приходимо до нерівності $|U(t,x,\varphi)| \leq \|\varphi\| C_T \int_{\mathbb{R}^d} \dfrac{t^{1-1/\alpha}}{\left(t^{1/\alpha}+|y-x|\right)^{d+\alpha-1}}\,dy \leq C_T$, а вже звідси випливає, що $\left|r(x)U(t,x,\varphi)\right| \leq C_T\|r\|$ та внаслідок леми 1 при $\theta = \alpha - 1 - \gamma$

$$\left| q(x) \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S V(\tau,x,z) U(t-\tau,z,\varphi) r(z)\, d\sigma_z \right| \leq$$

$$\leq \|q\| \|r\| C_T \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S \frac{d\sigma_z}{\left(\tau^{1/\alpha}+|z-x|\right)^{d+\alpha-1-\gamma}} \leq C_T t^{\gamma/\alpha}$$

при всіх $t \in (0,T]$, $x \in S$ для кожного $T > 0$ з деякими сталими $C_T > 0$. Неперервність функції w на $(0,+\infty) \times S$ є очевидною.

Лему 4 доведено.

Нескладні викладки з використанням співвідношення (23) та теореми про стрибок приводять до рівності $\dfrac{1+q(x)}{2}\mathbf{B}_{\nu(x)} W(t,\cdot)(x+) - \dfrac{1-q(x)}{2}\mathbf{B}_{\nu(x)} W(t,\cdot)(x-) = -r(x)U(t,x,\varphi)$, $t > 0$, $x \in S$.

Таким чином, функція $\left(U(t,x,\varphi)\right)_{t>0, x\in\mathbb{R}^d}$, задана співвідношенням (36), задовольняє умову (iii). Потенціал простого шару W задовольняє умову (i) та нульову початкову умову. Отже, ми одержали таке твердження.

Теорема 3. *Функція* $\left(G(t,x,y)\right)_{t>0, x\in\mathbb{R}^d, y\in\mathbb{R}^d}$, *задана рівністю* (33), *є фундаментальним розв'язком задачі* (i) – (iii).

Література

1. *Aryasova O. V., Portenko M. I.* One class of multidimensional stochastic differential equations having no property of weak uniqueness of a solution // Theory Stochast. Process. – 2005. – **11(27)**, № 3-4. – P. 14 – 28.
2. *Дынкин Е. Б.* Марковские процессы. – М.: Физматгиз, 1963. – 860 с.
3. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов: В 3 т. – М.: Наука, 1975. – Т. 2. – 640 с.
4. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2004. – **125**. – 387 p.
5. *Osypchuk M. M.* On some perturbations of a stable process and solutions to the Cauchy problem for a class of pseudo-differential equations // Carpath. Math. Publ. – 2015. – **7**, № 1. – P. 101 – 107.
6. *Осипчук М. М., Портенко М. І.* Про потенціали простого шару для одного класу псевдодиференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 11. – С. 1512 – 1524.
7. *Osypchuk M. M., Portenko M. I.* On the third initial-boundary value problem for some class of pseudo-differential equations related to a symmetric α-stable process // J. Pseudo-Different. Operators and Appl. – 2017. doi: 10.1007/s11868-017-0210-3
8. *Osypchuk M. M., Portenko M. I.* One type of singular perturbations of a multidimensional stable process // Theory Stochast. Process. – 2014. – **19(35)**, № 2. – P. 42 – 51.
9. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. – 424 с.

Одержано 20.06.17