УДК 517.5

А. Е. Гайдабура, В. А. Кофанов (Днепропетр. нац. ун-т)

ТОЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА РАЗНЫХ МЕТРИК ТИПА РЕМЕЗА НА КЛАССАХ ФУНКЦИЙ С ЗАДАННОЙ ФУНКЦИЕЙ СРАВНЕНИЯ

For any $p \in [1, \infty]$, $\omega > 0$, $\beta \in (0, 2\omega)$, and any measurable set $B \subset I_d := [0, d]$, $\mu B \leq \beta$, we obtain the following sharp Remez-type inequality of various metrics

$$E_0(x)_\infty \leq \frac{\|\varphi\|_\infty}{E_0(\varphi)_{L_p(I_{2\omega} \setminus B_1)}} \|x\|_{L_p(I_d \setminus B)}$$

on the classes $S_\varphi(\omega)$ of d-periodic ($d \geq 2\omega$) functions x with a given sine-shaped 2ω-periodic comparison function φ, where $B_1 := [(\omega - \beta)/2, (\omega + \beta)/2]$ and $E_0(f)_{L_p(G)}$ is the best approximation of the function f by constants in the metric of the space $L_p(G)$. In particular, we prove sharp Remez-type inequalities of various metrics in the Sobolev spaces of differentiable periodic functions. We also obtain inequalities of this type in the spaces of trigonometric polynomials and splines.

Для довільних $p \in [1, \infty]$, $\omega > 0$, $\beta \in (0, 2\omega)$, і будь-якої вимірної множини $B \subset I_d := [0, d]$, $\mu B \leq \beta$, отримано точну нерівність різних метрик типу Ремеза

$$E_0(x)_\infty \leq \frac{\|\varphi\|_\infty}{E_0(\varphi)_{L_p(I_{2\omega} \setminus B_1)}} \|x\|_{L_p(I_d \setminus B)}$$

на класах $S_\varphi(\omega)$ d-періодичних функцій x ($d \geq 2\omega$), що мають задану синусоподібну 2ω-періодичну функцію порівняння φ, де $B_1 := [(\omega - \beta)/2, (\omega + \beta)/2]$, $E_0(f)_{L_p(G)}$ — найкраще наближення функції f константами в метриці простору $L_p(G)$.

Як наслідок отримано точні нерівності різних метрик типу Ремеза на соболєвських класах диференційовних періодичних функцій та на просторах тригонометричних поліномів і поліноміальних сплайнів.

1. Введение. Пусть $G \subset \mathbf{R}$. Будем рассматривать пространства $L_p(G)$, $1 \leq p \leq \infty$, всех измеримых функций $x \colon G \to \mathbf{R}$, для которых $\|x\|_{L_p(G)} < \infty$, где

$$\|x\|_{L_p(G)} := \begin{cases} \left(\int\limits_G |x(t)|^p dt \right)^{1/p}, & \text{если} \quad 1 \leq p < \infty, \\ \operatorname{vrai\,sup}\limits_{t \in G} |x(t)|, & \text{если} \quad p = \infty. \end{cases}$$

Пусть $d > 0$, I_d — окружность, реализованная в виде отрезка $[0, d]$ с отождествленными концами. Для $r \in \mathbf{N}$, $G = \mathbf{R}$, или $G = I_d$, через $L^r_\infty(G)$ обозначим пространство всех функций $x \in L_\infty(G)$, имеющих локально абсолютно непрерывные производные до $(r-1)$-го порядка и таких, что $x^{(r)} \in L_\infty(G)$. Для таких G вместо $\|x\|_{L_\infty(G)}$ будем писать $\|x\|_\infty$.

Будем говорить, что $f \in L^1_\infty(\mathbf{R})$ является функцией сравнения для $x \in L^1_\infty(\mathbf{R})$, если существует такое $\alpha \in \mathbf{R}$, что

$$\max_{t \in \mathbf{R}} x(t) = \max_{t \in \mathbf{R}} f(t) + \alpha, \qquad \min_{t \in \mathbf{R}} x(t) = \min_{t \in \mathbf{R}} f(t) + \alpha,$$

и из равенства $x(\xi) = f(\eta) + \alpha$, где $\xi, \eta \in \mathbf{R}$, следует неравенство $|x'(\xi)| \leq |f'(\eta)|$, если указанные производные существуют.

Нечетную 2ω-периодическую функцию $\varphi \in L^1_\infty(I_{2\omega})$ будем называть S-функцией, если она имеет следующие свойства: φ является четной относительно $\omega/2$, $|\varphi|$ — выпуклая вверх на $[0, \omega]$ и строго монотонная на $[0, \omega/2]$.

Для 2ω-периодической S-функции φ через $S_\varphi(\omega)$ обозначим класс функций x из пространства $L^1_\infty(\mathbf{R})$, для которых φ является функцией сравнения. Отметим, что классы $S_\varphi(\omega)$ рассматривались в работах [1, 2]. Примерами классов $S_\varphi(\omega)$ являются соболевские классы

$$\big\{x \in L^r_\infty(\mathbf{R})\colon \|x\|_\infty \le A_0,\ \|x^{(r)}\|_\infty \le A_r\big\},$$

а также ограниченные подмножества пространства T_n (тригонометрических полиномов порядка не выше n) и пространства $S_{n,r}$ $\big($сплайнов порядка r дефекта 1 с узлами в точках $k\pi/n$, $k \in \mathbf{Z}\big)$.

В теории аппроксимации полиномами важную роль играют неравенства типа Ремеза

$$\|T\|_{L_\infty(I_{2\pi})} \le C(n, \beta)\, \|T\|_{L_\infty(I_{2\pi}\setminus B)} \tag{1}$$

на классе T_n, где $B-$ произвольное измеримое по Лебегу множество $B \subset I_{2\pi}$, $\mu B \le \beta \in$ $\in (0, 2\pi)$.

Начало этой тематике положила работа [3] Ремеза, в которой он нашел точную константу в неравенстве вида (1) для алгебраических многочленов. В неравенстве Ремеза экстремальным является многочлен Чебышева 1-го рода. Точная константа в неравенстве (1) для тригонометрических полиномов неизвестна. В ряде работ получены двусторонние оценки для точных констант $C(n, \beta)$. Кроме того, известно асимптотическое поведение констант $C(n, \beta)$ при $\beta \to 2\pi$ [4] и $\beta \to 0$ [5]. Подробную библиографию работ по данной тематике можно найти в [4 – 7]. В работе [5] доказано неравенство

$$\|T\|_{L_\infty(I_{2\pi})} \le \left(1 + 2\,\mathrm{tg}^2\,\frac{n\beta}{4m}\right) \|T\|_{L_\infty(I_{2\pi}\setminus B)} \tag{2}$$

для произвольного полинома $T \in T_n$, имеющего минимальный период $2\pi/m$, и любого измеримого по Лебегу множества $B \subset I_{2\pi}$, $\mu B \le \beta$, где $\beta \in (0, 2\pi m/n)$. Равенство в (2) достигается для полинома $T(t) = \cos nx + \dfrac{1}{2}(1 - \cos\beta/2)$. Этот результат был обобщен в [8], где для любой d-периодической функции $x \in S_\varphi(\omega)$ ($\varphi-$ заданная функция сравнения) и произвольного измеримого по Лебегу множества $B \subset I_d$, $\mu B \le \beta$, доказаны неравенства

$$\|x\|_\infty \le \frac{3\|\varphi\|_\infty - \varphi\left(\dfrac{\omega - \beta}{2}\right)}{\|\varphi\|_\infty + \varphi\left(\dfrac{\omega - \beta}{2}\right)}\, \|x\|_{L_\infty(I_d\setminus B)} \tag{3}$$

и

$$E_0(x)_\infty \le \frac{2\|\varphi\|_\infty}{\|\varphi\|_\infty + \varphi\left(\dfrac{\omega - \beta}{2}\right)}\, \|x\|_{L_\infty(I_d\setminus B)}\,. \tag{4}$$

Здесь $E_0(x)_\infty$ — наилучшее равномерное приближение константами функции x. Неравенства (3) и (4) являются точными на классе $S_\varphi(\omega)$ и обращаются в равенство для функции $x(t)=\varphi(t)+\dfrac{1}{2}\left(\|\varphi\|_\infty-\varphi\left(\dfrac{\omega-\beta}{2}\right)\right)$.

В настоящей работе получено дальнейшее обобщение неравенства (4). Для произвольных $p\in[1,\infty]$, $\omega>0$, $\beta\in(0,2\omega)$, и измеримого множества $B\subset I_d$, $\mu B\le\beta$, доказано точное неравенство разных метрик типа Ремеза

$$E_0(x)_\infty\le\frac{\|\varphi\|_\infty}{E_0(\varphi)_{L_p(I_{2\omega}\setminus B_1)}}\,\|x\|_{L_p(I_d\setminus B)}$$

на классах $S_\varphi(\omega)$ d-периодических функций x с заданной функцией сравнения φ, где $B_1:=$ $:=\big[(\omega-\beta)/2,(\omega+\beta)/2\big]$, $E_0(\varphi)_{L_p(I_{2\omega}\setminus B_1)}$– наилучшее приближение функции φ константами в метрике пространства $L_p(I_{2\omega}\setminus B_1)$ (теорема 1). Как следствие получены точные неравенства разных метрик типа Ремеза на соболевских классах дифференцируемых периодических функций (теорема 2), а также на классах T_n тригонометрических полиномов (теорема 3) и пространствах $S_{n,r}$ периодических полиномиальных сплайнов (теорема 4).

2. Основная лемма. Пусть $\alpha,\ y>0$. Для 2ω-периодической S-функции φ положим

$$E_y^\alpha:=\big\{t\in I_{2\omega}\colon|\varphi(t)+\alpha|>y\big\}. \tag{5}$$

Ясно, что для $\beta\in(0,2\omega)$ существует единственное число $y=y(\beta)$, удовлетворяющее условию

$$\mu E_{y(\beta)}^\alpha=\beta, \tag{6}$$

где μ — мера Лебега.

Лемма 1. *Пусть p принадлежит $[1,\infty]$. Для любой 2ω-периодической S-функции φ и $\beta\in(0,2\omega)$ справедливо соотношение*

$$\min_{\alpha>0}\left\{\int\limits_{I_{2\omega}\setminus E_{y(\beta)}^\alpha}|\varphi(t)+\alpha|^p dt\right\}^{1/p}=E_0(\varphi)_{L_p(I_{2\omega}\setminus B_1)},$$

где $B_1:=\left[\dfrac{\omega-\beta}{2},\dfrac{\omega+\beta}{2}\right]$.

Доказательство. Достаточно провести для $p<\infty$. Не ограничивая общности можно считать, что

$$\|\varphi\|_\infty=1. \tag{7}$$

Рассмотрим функцию

$$f(\alpha):=\int\limits_{I_{2\omega}\setminus E_{y(\beta)}^\alpha}|\varphi(t)+\alpha|^p dt$$

и покажем, что $\min\big\{f(\alpha)\colon\alpha>0\big\}$ достигается в промежутке

$$M_\beta:=\left[\frac{1}{2}\left(1-\varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)\right),1\right].$$

Для этого рассмотрим два случая: $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\left(1-\varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)\right)\right)$ и $\alpha > 1$ и докажем, что в обоих случаях

$$f(\alpha) \geq \min\big\{f(\alpha) \colon \alpha \in M_\beta\big\}. \tag{8}$$

Пусть сначала $\alpha < \frac{1}{2}\left(1-\varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)\right)$, т. е. $\varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)+\alpha < 1-\alpha$. В этом случае существуют такие числа $u, v > 0,\ u+v=\beta,\ v \geq u$, что

$$\varphi\left(\frac{\omega-v}{2}\right)+\alpha = -\left(\varphi\left(\frac{-\omega+u}{2}\right)+\alpha\right),$$

и, вследствие четности функции φ относительно точек $\pm\frac{\omega}{2}$, имеем

$$I_{2\omega} \setminus E^{\alpha}_{y(\beta)} = \left[\frac{\omega-v}{2}, \frac{\omega+v}{2}\right] \bigcup \left[\frac{-\omega-u}{2}, \frac{-\omega+u}{2}\right].$$

Через $c = c(\alpha)$ обозначим единственный нуль функции $\varphi(t)+\alpha$ в промежутке $[-\omega/2, \omega/2]$. Не ограничивая общности можно считать, что φ возрастает в этом промежутке. Тогда

$$\frac{1}{2}f(\alpha) = \int\limits_{(-\omega+u)/2}^{c} |\varphi(t)+\alpha|^p dt + \int\limits_{c}^{(\omega-v)/2} \big|\varphi(t)+\alpha\big|^p dt,$$

где $u = u(\alpha)$, $v = v(\alpha)$, причем $u(\alpha)+v(\alpha) = \beta$, а β является фиксированным. Следовательно,

$$\frac{1}{2}f'(\alpha) = -p\int\limits_{(-\omega+u)/2}^{c} |\varphi(t)+\alpha|^{p-1} dt + p\int\limits_{c}^{(\omega-v)/2} |\varphi(t)+\alpha|^{p-1} dt +$$

$$+c'(\alpha)|\varphi(c)+\alpha|^p - \frac{1}{2}u'(\alpha)\left|\varphi\left(\frac{-\omega+u}{2}\right)+\alpha\right|^p -$$

$$-\frac{1}{2}v'(\alpha)\left|\varphi\left(\frac{\omega-v}{2}\right)+\alpha\right|^p - c'(\alpha)|\varphi(c)+\alpha|^p.$$

Так как

$$\varphi(c)+\alpha = 0, \qquad \left|\varphi\left(\frac{-\omega+u}{2}\right)+\alpha\right| = \left|\varphi\left(\frac{\omega-v}{2}\right)+\alpha\right|, \qquad u'(\alpha)+v'(\alpha) = 0$$

(последнее равенство слдует из тождества $u(\alpha)+v(\alpha) = \beta$), то

$$\frac{1}{2p}f'(\alpha) = -\int\limits_{(-\omega+u)/2}^{c} |\varphi(t)+\alpha|^{p-1} dt + \int\limits_{c}^{(\omega-v)/2} |\varphi(t)+\alpha|^{p-1} dt.$$

Поскольку функция φ выпукла вверх на $[0, \omega]$ и нечетна, то для точек

$$t_1 \in \left(\frac{-\omega+u}{2}, c\right), \qquad t_2 \in \left(c, \frac{\omega-v}{2}\right),$$

удовлетворяющих условию

$$\bigl|\varphi(t_1)+\alpha\bigr| = \bigl|\varphi(t_2)+\alpha\bigr|,$$

выполнено неравенство

$$\bigl|\varphi'(t_1)\bigr| \le \bigl|\varphi'(t_2)\bigr|.$$

Поэтому, принимая во внимание равенство

$$\left|\varphi\left(\frac{-\omega+u}{2}\right)+\alpha\right| = \left|\varphi\left(\frac{\omega-v}{2}\right)+\alpha\right|,$$

заключаем, что

$$c - \frac{-\omega+u}{2} \ge \frac{\omega-v}{2} - c$$

и

$$\int\limits_{(-\omega+u)/2}^{c} \bigl|\varphi(t)+\alpha\bigr|^{p-1} dt \ge \int\limits_{c}^{(\omega-v)/2} \bigl|\varphi(t)+\alpha\bigr|^{p-1} dt.$$

Таким образом, $f'(\alpha) \le 0$ для $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\left(1-\varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)\right)\right)$ и неравенство (8) в этом случае доказано.

Пусть теперь $\alpha > 1$. Тогда $\varphi(t)+\alpha > 0$ для всех $t \in \mathbf{R}$ в силу (7), причем функция $g_t(\alpha) := \varphi(t)+\alpha$ строго возрастает по переменной α при каждом фиксированном t. Поэтому функция $f(\alpha)$ также строго возрастает и не может достигать минимума при $\alpha > 1$. Тем самым (8) полностью доказано.

Итак, функция $f(\alpha)$ достигает минимума в промежутке M_β. В этом случае

$$E^{\alpha}_{y(\beta)} = \left[\frac{\omega-\beta}{2}, \frac{\omega+\beta}{2}\right] =: B_1$$

и

$$\frac{1}{2} f(\alpha) = \int\limits_{-\omega/2}^{c} |\varphi(t)+\alpha|^p dt + \int\limits_{c}^{(\omega-\beta)/2} |\varphi(t)+\alpha|^p dt,$$

где $c = c(\alpha)$ — единственный нуль $\varphi(t)+\alpha$ в промежутке $[-\omega/2, \omega/2]$. Предполагая, как и раньше, что φ возрастает в этом промежутке, имеем

$$\frac{1}{2} f'(\alpha) = -p \int\limits_{-\omega/2}^{c} |\varphi(t)+\alpha|^{p-1} dt + p \int\limits_{c}^{(\omega-\beta)/2} |\varphi(t)+\alpha|^{p-1} dt. \tag{9}$$

Ясно, что при возрастании $\alpha \in M_\beta$ величина $c = c(\alpha)$ убывает. При этом модуль первого интеграла в (9) уменьшает, а модуль второго — увеличивает. Кроме того, очевидно, что $f'(1) > 0$ и ранее было доказано неравенство

$$f'\left(\frac{1}{2}\left(1-\varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)\right)\right) \le 0.$$

Следовательно, минимум функции $f(\alpha)$ достигается в точке $\alpha \in M_\beta$, удовлетворяющей условию

$$\int\limits_{-\omega/2}^{(\omega-\beta)/2} |\varphi(t)+\alpha|^{p-1}\mathrm{sgn}(\varphi(t)+\alpha)dt = 0, \tag{10}$$

которое можно записать в виде

$$\int\limits_{I_{2\omega}\setminus B_1} |\varphi(t)+\alpha|^{p-1}\mathrm{sgn}(\varphi(t)+\alpha)dt = 0.$$

Из последнего равенства в силу критерия элемента наилучшего приближения в метрике пространства L_p следует утверждение леммы.

***Замечание* 1.** При $p=1$ условие (10) принимает вид

$$c+\frac{\omega}{2} = \frac{\omega-\beta}{2} - c,$$

где c — нуль функции $\varphi(t)+\alpha$ в промежутке $[-\omega/2, -\omega/2]$. Отсюда $c = -\beta/4$ и $\alpha = -\varphi(-\beta/4) = \varphi(\beta/4)$. Таким образом,

$$E_0(\varphi)_{L_1(I_{2\omega}\setminus B_1)} = \left\| \varphi + \varphi\left(\frac{\beta}{4}\right)\right\|_{L_1(I_{2\omega}\setminus B_1)}. \tag{11}$$

Кроме того, очевидно, что

$$E_0(\varphi)_{L_\infty(I_{2\omega}\setminus B_1)} = \frac{1}{2}\left(\|\varphi\|_\infty + \varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)\right). \tag{12}$$

3. Неравенства разных метрик типа Ремеза на классах функций с заданной функцией сравнения. Для функции $f \in L_1(I_d)$ через $m(f,y)$, $y>0$, обозначим ее функцию распределения, определяемую равенством

$$m(f,y) := \mu\bigl\{t \in I_d\colon |f(t)|>y\bigr\}, \tag{13}$$

и пусть $r(f,t)$ — убывающая перестановка (см., например, [9], §1.3) сужения функции $|f|$ на $[0,d]$. Положим $r(f,t)=0$ для $t>d$.

Теорема 1. *Пусть* $p \in [1,\infty]$, φ — S*-функция с периодом* 2ω, $\beta \in (0, 2\omega)$. *Для любой* d*-периодической функции* $x \in S_\varphi(\omega)$ *и измеримого множества* $B \subset I_d$, $\mu B \le \beta$, *имеет место неравенство*

$$E_0(x)_\infty \le \frac{\|\varphi\|_\infty}{E_0(\varphi)_{L_p(I_{2\omega}\setminus B_1)}} \|x\|_{L_{L_p}(I_d\setminus B)}, \tag{14}$$

где $B_1 := \left[\frac{\omega-\beta}{2}, \frac{\omega+\beta}{2}\right]$.

Неравенство (14) *является точным и обращается в равенство для функции* $x(t) = \varphi(t) - \alpha_p(\varphi, B_1)$ *и множества* $B = B_1$, *где* $\alpha_p(\varphi, B_1)$ — *константа наилучшего приближения функции* φ *в метрике пространства* $L_p(I_{2\omega}\setminus B_1)$.

Доказательство. Зафиксируем d-периодическую функцию $x \in S_\varphi(\omega)$. Вследствие однородности неравенства (14) можно считать, что $E_0(x)_\infty = 1$, а поскольку φ является S-функцией, то

$$E_0(x)_\infty = \|\varphi\|_\infty = 1. \tag{15}$$

При этом существует такое $\alpha \in \mathbf{R}$, что

$$\max_{t\in\mathbf{R}} x(t) = \max_{t\in\mathbf{R}} \varphi(t) + \alpha = 1 + \alpha, \qquad \min_{t\in\mathbf{R}} x(t) = \min_{t\in\mathbf{R}} \varphi(t) + \alpha = \alpha - 1.$$

Переходя, если нужно, к функции $-x$, можем считать в силу (15), что $\max\{x(t)\colon t \in \mathbf{R}\} \geq 1$. Тогда $\alpha \geq 0$.

Пусть для определенности функция φ возрастает на $\left[-\dfrac{\omega}{2}, \dfrac{\omega}{2}\right]$. Для $\tau \in \mathbf{R}$ положим $x_\tau(t) :=$ $:= x(\tau + t),\ t \in \mathbf{R}$. Выберем $\tau_1, \tau_2 \in \mathbf{R}$ так, чтобы

$$x_{\tau_1}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \max_{t\in\mathbf{R}} x(t) = 1 + \alpha, \qquad x_{\tau_2}\left(-\frac{\omega}{2}\right) = \min_{t\in\mathbf{R}} x(t) = \alpha - 1.$$

Так как φ является функцией сравнения для x, то

$$(x_{\tau_1}(t))_+ \geq (\varphi(t) + \alpha)_+ \qquad \left|t - \frac{\omega}{2}\right| \leq \omega, \tag{16}$$

и

$$(x_{\tau_2}(t))_- \geq (\varphi(t) + \alpha)_-, \qquad \left|t + \frac{\omega}{2}\right| \leq \omega, \tag{17}$$

где $u_\pm := \max\{\pm\, u, 0\}$. Отметим, что из (16) и (17), в частности, следует соотношение $d \geq 2\omega$, и кроме того, неравенства

$$m(x_\pm, y) \geq m((\varphi(\cdot) + \alpha)_\pm, y), \quad y \geq 0,$$

где функция $m(f, y)$ определена соотношением (13). Поэтому

$$m(x, y) \geq m\big(\varphi(\cdot) + \alpha, y\big), \quad y \geq 0,$$

откуда непосредственно следует, что

$$r(x, t) \geq r\big(\varphi(\cdot) + \alpha, t\big), \quad t \geq 0. \tag{18}$$

Заметим, что для любого измеримого множества $B \subset I_d,\ \mu B \leq \beta$, имеет место неравенство

$$\int\limits_B |x(t)|^p dt \leq \int\limits_0^\beta r^p(x, t) dt,$$

а так как перестановка сохраняет L_p-норму функции, то

$$\|x\|^p_{L_p(I_d \setminus B)} = \int\limits_{I_d} |x(t)|^p dt - \int\limits_B |x(t)|^p dt \geq$$

$$\geq \int\limits_0^d r^p(x,t)dt - \int\limits_0^\beta r^p(x,t)dt = \int\limits_\beta^d r^p(x,t)dt.$$

Отсюда, принимая во внимание неравенство (18) и соотношение $d \geq 2\omega$, получаем

$$\|x\|^p_{L_p(I_d\setminus B)} \geq \int\limits_\beta^{2\omega} r^p(\varphi(\cdot)+\alpha,t)dt = \int\limits_{I_{2\omega}\setminus E^\alpha_{y(\beta)}} |\varphi(t)+\alpha|^p dt,$$

где $E^\alpha_{y(\beta)}$ определено равенствами (5), (6). Теперь, применяя лемму 1, заключаем, что для любого измеримого множества B, $\mu B \leq \beta$, выполнено неравенство

$$\|x\|_{L_p(I_d\setminus B)} \geq E_0(\varphi)_{L_p(I_{2\omega}\setminus B_1)},$$

из которого в силу (15) непосредственно следует (14).

Теорема 1 доказана.

Учитывая замечания к лемме 1, получаем такое следствие.

***Следствие* 1.** *В условиях теоремы* 1 *выполнены точные на классе* $S_\varphi(\omega)$ *неравенства*

$$E_0(x)_\infty \leq \frac{\|\varphi\|_\infty}{\left\|\varphi + \varphi\left(\dfrac{\beta}{4}\right)\right\|_{L_1(I_{2\omega}\setminus B_1)}} \|x\|_{L_1(I_d\setminus B)}\,,$$

и

$$E_0(x)_\infty \leq \frac{2\|\varphi\|_\infty}{\|\varphi\|_\infty + \varphi\left(\dfrac{\omega-\beta}{2}\right)} \|x\|_{L_\infty(I_d\setminus B)}\,.$$

Последнее неравенство было доказано в [8].

4. Неравенства разных метрик типа Ремеза на классах дифференцируемых периодических функций. Символом $\varphi_r(t)$, $r \in \mathbf{N}$, обозначим сдвиг r-го 2π-периодического интеграла с нулевым средним значением на периоде от функции $\varphi_0(t) = \operatorname{sgn}\sin t$, удовлетворяющий условию $\varphi_r(0) = 0$. Для $\lambda > 0$ положим $\varphi_{\lambda,r}(t) := \lambda^{-r}\varphi_r(\lambda t)$. Ясно, что сплайн $\varphi_{\lambda,r}(t)$ является S-функцией с периодом $2\pi/\lambda$. Пусть далее $K_r := \|\varphi_r\|_\infty$ — константа Фавара.

Теорема 2. *Пусть* $r \in \mathbf{N}$, $p \in [1,\infty]$, $\beta \in (0, 2\pi)$. *Тогда для любой функции* $x \in L^r_\infty(I_{2\pi})$ *и произвольного измеримого множества* $B \subset I_{2\pi}$, $\mu B \leq \beta/\lambda$, *где* $\lambda = \left(\dfrac{K_r\left\|x^{(r)}\right\|_\infty}{E_0(x)_\infty}\right)^{1/r}$, *имеет место неравенство*

$$E_0(x)_\infty \leq \frac{\|\varphi_r\|_\infty}{E_0(\varphi_r)^\alpha_{L_p(I_{2\pi}\setminus B_1)}} \|x\|^\alpha_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)} \|x^{(r)}\|^{1-\alpha}_\infty, \tag{19}$$

где $\alpha = \dfrac{r}{r+1/p}$, $B_1 := \left[\dfrac{\pi-\beta}{2}, \dfrac{\pi+\beta}{2}\right]$.

Неравенство (19) *является точным и обращается в равенство для функции* $x(t) = \varphi_r(t) - \alpha_p(\varphi_r, B_1)$ *и множества* $B = B_1$, *где* $\alpha_p(\varphi_r, B_1)$ — *константа наилучшего приближения функции* φ *в метрике пространства* $L_p(I_{2\pi}\setminus B_1)$.

Доказательство. Зафиксируем функцию $x \in L^r_\infty(\mathbf{R})$. Вследствие однородности неравенства (19) можно считать, что

$$\left\| x^{(r)} \right\|_\infty = 1. \tag{20}$$

Выберем λ из условия

$$E_0(x)_\infty = \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty , \tag{21}$$

т. е. $\lambda = \left(\dfrac{K_r \left\| x^{(r)} \right\|_\infty}{E_0(x)_\infty} \right)^{1/r}$. Тогда в силу теоремы сравнения Колмогорова [10] функция $\varphi :=$ $:= \varphi_{\lambda,r}$ является функцией сравнения для функции x и, следовательно, $x \in S_\varphi \left(\dfrac{\pi}{\lambda} \right)$. В силу теоремы 1 выполнено неравенство

$$E_0(x)_\infty \le \frac{\|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty}{E_0(\varphi_{\lambda,r})_{L_p(I_{2\pi/\lambda} \setminus \frac{B_1}{\lambda})}} \|x\|_{L_p(I_{2\pi} \setminus B)}.$$

Из этого неравенства и соотношения (21) следует, что

$$\|x\|_{L_p(I_{2\pi} \setminus B)} \ge E_0(\varphi_{\lambda,r})_{L_p(I_{2\pi/\lambda} \setminus \frac{B_1}{\lambda})}.$$

Комбинируя последнее неравенство и равенство (21), а также применяя очевидные соотношения

$$\|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty = \lambda^{-r} \|\varphi_r\|_\infty, \qquad E_0(\varphi_{\lambda,r})_{L_p\left(I_{2\pi/\lambda} \setminus \lambda^{-1} B_1\right)} = \lambda^{-(r+1/p)} E_0(\varphi_r)_{L_p(I_{2\pi}, \setminus B_1)}$$

и учитывая определение λ, получаем

$$\frac{E_0(x)_\infty}{\|x\|^\alpha_{L_p(I_{2\pi} \setminus B)}} \le \frac{\|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty}{E_0(\varphi_{\lambda,r})^\alpha_{L_p(I_{2\pi/\lambda} \setminus \lambda^{-1} B_1)}} = \frac{\|\varphi_r\|_\infty}{E_0(\varphi_r)^\alpha_{L_p(I_{2\pi}, \setminus B_1)}}.$$

Отсюда в силу (20) следует (19).

Теорема 2 доказана.

***Замечание* 2.** При $\beta = 0$ неравенство (19) было доказано в [11], а при $p = \infty$ — в [8].

Применяя неравенство Колмогорова [10]

$$\|x^{(k)}\|_\infty \le \|\varphi_{r-k}\|_\infty \left(\frac{E_0(x)_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty} \right)^{(r-k)/r} \left\| x^{(r)} \right\|^{\frac{k}{r}}_\infty,$$

а затем оценивая $E_0(x)_\infty$ с помощью неравенства (19), получаем следующее неравенство типа Колмогорова – Ремеза.

***Следствие* 2.** *В условиях теоремы* 2 *для любого* $k \in \mathbf{N}$, $k < r$, *имеет место неравенство*

$$\left\| x^{(k)} \right\|_\infty \le \frac{\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{E_0(\varphi_r)^\alpha_{L_p(I_{2\pi} \setminus B_1)}} \|x\|^\alpha_{L_p(I_{2\pi} \setminus B)} \left\| x^{(r)} \right\|^{1-\alpha}_\infty, \tag{22}$$

где $\alpha = \dfrac{r-k}{r+1/p}$, $B_1 := \left[\dfrac{\pi - \beta}{2}, \dfrac{\pi + \beta}{2} \right]$.

Неравенство (22) *является точным и обращается в равенство для той же функции и того же множества, что и неравенство* (19).

***Замечание* 3.** При $\beta = 0$ неравенство (20) было доказано в [12], а при $p = \infty$ — в [8].
Учитывая замечание 1, из неравенств (19) и (20) получаем такое следствие.
***Следствие* 3.** *В условиях теоремы* 2 *выполнены точные на классе* $L^r_\infty(I_{2\pi})$ *неравенства*

$$E_0(x)_\infty \le \|\varphi_r\|_\infty \left(\frac{\|x\|_{L_1(I_{2\pi}\setminus B)}}{\|\varphi_r + \varphi_r(\frac{\beta}{4})\|_{L_1(I_{2\pi}\setminus B_1)}} \right)^{r/(r+1)} \|x^{(r)}\|_\infty^{1/(r+1)},$$

$$\|x^{(k)}\|_\infty \le \|\varphi_{r-k}\|_\infty \left(\frac{\|x\|_{L_1(I_{2\pi}\setminus B)}}{\|\varphi_r + \varphi_r(\frac{\beta}{4})\|_{L_1(I_{2\pi}\setminus B_1)}} \right)^{(r-k)/(r+1)} \|x^{(r)}\|_\infty^{(k+1)(r+1)},$$

а также неравенства

$$E_0(x)_\infty \le \frac{2\|\varphi_r\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty + \varphi_r\left(\frac{\pi-\beta}{2}\right)} \|x\|_{L_\infty(I_{2\pi}\setminus B)},$$

$$\|x^{(k)}\|_\infty \le \|\varphi_{r-k}\|_\infty \left(\frac{2\,\|x\|_{L_\infty(I_{2\pi}\setminus B)}}{\|\varphi_r\|_\infty + \varphi_r\left(\frac{\pi-\beta}{2}\right)} \right)^{(r-k)/r} \|x^{(r)}\|_\infty^{k/r},$$

Последние два неравенства доказаны в [8].

5. Неравенства разных метрик типа Ремеза для тригонометрических полиномов. Напомним, что T_n — пространство тригонометрических полиномов порядка не выше n.

Теорема 3. *Пусть* $p \in [1, \infty]$, $n, m \in \mathbf{N}$, $m \le n$, $\beta \in (0, 2\pi m/n)$. *Если тригонометрический полином* $T \in T_n$ *имеет минимальный период* $2\pi/m$, *то для любого измеримого множества* $B \subset I_{2\pi}$, $\mu B \le \beta$, *имеет место неравенство*

$$E_0(T)_\infty \le \left(\frac{n}{m}\right)^{1/p} \frac{\|T\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)}}{E_0(\sin n(\cdot))_{L_p(I_{2\pi}\setminus B_1^m)}}, \tag{23}$$

где $B_1^m = \bigcup_{k=0}^{n-1} \left\{ B_1^{m,n} + \frac{2k\pi}{n} \right\}$, $B_1^{m,n} = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n} - \frac{\beta}{m}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n} + \frac{\beta}{m}\right) \right]$.

Неравенство (23) *является точным и обращается в равенство для полинома* $T(t) = \sin nt - \alpha_p\big(\sin n(\cdot), B_1^m\big)$ *и множества* $B = B_1^m$, *где* $\alpha_p\big(\sin n(\cdot), B_1^m\big)$ *— константа наилучшего приближения функции* $\sin n(\cdot)$ *в метрике пространства* $L_p(I_{2\pi} \setminus B_1^m)$.

Доказательство. Зафиксируем полином $T \in T_n$ и пусть его минимальный период равен $\frac{2\pi}{m}$. Вследствие однородности (23) можно считать, что

$$E_0(T)_\infty = 1. \tag{24}$$

Тогда полином $\varphi(t) := \sin nt$ является функцией сравнения для полинома $T(t)$ (см., например, доказательство теоремы 8.1.1 из [13]). Ясно, что φ является S-функцией с периодом $\frac{2\pi}{n}$. Таким образом, $T \in S_\varphi\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

В силу (24) существует такое $\alpha \in \mathbf{R}$, что

$$\max_{t\in\mathbf{R}} T(t) = 1 + \alpha, \qquad \min_{t\in\mathbf{R}} T(t) = \alpha - 1.$$

Переходя, если нужно, к полиному $-T$, можем считать согласно (24), что $\max\big\{T(t) : t \in \mathbf{R}\big\} \geq$ ≥ 1. Тогда $\alpha \geq 0$. Для $\tau \in \mathbf{R}$ положим $T_\tau(t) := T(\tau + t)$, $t \in \mathbf{R}$. Выберем $\tau_1, \tau_2 \in \mathbf{R}$ так, чтобы

$$T_{\tau_1}\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \max_{t\in\mathbf{R}} T(t) = 1 + \alpha, \qquad T_{\tau_2}\left(-\frac{\pi}{2n}\right) = \min_{t\in\mathbf{R}} T(t) = \alpha - 1.$$

Поскольку φ является функцией сравнения для T, то

$$(T_{\tau_1}(t))_+ \geq (\varphi(t) + \alpha)_+, \qquad \left|t - \frac{\pi}{2n}\right| \leq \frac{\pi}{n}, \tag{25}$$

и

$$(T_{\tau_2}(t))_- \geq (\varphi(t) + \alpha)_-, \qquad \left|t + \frac{\pi}{2n}\right| \leq \frac{\pi}{n}, \tag{26}$$

где $u_\pm : = \max\{\pm\, u, 0\}$. Пусть $\overline{T}$ — сужение полинома T на $[0, 2\pi/m]$, а $\overline{\varphi}$ — сужение φ на $[0, 2\pi/n]$. Отметим, что из (25), (26) следует соотношение $2\pi/m \geq 2\pi/n$, т. е. $m \leq n$, и неравенство

$$m(\overline{T}_\pm, y) \geq m\big((\overline{\varphi} + \alpha)_\pm, y\big), \quad y \geq 0,$$

где функция $m(f, y)$ определена в (13). Следовательно,

$$m(\overline{T}, y) \geq m(\overline{\varphi} + \alpha, y), \quad y \geq 0.$$

Отсюда непосредственно следует неравенство

$$r(\overline{T}, t) \geq r(\overline{\varphi} + \alpha, t), \quad t \geq 0. \tag{27}$$

Заметим далее, что для любого измеримого по Лебегу множества $B \subset I_{2\pi}$, $\mu B \leq \beta$, имеет место неравенство

$$\int\limits_B |T(t)|^p dt \leq \int\limits_0^\beta r^p(T, t) dt,$$

а так как перестановка сохраняет L_p-норму функции, то

$$\|T\|^p_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)} = \int\limits_{I_{2\pi}} |T(t)|^p dt - \int\limits_B |T(t)|^p dt \geq$$

$$\geq \int\limits_0^{2\pi} r^p(T, t) dt - \int\limits_0^\beta r^p(T, t) dt = \int\limits_\beta^{2\pi} r^p(T, t) dt.$$

Отсюда, учитывая $2\pi/m$-периодичность полинома T и неравенство (27), получаем

$$\|T\|^p_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)} \geq m \int\limits_{\beta/m}^{2\pi/m} r^p(\overline{T}, t) dt \geq$$

$$\geq m \int\limits_{\beta/m}^{2\pi/n} r^p(\overline{\varphi} + \alpha, t) dt = m \int\limits_{I_{2\pi/n}\setminus E^\alpha_{y(\beta)}} |\sin nt + \alpha|^p dt, \tag{28}$$

где

$$E_y^\alpha := \big\{t \in I_{2\pi/n} : |\sin nt + \alpha| > y\big\},$$

а $y = y(\beta)$ выбрано так, что $\mu E^\alpha_{y(\beta)} = \dfrac{\beta}{m}$. Применяя лемму 1, из (28) выводим

$$\|T\|^p_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)} \ge mE_0^p\big(\sin n(\cdot)\big)_{L_p(\frac{2\pi}{n}\setminus B_1^{m,n})} = \frac{m}{n}E_0^p\big(\sin n(\cdot)\big)_{L_p(2\pi\setminus B_1^m)}.$$

Из последнего неравенства в силу (24) следует (23).

Теорема 3 доказана.

Учитывая равенства (11), (12), имеем

$$E_0\big(\sin n(\cdot)\big)_{L_1(2\pi\setminus B_1^m)} = nE_0\big(\sin n(\cdot)\big)_{L_1(\frac{2\pi}{n}\setminus B_1^{m,n})} =$$

$$= n\left\|\sin n(\cdot) + \sin n\left(\frac{\beta}{4m}\right)\right\|_{L_1(\frac{2\pi}{n}\setminus B_1^{m,n}))} = \left\|\sin n(\cdot) + \sin n\left(\frac{\beta}{4m}\right)\right\|_{L_1(I_{2\pi}\setminus B_1^m)}$$

и

$$E_0\left(\sin n(\cdot)\right)_{L_\infty\left(I_{2\pi}\setminus B_1^m\right)} = \frac{1}{2}\left(1 + \sin n\left(\frac{\pi}{2n} - \frac{\beta}{2m}\right)\right) = \cos^2\frac{\beta}{4m}n.$$

Таким образом, получаем такое следствие.

***Следствие* 4.** *В условиях теоремы* 3 *выполнены точные на классе* T_n *неравенства*

$$E_0(T)_\infty \le \frac{n}{m}\,\frac{\|T\|_{L_1(I_{2\pi}\setminus B)}}{\left\|\sin n(\cdot) + \sin n\dfrac{\beta}{4m}\right\|_{L_1(I_{2\pi}\setminus B_1^m)}}$$

и

$$E_0(T)_\infty \le \left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{n\beta}{4m}\right)\|T\|_{L_\infty(I_{2\pi}\setminus B)}\,.$$

Последнее неравенство доказано в [8].

6. Неравенства разных метрик типа Ремеза для периодических полиномиальных сплайнов. Пусть $r, n \in \mathbf{N}$. Напомним, что символом $S_{n,r}$ обозначено пространство 2π-периодических полиномиальных сплайнов порядка r дефекта 1 с узлами в точках $k\pi/n$, $k \in \mathbf{Z}$. Ясно, что $S_{n,r} \subset L^r_\infty(\mathbf{R})$.

Теорема 4. *Пусть* $p \in [1,\infty]$, $r, n, m \in \mathbf{N}$, $m \le n$, $\beta \in (0, 2\pi m/n)$. *Если сплайн* $s \in S_{n,r}$ *имеет минимальный период* $2\pi/m$, *то для любого измеримого множества* $B \subset I_{2\pi}$, $\mu B \le \beta$, *имеет место неравенство*

$$E_0(s)_\infty \le \left(\frac{n}{m}\right)^{1/p}\frac{\|\varphi_{n,r}\|_\infty}{E_0(\varphi_{n,r})_{L_p(I_{2\pi}\setminus B_1^m)}}\|T\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)}, \tag{29}$$

где $B_1^m = \bigcup\limits_{k=0}^{n-1}\left\{B_1^{m,n} + \dfrac{2k\pi}{n}\right\}$, $B_1^{m,n} = \left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{n} - \dfrac{\beta}{m}\right), \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{n} + \dfrac{\beta}{m}\right)\right]$.

Неравенство (29) *является точным и обращается в равенство для сплайна* $s(t) = \varphi_{n,r}(t) - \alpha_p(\varphi, B_1^m)$ *и множества* $B = B_1^m$, *где* $\alpha_p(\varphi_{n,r}, B_1^m)$ — *константа наилучшего приближения сплайна* $\varphi_{n,r}$ *в метрике пространства* $L_p(I_{2\pi} \setminus B_1^m)$.

Доказательство. Зафиксируем сплайн $s \in S_{n,r}$ с минимальным периодом $2\pi/m$. Вследствие однородности (29) можно считать, что

$$E_0(s)_\infty = \|\varphi_{n,r}\|_\infty. \tag{30}$$

Тогда в силу неравенства Тихомирова [14]

$$\left\|s^{(r)}\right\|_\infty \le \frac{E_0(s)_\infty}{\|\varphi_{n,r}\|_\infty} = 1.$$

Следовательно, для сплайна $s \in L^r_\infty(\mathbf{R})$ выполнены условия теоремы сравнения Колмогорова [10]. Согласно этой теореме, функция $\varphi(t) := \varphi_{n,r}(t)$ является функцией сравнения для сплайна s. Ясно, что φ является S-функцией с периодом $2\pi/n$. Таким образом, $s \in S_\varphi\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$.

В силу (30) существует такое $\alpha \in \mathbf{R}$, что

$$\max_{t\in\mathbf{R}} s(t) = \|\varphi_{n,r}\|_\infty + \alpha, \qquad \min_{t\in\mathbf{R}} s(t) = \alpha - \|\varphi_{n,r}\|_\infty.$$

Переходя, если нужно, к сплайну $-s$, можем считать в силу (30), что $\max\{s(t)\colon t \in \mathbf{R}\} \ge \ge \|\varphi_{n,r}\|_\infty$. Тогда $\alpha \ge 0$. Для $\tau \in \mathbf{R}$ положим $s_\tau(t) := s(\tau + t)$, $t \in \mathbf{R}$. Выберем $\tau_1, \tau_2 \in \mathbf{R}$ так, чтобы

$$s_{\tau_1}\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \max_{t\in\mathbf{R}} s(t) = \|\varphi_{n,r}\|_\infty + \alpha, \quad s_{\tau_2}\left(-\frac{\pi}{2n}\right) = \min_{t\in\mathbf{R}} s(t) = \alpha - \|\varphi_{n,r}\|_\infty.$$

Поскольку φ является функцией сравнения для s, то

$$(s_{\tau_1}(t))_+ \ge (\varphi(t) + \alpha)_+, \qquad \left|t - \frac{\pi}{2n}\right| \le \frac{\pi}{n}, \tag{31}$$

и

$$(s_{\tau_2}(t))_- \ge (\varphi(t) + \alpha)_-, \qquad \left|t + \frac{\pi}{2n}\right| \le \frac{\pi}{n}, \tag{32}$$

где $u_\pm := \max\{\pm\, u, 0\}$. Пусть $\overline{s}$ — сужение сплайна s на $[0, 2\pi/m]$, а $\overline{\varphi}$— сужение φ на $[0, 2\pi/n]$. Отметим, что из (31), (32) следуют соотношение $2\pi/m \ge 2\pi/n$, т. е. $m \le n$, и неравенство

$$m(\overline{s}_\pm, y) \ge m\big((\overline{\varphi} + \alpha)_\pm, y\big), \quad y \ge 0,$$

Отсюда, повторяя рассуждения из доказательства теоремы 3, выводим неравенство

$$r(\overline{s}, t) \ge r(\overline{\varphi} + \alpha, t), \quad t \ge 0,$$

а из него получаем

$$\|s\|^p_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)} \ge m \int\limits_{I_{2\pi/n}\setminus E^\alpha_{y(\beta)}} |\varphi_{n,r} + \alpha|^p dt, \tag{33}$$

где

$$E^\alpha_y := \big\{t \in I_{2\pi/n}\colon |\varphi_{n,r}(t) + \alpha| > y\big\},$$

а $y = y(\beta)$ выбрано так, что $\mu E^{\alpha}_{y(\beta)} = \dfrac{\beta}{m}$. Применяя к правой части (33) лемму 1, как и при доказательстве теоремы 3, заключаем, что

$$\|s\|^p_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)} \geq \frac{m}{n} E_0^p\left(\varphi_{n,r}\right)_{L_p\left(2\pi\setminus B_1^m\right)}.$$

Из последнего неравенства в силу (30) следует (29).

Теорема 4 доказана.

Учитывая замечания к лемме 1, как и при доказательстве следствия 4, приходим к такому утверждению.

***Следствие* 5.** *В условиях теоремы* 4 *выполнены точные на классе* $S_{n,r}$ *неравенства*

$$E_0(s)_\infty \leq \frac{n}{m} \frac{\|\varphi_{n,r}\|_\infty}{\left\|\varphi_{n,r}(\cdot) + \varphi_{n,r}\left(\dfrac{\beta}{4m}\right)\right\|_{L_1(I_{2\pi}\setminus B_1^m)}} \|s\|_{L_1(I_{2\pi}\setminus B)}$$

и

$$E_0(s)_\infty \leq \frac{2\|\varphi_{n,r}\|_\infty}{\|\varphi_{n,r}\|_\infty + \varphi_{n,r}\left(\dfrac{\pi}{2n} - \dfrac{\beta}{2m}\right)} \|s\|_{L_\infty(I_{2\pi}\setminus B)}.$$

Последнее неравенство доказано в [8].

Литература

1. *Bojanov B., Naidenov N.* An extension of the Landau – Kolmogorov inequality. Solution of a problem of Erdos // J. Anal. Math. – 1999. – **78**. – P. 263 – 280.
2. *Кофанов В. А.* Точные верхние грани норм функций и их производных на классах функций с заданной функцией сранения // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 7. – С. 969 – 984.
3. *Remes E.* Sur une propriete extremale des polynomes de Tchebychef // Зап. наук.-дослiд. Iн-ту математики й механiки та Харкiв. мат. тов-ства. – Харкiв: Харкiв. держ. ун-т, 1936.– **13**, вип. 1. – С. 93 – 95.
4. *Ganzburg M. I.* On a Remez-type inequality for trigonometric polynomials // J. Approxim. Theory. – 2012. – **164**. – P. 1233 – 1237.
5. *Nursultanov E., Tikhonov S.* A sharp Remez inequality for trigonometric polynomials // Constr. Approxim. – 2013. – **38**. – P. 101 – 132.
6. *Borwein P., Erdelyi T.* Polynomials and polynomial inequalities. – New York: Springer, 1995.
7. *Ganzburg M. I.* Polynomial inequalities on measurable sets and their applications // Constr. Approxim. – 2001. – **17**. – P. 275 – 306.
8. *Кофанов В. А.* Точные неравенства типа Ремеза для дифференцируемых периодических функций, полиномов и сплайнов // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 2. – С. 227 – 240.
9. *Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Лигун А. А.* Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. – Киев: Наук. думка, 1992. – 304 с.
10. *Колмогоров А. Н.* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функции на бесконечном интервале // Избр. труды. Математика, механика.– М.: Наука, 1985.
11. *Babenko V. F., Kofanov V. A., Pichugov S. A.* Inequalities of Kolmogorov type and Some their applications in approximation theory // Rend. Circ. Mat. Palermo. Ser. 2, Suppl. – 1998. – **52**. – P. 223 – 237.
12. *Babenko V. F., Kofanov V. A., Pichugov S. A.* Inequalities for norms of intermediate derivatives of periodic functions and their aplications // East J. Approxim. – 1997. – **3**, № 3. – P. 351 – 376.
13. *Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Неравенства для производных и их приложения. – Киев: Наук. думка, 2003. – 590 с.
14. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. – 1960. – **15**, № 3. – С. 81 – 120.

Получено 07.02.17