УДК 517.956.223

Т. М. Касіренко (Ін-т математики НАН України, Київ),
О. О. Мурач (Ін-т математики НАН України, Київ, Чернігів. нац. пед. ун-т)

ЕЛІПТИЧНІ ЗАДАЧІ З КРАЙОВИМИ УМОВАМИ ВИСОКИХ ПОРЯДКІВ У ПРОСТОРАХ ХЕРМАНДЕРА

In a class of inner product Hörmander spaces, we study a general elliptic problem for which the maximum order of the boundary conditions is not smaller than the order of the elliptic equation. The role of the order of regularity of these spaces is played by an arbitrary radial positive function RO-varying at infinity in the sense of Avakumović. We prove that the operator of the problem under investigation is bounded and Fredholm on the appropriate pairs of the indicated Hörmander spaces. A theorem on isomorphism generated by this operator is proved. For the generalized solutions of this problem, we establish a local *a priori* estimate and prove the theorem on the local regularity of these solutions in Hörmander spaces. As an application, we establish new sufficient conditions of continuity for the given generalized derivatives of the solutions.

В классе гильбертовых пространств Хермандера исследована общая эллиптическая задача, для которой максимум порядков краевых условий больше, чем порядок эллиптического уравнения, или равнен ему. Показателем регулярности для этих пространств является произвольная радиальная положительная функция, RO-меняющаяся на бесконечности по Авакумовичу. Показано, что оператор исследуемой задачи является ограниченным и нетеровым в подходящих парах указанных пространств Хермандера. Доказана теорема об изоморфизме, порожденном этим оператором. Для обобщенных решений этой задачи установлена локальная априорная оценка и доказана теорема об их локальной регулярности в пространствах Хермандера. В качестве приложения получены новые достаточные условия непрерывности заданных обобщенных производных решений.

1. Вступ. Основний результат теорії загальних еліптичних крайових задач в обмежених областях з гладкою межею полягає у тому, що ці задачі є нетеровими у придатних парах функціональних просторів Соболєва або Гельдера (див., наприклад, [1] (§2), [2] (розд. III, §6) і [3 – 5]). Цей результат має різні наслідки, серед яких твердження про підвищення регулярності розв'язків еліптичних задач. Проте, класичні шкали Соболєва і Гельдера є недостатньо тонко градуйованими для низки задач, що виникають в аналізі і теорії диференціальних рівнянь. У цьому зв'язку Л. Хермандер [3] увів широкі класи нормованих функціональних просторів, для яких показником регулярності розподілів є не число, а досить загальна вагова функція, залежна від частотних змінних. Крім того, він [3, 6] навів застосування цих просторів до дослідження характеру розв'язності і регулярності розв'язків лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними. Простори Хермандера і їх різні узагальнення застосовуються в математичному аналізі, теорії диференціальних рівнянь, теорії випадкових процесів (див. [7 – 11]).

В. А. Михайлець і другий автор цієї статті [8, 12 – 18] побудували теорію розв'язності загальних еліптичних систем на гладких многовидах і еліптичних крайових задач у класах гільбертових просторів Хермандера, які отримуються інтерполяцією з функціональним параметром пар гільбертових просторів Соболєва. Показником регулярності для цих просторів є радіальні функції, правильно змінні на нескінченності за Караматою [19] (див. [20, 21]). За допомогою методу інтерполяції з функціональним параметром гільбертових просторів вдалося перенести основні результати „соболєвської" теорії еліптичних рівнянь і задач на зазначені простори Хермандера. Ці результати були доповнені у [22 – 28] для більш широких класів гільбертових просторів Хермандера. Зауважимо, що згаданий метод інтерполяції виявився плідним і в теорії параболічних початково-крайових задач [29, 30].

У побудованій теорії розглянуто винятком еліптичні задачі, в яких порядки крайових умов менші, ніж порядок еліптичного рівняння. Мета даної статті — доповнити цю теорію результатами про характер розв'язності і властивості розв'язків еліптичних задач, у яких порядок принаймні однієї з крайових умов більший або рівний за порядок еліптичного рівняння або рівний йому. Ці задачі будемо досліджувати у класі гільбертових просторів Хермандера, показником регулярності для яких є довільна радіальна функція, RO-змінна на нескінченності за Авакумовичем [31] (див. [20]). Цей клас було виділено у [32, 33] і названо розширеною соболєвською шкалою. Він містить уточнену соболєвську шкалу та складається з усіх гільбертових просторів, інтерполяційних відносно пар гільбертових просторів Соболєва.

Робота складається з 7 пунктів. У п. 2 сформульовано еліптичну крайову задачу, яка досліджується, і розглянуто формально спряжену до неї задачу відносно спеціальної формули Гріна. У п. 3 наведено означення функціональних просторів Хермандера, які утворюють розширену соболєвську шкалу. Пункт 4 містить основні результати роботи про властивості досліджуваної задачі у просторах Хермандера. У п. 5 як застосування основних результатів отримано достатні умови неперервності узагальнених похідних розв'язків досліджуваної задачі, зокрема умови класичності її узагальненого розв'язку. Пункт 6 присвячено інтерполяції з функціональним параметром пар гільбертових просторів та її застосуванням до розширеної соболєвської шкали. Результати роботи доведено у заключному п. 7.

2. Постановка задачі. Нехай Ω — довільна обмежена область у евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Припускаємо, що межа Γ цієї області є нескінченно гладким компактним многовидом вимірності $n-1$, причому C^∞-структура на Γ індукована простором $\mathbb{R}^n$.

В області Ω розглянемо таку крайову задачу:

$$Au = f \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{1}$$

$$B_j u = g_j \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad j = 1, \ldots, q. \tag{2}$$

Тут

$$A := A(x, D) := \sum_{|\mu| \leq 2q} a_\mu(x) D^\mu$$

є лінійним диференціальним оператором на $\overline{\Omega} := \Omega \cup \Gamma$ довільного парного порядку $2q \geq 2$, а кожне

$$B_j := B_j(x, D) := \sum_{|\mu| \leq m_j} b_{j,\mu}(x) D^\mu$$

— крайовим лінійним диференціальним оператором на Γ довільного порядку $m_j \geq 0$. Усі коефіцієнти $a_\mu(x)$ і $b_{j,\mu}(x)$ цих диференціальних операторів є нескінченно гладкими комплекснозначними функціями на $\overline{\Omega}$ і Γ відповідно. Взагалі, у роботі функції та розподіли вважаються комплекснозначними, тому всі розглянуті функціональні простори теж вважаємо комплексними.

У наведених формулах і далі використано такі стандартні позначення: $\mu := (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ — мультиіндекс з невід'ємними цілими компонентами, $|\mu| := \mu_1 + \ldots + \mu_n$, $D^\mu := D_1^{\mu_1} \ldots D_n^{\mu_n}$, де $D_k := i\partial/\partial x_k$ для кожного номера $k \in \{1, \ldots, n\}$, i — уявна одиниця, а $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — довільна точка простору $\mathbb{R}^n$. Також покладемо $D_\nu := i\partial/\partial\nu$, де $\nu(x)$ — орт внутрішньої нормалі до межі Γ у точці $x \in \Gamma$.

Будемо припускати, що крайова задача (1), (2) є еліптичною в області Ω, тобто диференціальний оператор A є правильно еліптичним на $\overline{\Omega}$, а набір $B := (B_1, \ldots, B_q)$ крайових диференціальних операторів задовольняє умову Лопатинського щодо A на Γ (див., наприклад, огляд [1] (п. 1.2) або довідник [2] (розд. III, § 6, пп. 1, 2)).

***Приклад* 1.** Розглянемо крайову задачу, яка складається з диференціального рівняння (1), де диференціальний оператор A є правильно еліптичним на $\overline{\Omega}$, і крайових умов

$$\frac{\partial^{k+j-1}u}{\partial\zeta^{k+j-1}} + \sum_{|\mu|<k+j-1} b_{j,\mu}(x)D^{\mu} = g_j \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad j = 1,\ldots,q.$$

Тут $k \geq 0$ — ціле число, а $\zeta : \Gamma \to \mathbb{R}^n$ — нескінченно гладке поле векторів $\zeta(x)$, недотичних до Γ у точці $x \in \Gamma$. Безпосередньо перевіряється, що ця крайова задача є еліптичною в області Ω. Якщо $0 \leq k \leq q$, то вона є регулярною еліптичною (див., наприклад, [5] (п. 5.2.1, зауваження 4)). Важливий окремий випадок цієї задачі отрима ємо, поклавши $A := \Delta^q$, де Δ — оператор Лапласа, та $\zeta(x) := \nu(x)$ для усіх $x \in \Gamma$.

Далі припускаємо, що

$$m := \max\{m_1,\ldots,m_q\} \geq 2q.$$

Пов'яжемо із задачею (1), (2) лінійне відображення

$$u \mapsto (Au, Bu) = (Au, B_1u,\ldots,B_qu), \quad \text{де} \quad u \in C^{\infty}(\overline{\Omega}). \tag{3}$$

Мета роботи — дослідити властивості продовження за неперервністю цього відображення у придатних парах функціональних просторів Хермандера.

Для опису області значень цього продовження нам потрібна спеціальна формула Гріна [34] (формула (4.1.10))

$$(Au,v)_{\Omega} + \sum_{j=1}^{m-2q+1}(D_{\nu}^{j-1}Au, w_j)_{\Gamma} + \sum_{j=1}^{q}(B_ju,h_j)_{\Gamma} =$$
$$= (u, A^{+}v)_{\Omega} + \sum_{k=1}^{m+1}\left(D_{\nu}^{k-1}u, K_kv + \sum_{j=1}^{m-2q+1} R_{j,k}^{+}w_j + \sum_{j=1}^{q} Q_{j,k}^{+}h_j\right)_{\Gamma},$$

де $u,v \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, $w_1,\ldots,w_{m-2q+1},h_1,\ldots,h_q \in C^{\infty}(\Gamma)$ та через $(\cdot,\cdot)_{\Omega}$ і $(\cdot,\cdot)_{\Gamma}$ позначено відповідно скалярні добутки у гільбертових просторах $L_2(\Omega)$ і $L_2(\Gamma)$ функцій, квадратично інтегровних на Ω і Γ відносно мір Лебега. Тут A^{+} — диференціальний оператор, формально спряжений до A, тобто

$$(A^{+}v)(x) := \sum_{|\mu|\leq 2q} D^{\mu}(\overline{a_{\mu}(x)}v(x)).$$

Окрім того, всі $R_{j,k}^{+}$ і $Q_{j,k}^{+}$ є дотичними диференціальними операторами, формально спряженими відповідно до $R_{j,k}$ і $Q_{j,k}$ відносно $(\cdot,\cdot)_{\Gamma}$, а дотичні лінійні диференціальні оператори $R_{j,k} := R_{j,k}(x,D_{\tau})$ і $Q_{j,k} := Q_{j,k}(x,D_{\tau})$ взято із зображення крайових диференціальних операторів $D_{\nu}^{j-1}A$ і B_j у вигляді

$$D_{\nu}^{j-1}A(x,D) = \sum_{k=1}^{m+1} R_{j,k}(x,D_{\tau})D_{\nu}^{k-1}, \qquad j = 1,\ldots,m-2q+1,$$
$$B_j(x,D) = \sum_{k=1}^{m+1} Q_{j,k}(x,D_{\tau})D_{\nu}^{k-1}, \qquad j = 1,\ldots,q.$$

Зазначимо, що $\operatorname{ord} R_{j,k} \leq 2q + j - k$ і $\operatorname{ord} Q_{j,k} \leq m_j - k + 1$, причому, звісно, $R_{j,k} = 0$ при $k \geq 2q + j + 1$ і $Q_{j,k} = 0$ при $k \geq m_j + 2$. Нарешті, кожне $K_k := K_k(x,D)$ — деякий крайовий лінійний диференціальний оператор на Γ порядку $\operatorname{ord} K_k \leq 2q - k$ з коефіцієнтами класу $C^{\infty}(\overline{\Omega})$.

Спеціальна формула Гріна приводить до такої крайової задачі в області Ω :

$$A^{+}v=\omega \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{4}$$

$$K_k v+\sum_{j=1}^{m-2q+1} R^{+}_{j,k}w_j+\sum_{j=1}^{q} Q^{+}_{j,k}h_j=\theta_k \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad k=1,\ldots,m+1. \tag{5}$$

Ця задача містить окрім невідомої функції v на Ω ще $m-q+1$ додаткову невідому функцію $w_1,\ldots,w_{m-2q+1},h_1,\ldots,h_q$ на межі Γ. Задачу (4), (5) називають формально спряженою до задачі (1), (2) відносно розглянутої спеціальної формули Гріна. Відомо [34] (теорема 4.1.1), що крайова задача (1), (2) еліптична тоді і тільки тоді, коли формально спряжена задача (4), (5) еліптична як крайова задача з додатковими невідомими функціями на межі області.

***Приклад* 2.** Наведемо спеціальну формулу Гріна для еліптичної крайової задачі

$$\Delta u=f \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial\nu^2}=g \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{6}$$

заданої в крузі $\Omega:=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2: x_1^2+x_2^2<1\}$. Зауважимо, що $\Delta u=\partial_\nu^2 u-\partial_\nu u+\partial_\varphi^2 u$ на Γ; тут $\partial_\nu:=\partial/\partial\nu=-\partial/\partial\varrho$ і $\partial_\varphi:=\partial/\partial\varphi$, а (ϱ,φ) — полярні координати. Застосувавши другу класичну формулу Гріна для оператора Лапласа, отримаємо

$$(\Delta u,v)_\Omega+(\Delta u,w)_\Gamma+(\partial_\nu^2 u,h)_\Gamma=$$
$$=(u,\Delta v)_\Omega-(\partial_\nu u,v)_\Gamma+(u,\partial_\nu v)_\Gamma+(\partial_\nu^2 u-\partial_\nu u+\partial_\varphi^2 u,w)_\Gamma+(\partial_\nu^2 u,h)_\Gamma=$$
$$=(u,\Delta v)_\Omega+(u,\partial_\nu v+\partial_\varphi^2 w)_\Gamma+(\partial_\nu u,-v-w)_\Gamma+(\partial_\nu^2 u,w+h)_\Gamma$$

для довільних функцій $u,v\in C^\infty(\overline{\Omega})$ і $w,h\in C^\infty(\Gamma)$. Отже, спеціальна формула Гріна для крайової задачі (6) набирає вигляду

$$(\Delta u,v)_\Omega+(\Delta u,w)_\Gamma+(\partial_\nu^2 u,h)_\Gamma=$$
$$=(u,\Delta v)_\Omega+(u,\partial_\nu v+\partial_\varphi^2 w)_\Gamma+(D_\nu u,-iv-iw)_\Gamma+(D_\nu^2 u,-w-h)_\Gamma.$$

Тому крайова задача

$$\Delta v=\omega \quad \text{в} \quad \Omega,$$
$$\partial_\nu v+\partial_\varphi^2 w=\theta_1, \qquad -iv-iw=\theta_2, \qquad -w-h=\theta_3 \quad \text{на} \quad \Gamma$$

є формально спряженою до задачі (6) відносно цієї формули Гріна. Отримана формально спряжена задача містить дві додаткові невідомі функції w і h на Γ.

3. Простори Хермандера і розширена соболєвська шкала. Еліптичну крайову задачу (1), (2) будемо досліджувати у придатних парах гільбертових просторів Хермандера [3] (п. 2.2), які утворюють розширену соболєвську шкалу, введену в [32, 33]. Нагадаємо означення цих просторів і деякі їхні властивості, потрібні у подальшому.

Для просторів Хермандера, які використовуються у роботі, показником регулярності розподілів є функціональний параметр $\alpha\in\mathrm{RO}$. За означенням клас RO складається з усіх вимірних за Борелем функцій $\alpha\colon[1,\infty)\to(0,\infty)$, для яких існують числа такі $b>1$ і $c\geq1$, що $c^{-1}\leq\alpha(\lambda t)/\alpha(t)\leq c$ для довільних $t\geq1$ і $\lambda\in[1,b]$ (сталі b і c можуть залежати від α). Такі функції називають RO-змінними на нескінченності. Клас RO введений В. Г. Авакумовичем [31] у 1936 р. і достатньо повно вивчений (див., наприклад, [20] (додаток 1) і [21] (пп. 2.0 – 2.2)).

Цей клас допускає простий опис, а саме,

$$\alpha\in\mathrm{RO}\quad\Leftrightarrow\quad\alpha(t)=\exp\left(\beta(t)+\int\limits_1^{t}\frac{\gamma(\tau)}{\tau}\,d\tau\right)\quad\text{для}\quad t\geq 1,$$

де дійсні функції β і γ вимірні за Борелем і обмежені на півосі $[1,\infty)$ (див., наприклад, [20], додаток 1, теорема 1).

Для нас важливою є властивість класу RO: для кожної функції $\alpha\in\mathrm{RO}$ існують такі числа $s_0,s_1\in\mathbb{R},\ s_0\leq s_1$, і $c_0,c_1>0$, що

$$c_0\lambda^{s_0}\leq\frac{\alpha(\lambda t)}{\alpha(t)}\leq c_1\lambda^{s_1}\quad\text{для всіх}\quad t\geq 1,\quad\lambda\geq 1 \tag{7}$$

(див. [20], додаток 1, теорема 2). Покладемо

$$\sigma_0(\alpha):=\sup\bigl\{s_0\in\mathbb{R}:\ \text{виконується ліва нерівність у (7)}\bigr\},$$
$$\sigma_1(\alpha):=\inf\bigl\{s_1\in\mathbb{R}:\ \text{виконується права нерівність у (7)}\bigr\}.$$

Числа $\sigma_0(\alpha)$ і $\sigma_1(\alpha)$ є відповідно нижнім і верхнім індексами Матушевської [35] функції $\alpha\in\mathrm{RO}$ (див. також [21], п. 2.1.2). Звісно, $-\infty<\sigma_0(\alpha)\leq\sigma_1(\alpha)<\infty$.

Наведемо деякі характерні приклади функцій, RO-змінних на нескінченності.

***Приклад* 3.** Розглянемо неперервну функцію $\alpha\colon[1,\infty)\to(0,\infty)$ таку, що

$$\alpha(t):=t^{s}(\ln t)^{r_1}(\ln\ln t)^{r_2}\ldots(\underbrace{\ln\ldots\ln}_{k\ \text{разів}} t)^{r_k}\quad\text{при}\quad t\gg 1.$$

Тут довільно вибрано ціле число $k\geq 1$ і дійсні числа $s,r_1,\ldots,r_k$. Функція α належить класу RO і для неї $\sigma_0(\alpha)=\sigma_1(\alpha)=s$.

Взагалі, класу RO належить будь-яка вимірна функція $\alpha\colon[1,\infty)\to(0,\infty)$, яка обмежена і відокремлена від нуля на кожному компакті і є правильно змінною на нескінченності за Й. Караматою [19]. Остання властивість означає, що $\alpha(\lambda t)/\alpha(t)\to\lambda^{s}$ при $t\to\infty$ для деякого $s\in\mathbb{R}$. Індекси Матушевської такої функції дорівнюють числу s, яке називають порядком змінювання функції на нескінченності. Правильно змінні функції широко застосовуються у математиці (див. [20, 21]).

***Приклад* 4.** Нехай $\theta\in\mathbb{R}$, $\delta>0$ і $r\in(0,1]$. Покладемо

$$\alpha(t):=\begin{cases}t^{\theta+\delta\sin(\ln\ln t)^{r}} & \text{при}\quad t>e,\\ t^{\theta} & \text{при}\quad 1\leq t\leq e.\end{cases}$$

Тоді α належить RO, до того ж $\sigma_0(\alpha)=\theta-\delta$ і $\sigma_1(\alpha)=\theta+\delta$ [36] (приклад 6).

Нехай $\alpha\in\mathrm{RO}$. Дамо означення простору Хермандера H^{α} спочатку на $\mathbb{R}^{n}$, де ціле $n\geq 1$, а потім на Ω і Γ. Цей простір складається з розподілів (узагальнених функцій), які нам зручно трактувати як антилінійні функціонали на відповідному просторі основних функцій.

За означенням лінійний простір $H^{\alpha}(\mathbb{R}^{n})$ складається з усіх повільно зростаючих на $\mathbb{R}^{n}$ розподілів w таких, що їх перетворення Фур'є $\widehat{w}$ локально інтегровне за Лебегом на $\mathbb{R}^{n}$ і задовольняє умову

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n}}\alpha^{2}(\langle\xi\rangle)\,|\widehat{w}(\xi)|^{2}\,d\xi<\infty,$$

де $\langle\xi\rangle:=(1+|\xi|^{2})^{1/2}$ є згладженим модулем вектора $\xi\in\mathbb{R}^{n}$. Цей простір наділений скалярним добутком

$$(w_1, w_2)_{H^\alpha(\mathbb{R}^n)} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \alpha^2(\langle\xi\rangle)\, \widehat{w_1}(\xi)\, \overline{\widehat{w_2}(\xi)}\, d\xi$$

і відповідною нормою

$$\|w\|_{H^\alpha(\mathbb{R}^n)} := (w, w)^{1/2}_{H^\alpha(\mathbb{R}^n)}$$

та є гільбертовим і сепарабельним відносно цієї норми.

Простір $H^\alpha(\mathbb{R}^n)$ — гільбертів ізотропний випадок просторів $\mathcal{B}_{p,k}$, введених і досліджених Л. Хермандером в [3] (пп. 2.2) (див також його монографію [6], п. 10.1). А саме, $H^\alpha(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}_{p,k}$, якщо $p = 2$ і $k(\xi) = \alpha(\langle\xi\rangle)$ при $\xi \in \mathbb{R}^n$. Зауважимо, що у гільбертовому випадку $p = 2$ простори Хермандера збігаються з просторами, введеними Л. Р. Волевичем і Б. П. Панеяхом [37] (§ 2).

Якщо $\alpha(t) \equiv t^s$ для деякого $s \in \mathbb{R}$, то $H^\alpha(\mathbb{R}^n) =: H^{(s)}(\mathbb{R}^n)$ — гільбертів простір Соболєва порядку s. Взагалі,

$$s_0 < \sigma_0(\alpha) \leq \sigma_1(\alpha) < s_1 \;\Rightarrow\; H^{(s_1)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^\alpha(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{(s_0)}(\mathbb{R}^n), \tag{8}$$

до того ж обидва вкладення неперервні й щільні.

Дотримуючись [8, 33], клас функціональних просторів $\{H^\alpha(\mathbb{R}^n) \colon \alpha \in \mathrm{RO}\}$ називаємо розширеною соболєвською шкалою на $\mathbb{R}^n$. Її аналоги для Ω і Γ будуються стандартним чином (див. [35, с. 4, 32, с. 30]). Наведемо відповідні означення; тепер $n \geq 2$.

За означенням, лінійний простір $H^\alpha(\Omega)$ складається зі звужень в область Ω всіх розподілів $w \in H^\alpha(\mathbb{R}^n)$ і наділений нормою

$$\|v\|_{H^\alpha(\Omega)} := \inf\bigl\{\|w\|_{H^\alpha(\mathbb{R}^n)} \colon\ w \in H^\alpha(\mathbb{R}^n),\ w = v \text{ в } \Omega\bigr\},$$

де $v \in H^\alpha(\Omega)$. Простір $H^\alpha(\Omega)$ є гільбертовим і сепарабельним відносно цієї норми, а множина $C^\infty(\overline{\Omega})$ щільна в ньому.

Лінійний простір $H^\alpha(\Gamma)$ складається, коротко кажучи, з усіх розподілів на Γ, які в локальних координатах дають елементи простору $H^\alpha(\mathbb{R}^{n-1})$. Наведемо детальне означення. Довільно виберемо скінченний атлас із C^∞-структури на многовиді Γ, утворений локальними картами $\pi_j \colon \mathbb{R}^{n-1} \leftrightarrow \Gamma_j$, де $j = 1, \ldots, \varkappa$. Тут відкриті множини $\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_\varkappa\}$ складають покриття многовиду Γ. Виберемо також функції $\chi_j \in C^\infty(\Gamma)$, де $j = 1, \ldots, \varkappa$, які утворюють розбиття одиниці на Γ, що задовольняє умову $\operatorname{supp}\chi_j \subset \Gamma_j$.

За означенням лінійний простір $H^\alpha(\Gamma)$ складається з усіх розподілів h на Γ таких, що $(\chi_j h) \circ \pi_j \in H^\alpha(\mathbb{R}^{n-1})$ для усіх $j \in \{1, \ldots, \varkappa\}$. Тут $(\chi_j h) \circ \pi_j$ є зображенням розподілу h у локальній карті π_j. Простір $H^\alpha(\Gamma)$ наділено нормою

$$\|h\|_{H^\alpha(\Gamma)} := \left(\sum_{j=1}^{\varkappa} \|(\chi_j h) \circ \pi_j\|^2_{H^\alpha(\mathbb{R}^{n-1})}\right)^{1/2}.$$

Він гільбертів і сепарабельний відносно цієї норми та з точністю до еквівалентності норм не залежить від зробленого вибору атласу і розбиття одиниці [32, с. 32]. Множина $C^\infty(\Gamma)$ щільна в $H^\alpha(\Gamma)$.

Щойно означені функціональні простори утворюють розширені соболєвські шкали $\{H^\alpha(\Omega) \colon \alpha \in \mathrm{RO}\}$ і $\{H^\alpha(\Gamma) \colon \alpha \in \mathrm{RO}\}$ на Ω і Γ відповідно. Вони містять гільбертові шкали просторів Соболєва: якщо $\alpha(t) \equiv t^s$ для деякого $s \in \mathbb{R}$, то $H^\alpha(\Omega) =: H^{(s)}(\Omega)$ і $H^\alpha(\Gamma) =: H^{(s)}(\Gamma)$ є гільбертовими просторами Соболєва порядку s.

Відмітимо властивість цих шкал, що випливає з [3] (теореми 2.2.2, 2.2.3). Нехай $\alpha, \eta \in \in \mathrm{RO}$ і $\Lambda \in \{\Omega, \Gamma\}$. Функція α/η обмежена в околі нескінченності тоді і тільки тоді, коли $H^{\eta}(\Lambda) \hookrightarrow H^{\alpha}(\Lambda)$. Це вкладення неперервне і щільне. Воно компактне тоді і тільки тоді, коли $\alpha(t)/\eta(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Зокрема, виконуються властивість (8), якщо у ній замінити $\mathbb{R}^n$ на Ω або Γ, при цьому вкладення будуть компактними і щільними.

4. Основні результати. Сформулюємо отримані нами результати про властивості еліптичної крайової задачі (1), (2) у просторах Хермандера H^{α}, розглянутих вище. Для них показник регулярності має вигляд $\alpha(t) \equiv \varphi(t)t^s$, де $\varphi \in \mathrm{RO}$ і $s \in \mathbb{R}$. Щоб не вказувати аргумент t у показнику, будемо використовувати функціональний параметр $\varrho(t) := t$ аргумента $t \geq 1$ й записувати α у вигляді $\varphi\varrho^s$. Якщо $\varphi \in \mathrm{RO}$, то, звісно, $\varphi\varrho^s \in \mathrm{RO}$ та $\sigma_j(\varphi\varrho^s) = \sigma_j(\varphi) + s$ для кожного $j \in \{0, 1\}$.

Позначимо через N лінійний простір усіх розв'язків $u \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ крайової задачі (1), (2) у випадку, коли $f = 0$ в Ω і кожне $g_j = 0$ на Γ. Позначимо також через $N_{\star}$ лінійний простір усіх розв'язків

$$(v, w_1, \ldots, w_{m-2q+1}, h_1, \ldots, h_q) \in C^{\infty}(\overline{\Omega}) \times (C^{\infty}(\Gamma))^{m-q+1}$$

формально спряженої крайової задачі (4), (5) у випадку, коли $\omega = 0$ в Ω і кожне $\theta_k = 0$ на Γ. Оскільки обидві задачі еліптичні в Ω, то простори N і $N_{\star}$ є скінченновимірним [34] (наслідок 4.1.1).

Теорема 1. *Нехай* $\varphi \in \mathrm{RO}$ *і* $\sigma_0(\varphi) > m + 1/2$. *Тоді відображення* (3) *продовжується єдиним чином* (*за неперервністю*) *до обмеженого оператора*

$$(A, B) \colon H^{\varphi}(\Omega) \to H^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} H^{\varphi\varrho^{-m_j-1/2}}(\Gamma) =: \mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega, \Gamma). \tag{9}$$

Цей оператор нетерів. Його ядро дорівнює N, *а область значень складається з усіх векторів* $(f, g_1, \ldots, g_q) \in \mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega, \Gamma)$ *таких, що*

$$\begin{gathered}(f, v)_{\Omega} + \sum_{j=1}^{m-2q+1} (D_{\nu}^{j-1} f, w_j)_{\Gamma} + \sum_{j=1}^{q} (g_j, h_j)_{\Gamma} = 0 \\ \textit{для всіх} \quad (v, w_1, \ldots, w_{m-2q+1}, h_1, \ldots, h_q) \in N_{\star}.\end{gathered} \tag{10}$$

Індекс оператора (9) *дорівнює* $\dim N - \dim N_{\star}$ *та не залежить від* φ.

Як і раніше, у формулі (10) через $(\cdot, \cdot)_{\Omega}$ і $(\cdot, \cdot)_{\Gamma}$ позначено скалярні добутки у гільбертових просторах $L_2(\Omega)$ і $L_2(\Gamma)$ відповідно. Тут, згідно з твердженням 4, наведеним у п. 6, для кожної функції $f \in H^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega)$, де $\sigma_0(\varphi) > m + 1/2$, коректно означено образи

$$D_{\nu}^{j-1} f \in H^{\varphi\varrho^{-2q-j+1/2}}(\Gamma) \subset L_2(\Gamma)$$

відносно крайового оператора D_{ν}^{j-1} порядку $j - 1 \leq m - 2q$.

З огляду на теорему 1 нагадаємо, що лінійний обмежений оператор $T \colon E_1 \to E_2$, де E_1 і E_2 — банахові простори, називають нетеровим, якщо його ядро $\ker T$ і коядро $E_2/T(E_1)$ скінченновимірні. Якщо цей оператор нетерів, то його область значень замкнена у просторі E_2 (див., наприклад, [39], лемма 19.1.1) і для нього означено скінченний індекс

$$\operatorname{ind} T := \dim \ker T - \dim \bigl(E_2/T(E_1)\bigr).$$

Зокрема, для еліптичної крайової задачі з прикладу 2 безпосередньо перевіряється, що $\dim N = = \dim N_\star = 3$, і тому індекс оператора (9) дорівнює нулю.

Зауважимо, що умову $\sigma_0(\varphi) > m + 1/2$ у теоремі 1 не можна відкинути чи послабити. Зокрема, якщо $\varphi(t) \equiv t^s$ для деяких дійсного $s \leq m_j + 1/2$ і цілого $j \in \{1, \ldots, q\}$, то відображення $u \mapsto B_j u$, де $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, не можна продовжити до неперервного лінійного оператора, що діє з простору Соболєва $H^{(s)}(\Omega)$ у лінійний топологічний простір $\mathcal{D}'(\Gamma)$ усіх розподілів на Γ (див., наприклад, [8] зауваження 3.5).

У випадку, коли $N = \{0\}$ і $N_\star = \{0\}$, оператор (9) здійснює ізоморфізм між просторами $H^\varphi(\Omega)$ і $\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega, \Gamma)$. Це випливає з теореми 1 і теореми Банаха про обернений оператор. У загальному випадку оператор (9) породжує ізоморфізм між деякими їхніми підпросторами скінченної ковимірності. Ці підпростори і проектори на них зручно будувати у такий спосіб.

Розглянемо розклад простору $H^\varphi(\Omega)$, де $\sigma_0(\varphi) > 0$, у пряму суму підпросторів

$$H^\varphi(\Omega) = N \dotplus \bigl\{u \in H^\varphi(\Omega) : (u, w)_\Omega = 0 \,\text{для всіх}\, w \in N\bigr\}. \tag{11}$$

Ця рівність правильна, оскільки вона є звуженням розкладу простору $L_2(\Omega)$ в ортогональну суму підпростору N і його доповнення. Щодо розкладу простору $\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega, \Gamma)$ скористаємося таким результатом.

Лема 1. *Існує скінченновимірний простір $G \subset C^\infty(\overline{\Omega}) \times \bigl(C^\infty(\Gamma)\bigr)^q$ такий, що для кожного $\varphi \in \mathrm{RO}$ з $\sigma_0(\varphi) > m + 1/2$ правильним є розклад простору $\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega, \Gamma)$ у пряму суму підпросторів*

$$\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega, \Gamma) = G \dotplus \bigl\{(f, g_1, \ldots, g_q) \in \mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega, \Gamma) : \textit{виконується}\ (10)\bigr\}, \tag{12}$$

при цьому $\dim G = \dim N_\star$.

Позначимо через P і Q косі проектори відповідно просторів $H^\varphi(\Omega)$ і $\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega, \Gamma)$ на другі доданки в сумах (11) і (12) паралельно першим доданкам. Звісно, ці проектори не залежать від φ.

Теорема 2. *Нехай $\varphi \in \mathrm{RO}$ і $\sigma_0(\varphi) > m + 1/2$. Тоді звуження відображення* (9) *на підпростір $P(H^\varphi(\Omega))$ є ізоморфізмом*

$$(A, B) :\ P\bigl(H^\varphi(\Omega)\bigr) \leftrightarrow Q\bigl(\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega, \Gamma)\bigr). \tag{13}$$

Дослідимо властивості узагальнених розв'язків еліптичної крайової задачі (1), (2) у просторах Хермандера. Нагадаємо означення таких розв'язків. Покладемо

$$H^{m+1/2+}(\Omega) := \bigcup_{\substack{\alpha \in \mathrm{RO}:\\ \sigma_0(\alpha) > m+1/2}} H^\alpha(\Omega) = \bigcup_{s > m+1/2} H^{(s)}(\Omega).$$

Тут остання рівність правильна з огляду на властивість (8). Згідно з теоремою 1, для кожної функції $u \in H^{m+1/2+}(\Omega)$ коректно означено вектор

$$(f, g) := (f, g_1, \ldots, g_q) := (A, B)u \in L_2(\Omega) \times \bigl(L_2(\Gamma)\bigr)^q.$$

Функцію u називаємо (сильним) узагальненим розв'язком крайової задачі (1), (2) з правою частиною (f, g).

Теорема 3. *Нехай параметри* $\varphi \in \mathrm{RO}$ *і* $\lambda \in \mathbb{R}$ *задовольняють нерівності* $\sigma_0(\varphi) > m+1/2$ *і* $0 < \lambda < \sigma_0(\varphi) - m + 1/2$, *а функції* $\chi, \eta \in C^\infty(\overline{\Omega})$ — *умову* $\eta = 1$ *в околі* $\operatorname{supp}\chi$. *Тоді існує таке число* $c = c(\varphi, \lambda, \chi, \eta) > 0$, *що для довільної функції* $u \in H^\varphi(\Omega)$ *виконується оцінка*

$$\|\chi u\|_{H^\varphi(\Omega)} \leq c\,\Big(\big\|\eta(A,B)u\big\|_{\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)} + \|\eta u\|_{H^{\varphi\varrho^{-\lambda}}(\Omega)}\Big). \tag{14}$$

Тут c *не залежить від* u.

Зауваження **1.** У випадку, коли $\chi = \eta = 1$, нерівність (14) є глобальною апріорною оцінкою узагальненого розв'язку u еліптичної крайової задачі (1), (2). У цьому випадку умовою $\lambda < \sigma_0(\varphi) - m + 1/2$ можна знехтувати. Взагалі, нерівність (14) є локальною апріорною оцінкою розв'язку u. Справді, для кожної непорожньої відкритої (у топології $\overline{\Omega}$) підмножини множини $\overline{\Omega}$ можна вибрати функції χ, η так, щоб вони задовольняли умову теореми 3 і їх носії лежали в цій підмножині. Якщо $0 < \lambda \leq 1$, то в нерівності (14) замість $\eta(A,B)u$ можна взяти $\chi(A,B)u$

Дослідимо регулярність узагальнених розв'язків еліптичної крайової задачі (1), (2). Нехай V — відкрита множина в $\mathbb{R}^n$, яка має непорожній перетин з областю Ω. Покладемо $\Omega_0 := \Omega \cap V$ і $\Gamma_0 := \Gamma \cap V$ (можливий випадок, коли $\Gamma_0 = \varnothing$). Для довільного параметра $\alpha \in \mathrm{RO}$ введемо локальні аналоги просторів $H^\alpha(\Omega)$ і $H^\alpha(\Gamma)$.

За означенням лінійний простір $H^\alpha_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0)$ складається з усіх розподілів $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ таких, що $\chi u \in H^\alpha(\Omega)$ для довільної функції $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ із $\operatorname{supp}\chi \subset \Omega_0 \cup \Gamma_0$. Тут, як звичайно, $\mathcal{D}'(\Omega)$ позначає лінійний топологічний простір усіх розподілів в Ω. Топологія у лінійному просторі $H^\alpha_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0)$ задається напівнормами $u \mapsto \|\chi u\|_{H^\alpha(\Omega)}$, де χ — довільна функція з означення цього простору. Аналогічно, лінійний простір $H^\alpha_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0)$ складається з усіх розподілів $h \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ таких, що $\chi h \in H^\alpha(\Gamma)$ для довільної функції $\chi \in C^\infty(\Gamma)$ із $\operatorname{supp}\chi \subset \Gamma_0$. Топологія у лінійному просторі $H^\alpha_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0)$ задається напівнормами $h \mapsto \|\chi h\|_{H^\alpha(\Gamma)}$, де χ — довільна функція з означення цього простору.

Теорема 4. *Нехай функція* $u \in H^{m+1/2+}(\Omega)$ *є узагальненим розв'язком еліптичної крайової задачі* (1), (2), *праві частини якої задовольняють умову*

$$(f,g) \in H^{\varphi\varrho^{-2q}}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} H^{\varphi\varrho^{-m_j-1/2}}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0) =: \mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0) \tag{15}$$

для деякого функціонального параметра $\varphi \in \mathrm{RO}$ *такого, що* $\sigma_0(\varphi) > m + 1/2$. *Тоді розв'язок* u *належить* $H^\varphi_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0)$.

Відмітимо важливі окремі випадки цієї теореми. Якщо $\Omega_0 = \Omega$ і $\Gamma_0 = \Gamma$, то локальні простори $H^\varphi_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0)$ і $\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0)$ збігаються з просторами $H^\varphi(\Omega)$ і $\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)$ відповідно. Тому теорема 4 стверджує, що регулярність узагальненого розв'язку u підвищується глобально, тобто в усій області Ω аж до її межі Γ. Якщо $\Gamma_0 = \varnothing$ і $\Omega_0 = \Omega$, то, згідно з цією теоремою, регулярність розв'язку u підвищується в околах усіх внутрішніх точок замкненої області $\overline{\Omega}$.

Теореми 1 – 4 або їхні версії відомі у випадку соболєвських просторів, коли $\varphi(\cdot) \equiv 1$ (див., наприклад, [40] (розд. 5), [41] (розд. 4, 7), [34] (розд. 4), [42] (розд. 7) та [1] (§ 2). Відмітимо, що, мабуть, уперше Б. Р. Вайнберг і В. В. Грушин [43] (§ 4, формула (76)) звернули увагу на те, що в описі (10) області значень оператора (A,B) потрібно використовувати вираз вигляду

$$\sum_{j=1}^{m-2q+1} (D_\nu^{j-1} f, w_j)_\Gamma.$$

Теореми 1 – 4 і лему 1 доведемо у п. 7. Там же обґрунтуємо і зауваження 1.

5. Застосування основних результатів. Як застосування просторів Хермандера наведемо достатні умови неперервності узагальнених похідних (заданого порядку) розв'язків еліптичної крайової задачі (1), (2). Ці умови виводяться з теореми 4 і теореми вкладення Хермандера [3] (теорема 2.2.7). Останню для розширеної соболєвської шкали можна сформулювати так: нехай $0 \leq p \in \mathbb{Z}$ і $\varphi \in \mathrm{RO}$, тоді

$$\int\limits_1^\infty t^{2p+n-1}\varphi^{-2}(t)\,dt < \infty \;\Leftrightarrow\; H^{\varphi}(\Omega) \subset C^p(\overline{\Omega}), \tag{16}$$

до того ж вкладення неперервне; див. [23] (лема 2) або [8] (твердження 2.6(vi)). Зауважимо, що у соболєвському випадку, коли $\varphi(t) \equiv t^s$ для деякого $s \in \mathbb{R}$, властивість (16) є теоремою вкладення Соболєва:

$$s > p + n/2 \;\Leftrightarrow\; H^{(s)}(\Omega) \hookrightarrow C^p(\overline{\Omega}).$$

Теорема 5. *Нехай ціле число* $p \geq 0$. *Припустимо, що функція* $u \in H^{m+1/2+}(\Omega)$ *є узагальненим розв'язком еліптичної крайової задачі* (1), (2), *праві частини якої задовольняють умову* (15) *для деякого функціонального параметра* $\varphi \in \mathrm{RO}$ *такого, що* $\sigma_0(\varphi) > m + 1/2$ *і*

$$\int\limits_1^\infty t^{2p+n-1}\varphi^{-2}(t)dt < \infty. \tag{17}$$

Тоді u *належить* $C^p(\Omega_0 \cup \Gamma_0)$.

Зауваження 2. Умова (17) є точною. А саме, нехай $0 \leq p \in \mathbb{Z}$, $\varphi \in \mathrm{RO}$ і $\sigma_0(\varphi) > m+1/2$, тоді з імплікації

$$\Big(u \in H^{m+1/2+}(\Omega) \quad \text{і} \quad (A,B)u \in \mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0)\Big) \;\Rightarrow\; u \in C^p(\Omega_0 \cup \Gamma_0) \tag{18}$$

випливає, що φ задовольняє умову (17).

Сформулюємо достатню умову, за якою узагальнений розв'язок u крайової задачі (1), (2) є класичним, тобто $u \in C^{2q}(\Omega) \cap C^m(U_\sigma \cup \Gamma)$ для деякого числа $\sigma > 0$, де $U_\sigma := \{x \in \Omega\colon \mathrm{dist}(x,\Gamma) < \sigma\}$. Якщо розв'язок u цієї задачі класичний, то її ліві частини обчислюються за допомогою класичних похідних і є неперервними функціями на Ω і Γ відповідно.

Теорема 6. *Нехай функція* $u \in H^{m+1/2+}(\Omega)$ *є узагальненим розв'язком еліптичної крайової задачі* (1), (2), *де*

$$f \in H^{\varphi_1\varrho^{-2q}}_{\mathrm{loc}}(\Omega,\varnothing) \cap H^{\varphi_2\varrho^{-2q}}_{\mathrm{loc}}(U_\sigma,\Gamma), \tag{19}$$

$$g_j \in H^{\varphi_2\varrho^{-m_j-1/2}}(\Gamma) \quad \text{при кожному} \quad j \in \{1,\ldots,q\} \tag{20}$$

для деякого числа $\sigma > 0$ *і параметрів* $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{RO}$, *які задовольняють умови* $\sigma_0(\varphi_1) > m+1/2$, $\sigma_0(\varphi_2) > m + 1/2$ *і*

$$\int\limits_1^\infty t^{2q+n-1}\varphi_1^{-2}(t)dt < \infty, \tag{21}$$

$$\int\limits_1^\infty t^{2m+n-1}\varphi_2^{-2}(t)dt < \infty. \tag{22}$$

Тоді розв'язок u *є класичним.*

Теореми 5, 6 і зауваження 2 будуть обґрунтовані у п. 7.

6. Інтерполяція з функціональним параметром. Простори Хермандера, які утворюють розширену соболєвську шкалу, можна отримати інтерполяцією з функціональним параметром пар гільбертових просторів Соболєва. Цей факт відіграватиме ключову роль у доведенні теореми 1. Метод інтерполяції з функціональним параметром гільбертових просторів уперше з'явився у статті К. Фояша і Ж.-Л. Ліонса [44, с. 278]. Він є природним узагальненням класичного інтерполяційного методу Ж.-Л. Ліонса [4] (розд. 1, п. 5) і С.-Г. Крейна [2, с. 253] на випадок, коли параметром інтерполяції є не число, а досить загальна функція. Наведемо означення інтерполяції з функціональним параметром пар гільбертових просторів та її властивості, потрібні у подальшому. Будемо дотримуватися монографії [8] (пп. 1.1). При цьому достатньо обмежитися випадком сепарабельних гільбертових просторів.

Нехай задано таку впорядковану пару $X := [X_0, X_1]$ сепарабельних комплексних гільбертових просторів X_0 і X_1, що X_1 є щільним лінійним многовидом у просторі X_0 та існує таке число $c > 0$, що $\|w\|_{X_0} \leq c\|w\|_{X_1}$ для довільного $w \in X_1$ (коротше кажучи, виконується неперервне і щільне вкладення $X_1 \hookrightarrow X_0$). Пару X називаємо припустимою. Для неї існує самоспряжений додатно визначений оператор J у гільбертовому просторі X_0 з областю визначення X_1 такий, що $\|Jw\|_{X_0} = \|w\|_{X_1}$ для довільного $w \in X_1$. Оператор J називається породжуючим для X і однозначно визначається за парою X.

Позначимо через $\mathcal{B}$ множину всіх вимірних за Борелем функцій $\psi\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$, які відокремлені від нуля на кожній множині $[r,\infty)$ і обмежені на кожному відрізку $[a,b]$, де $r > 0$ і $0 < a < b < \infty$. Нехай $\psi \in \mathcal{B}$. У просторі X_0 за допомогою спектральної теореми означений, як функція від J, оператор $\psi(J)$, взагалі необмежений. Позначимо через $[X_0, X_1]_\psi$ або, коротше, X_ψ область визначення оператора $\psi(J)$, наділену скалярним добутком

$$(w_1, w_2)_{X_\psi} := \big(\psi(J)w_1, \psi(J)w_2\big)_{X_0}$$

і відповідною нормою $\|w\|_{X_\psi} = (w,w)_{X_\psi}^{1/2}$. Простір X_ψ гільбертів і сепарабельний, до того ж виконується неперервне і щільне вкладення $X_\psi \hookrightarrow X_0$.

Функцію $\psi \in \mathcal{B}$ називаємо інтерполяційним параметром, якщо для довільних припустимих пар $X = [X_0, X_1]$ і $Y = [Y_0, Y_1]$ гільбертових просторів і для будь-якого лінійного відображення T, заданого на X_0, виконується така умова: якщо при кожному $j \in \{0,1\}$ звуження відображення T на простір X_j є обмеженим оператором $T\colon X_j \to Y_j$, то і звуження відображення T на простір X_ψ є обмеженим оператором $T\colon X_\psi \to Y_\psi$. У цьому випадку говоримо, що простір X_ψ отримано інтерполяцією з функціональним параметром ψ пари X.

Функція $\psi \in \mathcal{B}$ є інтерполяційним параметром тоді і тільки тоді, коли вона псевдовгнута в околі нескінченності, тобто еквівалентна там деякій угнутій додатній функції. Цей факт випливає з теореми Ж. Петре [45] про опис усіх інтерполяційних функцій додатного порядку.

Сформулюємо зазначену інтерполяційну властивість розширеної соболєвської шкали.

Твердження 1. *Нехай задано функцію $\alpha \in \mathrm{RO}$ і дійсні числа s_0, s_1 такі, що $s_0 < \sigma_0(\alpha)$ і $s_1 > \sigma_1(\alpha)$. Покладемо*

$$\psi(t) = \begin{cases} t^{-s_0/(s_1-s_0)}\, \alpha\left(t^{1/(s_1-s_0)}\right) & \text{при} \quad t \geq 1, \\ \alpha(1) & \text{при} \quad 0 < t < 1. \end{cases} \tag{23}$$

Тоді функція $\psi \in \mathcal{B}$ є інтерполяційним параметром і виконується така рівність просторів разом з еквівалентністю норм у них:

$$\left[H^{(s_0)}(\Lambda), H^{(s_1)}(\Lambda)\right]_{\psi} = H^{\alpha}(\Lambda),$$

де $\Lambda \in \{\mathbb{R}^n, \Omega, \Gamma\}$. *Якщо* $\Lambda = \mathbb{R}^n$, *то буде рівність норм у цих просторах.*

Це твердження доведено в [8] (теореми 2.19 і 2.22) для $G \in \{\mathbb{R}^n, \Gamma\}$ і в [38] (теорема 5.1) для $G = \Omega$.

Зауважимо, що розширена соболєвська шкала замкнена відносно інтерполяції з функціональним параметром [8] (теорема 2.18) і збігається (з точністю до еквівалентності норм) із класом усіх гільбертових просторів, інтерполяційних для пар гільбертових просторів Соболєва [8] (теорема 2.24). Остання властивість випливає з теореми В. І. Овчинникова [46] (пп. 11.4) про опис усіх гільбертових просторів, інтерполяційних для заданої пари гільбертових просторів. Нагадаємо, що властивість гільбертового простору H бути інтерполяційним для припустимої пари $X = [X_0, X_1]$ означає таке: виконується неперервне вкладення $X_1 \hookrightarrow H \hookrightarrow X_0$ і будь-який лінійний оператор, обмеженим на кожному з просторів X_0 і X_1, також є обмеженим на H.

Сформулюємо дві загальні властивості інтерполяції [8] (теореми 1.7, 1.5), які будуть використані у доведеннях.

Твердження 2. *Нехай задано дві припустимі пари* $X = [X_0, X_1]$ *і* $Y = [Y_0, Y_1]$ *гільбертових просторів. Нехай, окрім того, на* X_0 *задано лінійне відображення* T *таке, що його звуження на простори* X_j, *де* $j = 0, 1$, *є обмеженими і нетеровими операторами* $T\colon X_j \to Y_j$, *які мають спільне ядро і однаковий індекс. Тоді для довільного інтерполяційного параметра* $\psi \in \mathcal{B}$ *обмежений оператор* $T\colon X_\psi \to Y_\psi$ *нетерів з тим же ядром і індексом, а його область значень дорівнює* $Y_\psi \cap T(X_0)$.

Твердження 3. *Нехай задано скінченне число припустимих пар* $[X_0^{(j)}, X_1^{(j)}]$ *гільбертових просторів, де* $j = 1, \ldots, q$. *Тоді для довільної функції* $\psi \in \mathcal{B}$ *справедливою є рівність просторів разом із рівністю норм у них*:

$$\left[\bigoplus_{j=1}^{q} X_0^{(j)}, \bigoplus_{j=1}^{q} X_1^{(j)}\right]_{\psi} = \bigoplus_{j=1}^{q} \left[X_0^{(j)},\, X_1^{(j)}\right]_{\psi}.$$

Лінійні диференціальні оператори з гладкими коефіцієнтами є обмеженими на парах придатних просторів Хермандера. А саме, правильним є такий результат.

Твердження 4. (i) *Нехай* L *є лінійний диференціальний вираз порядку* $l \geq 0$ *на* $\overline{\Omega}$ *з коефіцієнтами класу* $C^\infty(\overline{\Omega})$. *Тоді відображення* $u \mapsto Lu$, *де* $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, *продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого лінійного оператора*

$$L\colon H^{\alpha}(\Omega) \to H^{\alpha\varrho^{-l}}(\Omega)$$

для кожного параметра $\alpha \in \mathrm{RO}$.

(ii) *Нехай* K — *крайовий лінійний диференціальний вираз порядку* $k \geq 0$ *на межі* Γ *з коефіцієнтами класу* $C^\infty(\Gamma)$. *Тоді відображення* $u \mapsto Ku$, *де* $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, *продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого лінійного оператора*

$$K\colon H^{\alpha}(\Omega) \to H^{\alpha\varrho^{-k-1/2}}(\Gamma)$$

для кожного параметра $\alpha \in \mathrm{RO}$ *такого, що* $\sigma_0(\alpha) > k + 1/2$.

У випадку просторів Соболєва, коли $\alpha(t) \equiv t^s$, твердження 4 є відомим. Звідси випадок довільного $\alpha \in \mathrm{RO}$ виводиться за допомогою інтерполяції з функціональним параметром на підставі твердження 1.

7. Доведення основних результатів. Доведемо теореми 1 – 6, лему 1 та обґрунтуємо зауваження 1 і 2.

***Доведення теореми* 1.** У соболєвському випадку, коли $\varphi = \varrho^s$ і дійсне $s > m + 1/2$, ця теорема є відомою за винятком вказаного зв'язку скінченновимірного простору $N_\star$ з формально спряженою задачею (4), (5). У такому вигляді теорема 1 міститься у результаті, доведеному в монографії [41] (теорема 4.1.3). У повному обсязі, але за додаткового припущення $s \in \mathbb{Z}$, теорема 1 міститься у результаті, встановленому в монографії [34] (наслідок 4.1.1). Покажемо, що і для дробових s ця теорема правильна у повному обсязі.

Згідно з теоремою 4.1.3 [41], відображення (3) продовжується за неперервністю до обмеженого і нетерового оператора

$$(A,B)\colon H^{s,(m+1)}(\Omega) \to H^{s-2q,(m+1-2q)}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} H^{(s-m_j-1/2)}(\Gamma) =: \mathcal{Q}^{s-2q}(\Omega,\Gamma) \qquad (24)$$

для довільного $s \in \mathbb{R}$. Тут $H^{s,(r)}(\Omega)$, $s \in \mathbb{R}$ і $1 \leq r \in \mathbb{Z}$, — модифікований за Ройтбергом гільбертів простір Соболєва [41] (пп. 2.1). Зокрема, якщо $s \geq 0$ і $s \notin \{1/2, \ldots, r - 1/2\}$, то $H^{s,(r)}(\Omega)$ є, за означенням, поповненням простору $C^\infty(\overline{\Omega})$ за нормою

$$\|u\|_{H^{s,(r)}(\Omega)} := \left(\|u\|^2_{H^{(s)}(\Omega)} + \sum_{k=1}^{r} \big\|(D_\nu^{k-1}u)\!\restriction\!\Gamma\big\|^2_{H^{(s-k+1/2)}(\Gamma)} \right)^{1/2}.$$

Зазначимо, що виконується неперервне вкладення $H^{s+\delta,(r)}(\Omega) \hookrightarrow H^{s,(r)}(\Omega)$ при $\delta > 0$. Окрім того, якщо $s > r - 1/2$, то простори $H^{s,(r)}(\Omega)$ і $H^{(s)}(\Omega)$ рівні як поповнення $C^\infty(\overline{\Omega})$ за еквівалентними нормами. Тому оператор (9), де $\varphi = \varrho^s$, і оператор (24) рівні при $s > r - 1/2$.

Згідно з теоремою 4.1.3 [41], ядро оператора (24) збігається з N, а область значень складається з усіх векторів $(f, g_1, \ldots, g_q) \in \mathcal{Q}^{s-2q}(\Omega,\Gamma)$ таких, що задовольняють умову (10), у якій замість $N_\star$ фігурує деякий скінченновимірний простір, що лежить в $C^\infty(\overline{\Omega}) \times \big(C^\infty(\Gamma)\big)^{m-q+1}$ і не залежить від s. Звідси безпосередньо випливає рівність

$$(A,B)\big(H^{s_2,(m+1)}(\Omega)\big) = \mathcal{Q}^{s_2-2q}(\Omega,\Gamma) \cap (A,B)\big(H^{s_1,(m+1)}(\Omega)\big) \quad \text{при} \quad s_1 < s_2.$$

Зокрема,

$$(A,B)\big(H^{(s)}(\Omega)\big) = \mathcal{Q}^{s-2q}(\Omega,\Gamma) \cap (A,B)\big(H^{m,(m+1)}(\Omega)\big) \quad \text{при} \quad m + 1/2 < s \in \mathbb{R}. \qquad (25)$$

Згідно з теоремою 4.1.4 [34], простір $(A,B)\big(H^{m,(m+1)}(\Omega)\big)$ складається з усіх векторів $(f, g_1, \ldots$ $\ldots, g_q) \in \mathcal{Q}^{m-2q}(\Omega,\Gamma)$, які задовольняють умову (10), де $(\cdot,\cdot)_\Gamma$ також є продовженням за неперервністю скалярного добутку в $L_2(\Gamma)$. Тому для кожного дійсного $s > m + 1/2$ область значень $(A,B)\big(H^{(s)}(\Omega)\big)$ оператора (9), де $\varphi = \varrho^s$, є такою, як стверджується у теоремі 1. Отже, у соболєвському випадку цю теорему обґрунтовано.

У загальному випадку доведемо її за допомогою інтерполяції з функціональним параметром пар деяких просторів Соболєва. За умовою $\varphi \in \mathrm{RO}$ та $\sigma_0(\varphi) > m + 1/2$. Виберемо такі дійсні числа l_0 і l_1, що $m + 1/2 < l_0 < \sigma_0(\varphi)$ і $\sigma_1(\varphi) < l_1$. Відображення (3) продовжується за неперервністю до обмежених і нетерових операторів

$$(A,B)\colon H^{(l_i)}(\Omega) \to H^{(l_i-2q)}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} H^{(l_i-m_j-1/2)}(\Gamma) =: \mathcal{H}^{(l_i-2q)}(\Omega,\Gamma), \quad i \in \{0,1\}, \qquad (26)$$

які діють у соболєвських просторах. Ці оператори мають спільне ядро N і однаковий індекс, який дорівнює $\dim N - \dim N_{\star}$. Окрім того,

$$(A,B)\bigl(H^{(l_i)}(\Omega)\bigr) = \bigl\{(f,g) \in \mathcal{H}^{(l_i-2q)}(\Omega,\Gamma) : \text{виконується (10)}\bigr\}. \tag{27}$$

Означимо функцію $\psi \in \mathcal{B}$ за формулою (23), у якій покладемо $\alpha := \varphi$. Ця функція є інтерполяційним параметром згідно з твердженням 1. Тому на підставі твердження 2 з обмеженості та нетеровості обох операторів (26) випливає обмеженість і нетеровість оператора

$$(A,B)\colon \bigl[H^{(l_0)}(\Omega), H^{(l_1)}(\Omega)\bigr]_{\psi} \to \bigl[\mathcal{H}^{(l_0-2q)}(\Omega,\Gamma), \mathcal{H}^{(l_1-2q)}(\Omega,\Gamma)\bigr]_{\psi}. \tag{28}$$

Він є звуженням оператора (26) з $i = 0$. Покажемо, що (28) — це оператор (9) із теореми 1.

На підставі тверджень 1 і 3 маємо такі рівності просторів разом з еквівалентністю норм у них:

$$\Bigl[H^{(l_0)}(\Omega), H^{(l_1)}(\Omega)\Bigr]_{\psi} = H^{\varphi}(\Omega),$$

$$\Bigl[\mathcal{H}^{(l_0-2q)}(\Omega,\Gamma), \mathcal{H}^{(l_1-2q)}(\Omega,\Gamma)\Bigr]_{\psi} = \Bigl[H^{(l_0-2q)}(\Omega), H^{(l_1-2q)}(\Omega)\Bigr]_{\psi} \oplus$$
$$\oplus \bigoplus_{j=1}^{q} \Bigl[H^{(l_0-m_j-1/2)}(\Gamma), H^{(l_1-m_j-1/2)}(\Gamma)\Bigr]_{\psi} = \mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma).$$

Тому обмежений і нетерів оператор (28) діє в парі просторів (9). Оскільки цей оператор є продовженням за неперервністю відображення (3), то він є оператором (9). На підставі твердження 2 ядро цього оператора та його індекс збігаються зі спільним ядром N і однаковим індексом $\dim N - \dim N_{\star}$ операторів (26). Окрім того, область значень оператора (9) дорівнює

$$(A,B)\bigl(H^{\varphi}(\Omega)\bigr) = \mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma) \cap (A,B)\bigl(H^{(l_0)}(\Omega)\bigr) =$$
$$= \bigl\{(f,g) \in \mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma) : \text{виконується (10)}\bigr\}.$$

Тут ми використали рівність (27) та вкладення

$$\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma) \hookrightarrow \mathcal{H}^{(l_0-2q)}(\Omega,\Gamma),$$

яке випливає з властивості (8), оскільки $l_0 < \sigma_0(\varphi)$. Таким чином, доведено всі властивості оператора (9), сформульовані в теоремі 1.

Теорему 1 доведено.

***Доведення леми* 1.** Скористаємося обмеженим нетеровим оператором (24) для $s := m$. Згідно з теоремою 4.1.4 [34], вимірність коядра цього оператора дорівнює $\dim N_{\star}$. Лінійний многовид $C^{\infty}(\overline{\Omega}) \times \bigl(C^{\infty}(\Gamma)\bigr)^{q}$ є щільним у просторі $\mathcal{Q}^{m-2q}(\Omega,\Gamma)$. Тому на підставі леми 2.1 [47] існує скінченновимірний простір $G \subset C^{\infty}(\overline{\Omega}) \times \bigl(C^{\infty}(\Gamma)\bigr)^{q}$ такий, що

$$\mathcal{Q}^{m-2q}(\Omega,\Gamma) = G \dotplus (A,B)\bigl(H^{m,(m+1)}(\Omega)\bigr). \tag{29}$$

Звідси випливає, що $\dim G = \dim N_{\star}$.

Нехай число s задовольняє умову $m + 1/2 < s < \sigma_0(\varphi)$. Тоді виконуються неперервні вкладення

$$\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma) \hookrightarrow \mathcal{H}^{(s-2q)}(\Omega,\Gamma) = \mathcal{Q}^{s-2q}(\Omega,\Gamma) \hookrightarrow \mathcal{Q}^{m-2q}(\Omega,\Gamma)$$

на підставі (8) і того, що простори $H^{s-2q,(m+1-2q)}(\Omega)$ і $H^{(s-2q)}(\Omega)$ рівні з точністю до еквівалентності норм при $s-2q>m+1-2q-1/2$, як це зазначалося у доведенні теореми 1. Окрім того, $G\subset\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)$. Тому з рівності (29) випливає формула

$$\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)=G\dotplus\big((A,B)\big(H^{m,(m+1)}(\Omega)\big)\cap\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)\big). \tag{30}$$

Згідно з теоремою 4.1.4 [34], область значень $(A,B)(H^{m,(m+1)}(\Omega)$ оператора (24), де $s=m$, складається з усіх векторів $(f,g_1,\ldots,g_q)\in\mathcal{Q}^{m-2q}(\Omega,\Gamma)$, які задовольняють умову (10). Тому другий доданок у сумі (30) складається з усіх векторів $(f,g_1,\ldots,g_q)\in\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)$, які задовольняють (10). Отже, (30) перетворюється на рівність (12). У ній, згідно з наведеними міркуваннями, простір G не залежить від s.

Лему 1 доведено.

***Доведення теореми* 2.** Згідно з теоремою 1, N — ядро, а $Q\big(\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)\big)$ — область значень оператора (9). Тому звуження відображення (9) на простір $P\big(H^{\varphi}(\Omega)\big)$ є обмеженим лінійним бієктивним оператором. Отже, він є ізоморфізмом (13) за теоремою Банаха про обернений оператор.

Теорему 2 доведено.

***Доведення теореми* 3.** У випадку, коли $\chi=\eta=1$, ця теорема є наслідком скінченновимірності ядра і замкнености області значень оператора (9), доведених у теоремі 1, та компактності вкладення $H^{\varphi\varrho^{-\lambda}}(\Omega)\hookrightarrow H^{\varphi}(\Omega)$. Це стверджує лема Пітре [48] (лема 3). У цьому випадку λ — довільне додатне число. Таким чином, існує таке число $\tilde{c}=\tilde{c}(\varphi,\lambda)>0$, що для довільної функції $v\in H^{\varphi}(\Omega)$ виконується глобальна апріорна оцінка

$$\|v\|_{H^{\varphi}(\Omega)}\leq\tilde{c}\,\Big(\big\|(A,B)v\big\|_{\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)}+\|v\|_{H^{\varphi\varrho^{-\lambda}}(\Omega)}\Big). \tag{31}$$

Виведемо з цієї оцінки теорему 3 для $\lambda=1$. Зауважимо спочатку, що нерівність $\lambda<\sigma_0(\varphi)-m+1/2$, вказана в умові цієї теореми, виконується для $\lambda=1$. Довільно виберемо функцію $u\in H^{\varphi}(\Omega)$. Нехай функції $\chi,\eta\in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ такі, як в умові теореми 3. Узявши $v:=\chi u\in H^{\varphi}(\Omega)$ і $\lambda:=1$ в оцінці (31), запишемо

$$\|\chi u\|_{H^{\varphi}(\Omega)}\leq\tilde{c}\,\Big(\big\|(A,B)(\chi u)\big\|_{\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)}+\|\chi u\|_{H^{\varphi\varrho^{-1}}(\Omega)}\Big). \tag{32}$$

Переставивши оператор множення на функцію χ з диференціальними операторами A і $B_1,\ldots$ $\ldots,B_q$, отримаємо рівність

$$(A,B)(\chi u)=(A,B)(\chi\eta u)=\chi(A,B)(\eta u)+(A',B')(\eta u)=\chi(A,B)u+(A',B')(\eta u).$$

Тут A' — деякий лінійний диференціальний оператор на $\overline{\Omega}$ порядку $\operatorname{ord}A'\leq 2q-1$, а $B':=$ $:=(B'_1,\ldots,B'_q)$ — набір деяких крайових лінійних диференціальних операторів на Γ, порядки яких задовольняють умову $\operatorname{ord}B'_j\leq m_j-1$ для кожного $j\in\{1,\ldots,q\}$. При цьому всі коефіцієнти операторів A' і B'_j належать до $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ і $C^{\infty}(\Gamma)$ відповідно. Таким чином,

$$(A,B)(\chi u)=\chi(A,B)u+(A',B')(\eta u). \tag{33}$$

Згідно з твердженням 4, виконується нерівність

$$\|(A',B')(\eta u)\|_{\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)}\leq c_1\|\eta u\|_{H^{\varphi\varrho^{-1}}(\Omega)}. \tag{34}$$

Тут і далі у доведенні через $c_1, \ldots, c_7$ позначено деякі додатні числа, що не залежать від u.

На підставі формул (32) – (34) отримаємо нерівності

$$\|\chi u\|_{H^{\varphi}(\Omega)} \leq \tilde{c}\,\Big(\big\|\chi(A,B)u\big\|_{\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)} + \big\|(A',B')(\eta u)\big\|_{\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)} + \|\chi u\|_{H^{\varphi\varrho^{-1}}(\Omega)}\Big) \leq$$
$$\leq \tilde{c}\,\|\chi(A,B)u\|_{\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)} + \tilde{c}\,c_1\|\eta u\|_{H^{\varphi\varrho^{-1}}(\Omega)} + \tilde{c}\,\|\chi u\|_{H^{\varphi\varrho^{-1}}(\Omega)}.$$

Тут за твердженням 4

$$\|\chi u\|_{H^{\varphi\varrho^{-1}}(\Omega)} = \|\chi\eta u\|_{H^{\varphi\varrho^{-1}}(\Omega)} \leq c_2\|\eta u\|_{H^{\varphi\varrho^{-1}}(\Omega)}.$$

Отже,

$$\|\chi u\|_{H^{\varphi}(\Omega)} \leq c_3\,\Big(\big\|\chi(A,B)u\big\|_{\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)} + \|\eta u\|_{H^{\varphi\varrho^{-1}}(\Omega)}\Big). \tag{35}$$

З цієї нерівності випливає оцінка (14), оскільки

$$\|\chi(A,B)u\|_{\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)} = \|\chi\eta(A,B)u\|_{\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)} \leq c_4\|\eta(A,B)u\|_{\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)}$$

на підставі твердження 4. Теорему 3 доведено у випадку, коли $\lambda = 1$. Звісно, вона є правильною і у випадку, коли $0 < \lambda < 1$.

Доведемо тепер цю теорему у випадку, коли

$$1 < \lambda < \sigma_0(\varphi) - m + 1/2. \tag{36}$$

Для кожного дійсного числа $l \geq 1$ позначимо через $\mathcal{P}_l$ висновок теореми 3 у випадку, коли $\lambda = l$. А саме, $\mathcal{P}_l$ позначає таке твердження: для довільних функцій $\varphi \in \mathrm{RO}$ і $\chi, \eta \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, які задовольняють умови $\sigma_0(\varphi) > m + 1/2$, $l < \sigma_0(\varphi) - m + 1/2$ і $\eta = 1$ в околі $\operatorname{supp}\chi$, існує таке число $c = c(\varphi, l, \chi, \eta) > 0$, що для довільної функції $u \in H^{\varphi}(\Omega)$ виконується нерівність (14) з $\lambda = l$. Істинність твердження $\mathcal{P}_1$ доведено вище. Довільно виберемо дійсні числа $l \geq 1$ і $\delta \in (0, 1]$. Доведемо, що $\mathcal{P}_l \Rightarrow \mathcal{P}_{l+\delta}$.

Припустимо, що твердження $\mathcal{P}_l$ є істинним. Нехай функції $\varphi \in \mathrm{RO}$ і $\chi, \eta \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ задовольняють умови $\sigma_0(\varphi) > m + 1/2$, $l + \delta < \sigma_0(\varphi) - m + 1/2$ і $\eta = 1$ в околі $\operatorname{supp}\chi$. Тоді знайдеться функція $\eta_1 \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ така, що $\eta_1 = 1$ в околі $\operatorname{supp}\chi$ і $\eta = 1$ в околі $\operatorname{supp}\eta_1$. За припущенням існує таке число $c_5 > 0$, що для довільної функції $u \in H^{\varphi}(\Omega)$ виконується оцінка

$$\|\chi u\|_{H^{\varphi}(\Omega)} \leq c_5\,\Big(\big\|\eta_1(A,B)u\big\|_{\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)} + \|\eta_1 u\|_{H^{\varphi\varrho^{-l}}(\Omega)}\Big). \tag{37}$$

Оскільки $\sigma_0(\varphi\varrho^{-l-\delta+1}) > m + 1/2$, то на підставі твердження $\mathcal{P}_1$ маємо оцінку

$$\|\eta_1 u\|_{H^{\varphi\varrho^{-l}}(\Omega)} \leq \|\eta_1 u\|_{H^{\varphi\varrho^{-l-\delta+1}}(\Omega)} \leq$$
$$\leq c_6\,\Big(\big\|\eta(A,B)u\big\|_{\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-l-\delta+1-2q}}(\Omega,\Gamma)} + \|\eta u\|_{H^{\varphi\varrho^{-l-\delta}}(\Omega)}\Big). \tag{38}$$

Окрім того,

$$\big\|\eta_1(A,B)u\big\|_{\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)} = \big\|\eta_1\eta(A,B)u\big\|_{\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)} \leq c_7\big\|\eta(A,B)u\big\|_{\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)}. \tag{39}$$

На підставі оцінок (37) – (39) записуємо

$$\|\chi u\|_{H^{\varphi}(\Omega)} \leq c_5c_7\big\|\eta(A,B)u\big\|_{\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)} + c_5c_6\,\Big(\big\|\eta(A,B)u\big\|_{\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)} + \|\eta u\|_{H^{\varphi\varrho^{-l-\delta}}(\Omega)}\Big),$$

тобто отримали нерівність (14) з $\lambda = l + \delta$. Імплікацію $\mathcal{P}_l \Rightarrow \mathcal{P}_{l+\delta}$ обґрунтовано.

Тепер можемо довести теорему 3 у випадку (36). За доведеним правильним є ланцюжок імплікацій

$$\mathcal{P}_1 \Rightarrow \mathcal{P}_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \mathcal{P}_{[\lambda]} \Rightarrow \mathcal{P}_\lambda,$$

де твердження $\mathcal{P}_1$ істинне, а $\mathcal{P}_\lambda$ є висновком теореми 3 у досліджуваному випадку (як звичайно, $[\lambda]$ — ціла частина числа λ). Тому цей висновок також є істинним.

Теорему 3 доведено.

У зауваженні 1 потребують обґрунтування друге і останнє речення. Друге речення обґрунтоване у першому абзаці доведення цієї теореми, а останнє речення є безпосереднім наслідком оцінки (35).

***Доведення теореми* 4.** Спочатку обґрунтуємо цю теорему у випадку, коли $\Omega_0 = \Omega$ і $\Gamma_0 = \Gamma$. За умовою $u \in H^{(s)}(\Omega)$ для деякого дійсного числа s такого, що $m + 1/2 < s < \sigma_0(\varphi)$, і $(f, g) = (A, B)u \in \mathcal{H}^{\varphi\rho^{-2q}}(\Omega, \Gamma)$. Тому

$$(f, g) \in \mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega, \Gamma) \cap (A, B)\big(H^{(s)}(\Omega)\big) = (A, B)\big(H^{\varphi}(\Omega)\big).$$

Тут рівність є правильною на підставі теореми 1. Отже, поряд з умовою $(A, B)u = (f, g)$ виконується рівність $(A, B)v = (f, g)$ для деякого $v \in H^{\varphi}(\Omega)$. Тому $(A, B)(u - v) = 0$, що за теоремою 1обумовлює включення $w := u - v \in N \subset C^{\infty}(\overline{\Omega})$. Звідси $u = v + w \in H^{\varphi}(\Omega)$. У досліджуваному випадку теорему 4 доведено.

Доведемо її в загальному випадку. Міркування проведемо за схемою, наведеною в [28, с. 308]. Довільно виберемо відкриту множину $V_1 \subset \mathbb{R}^n$ таку, що $\overline{V_1} \subset V$ і $\Omega \cap V_1 \neq \varnothing$, та покладемо $\Omega_1 := \Omega \cap V_1$ і $\Gamma_1 := \Gamma \cap V_1$. Доведемо, що u належить $H^{\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_1, \Gamma_1)$.

Нехай функції $\chi, \eta \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ такі, що їх носії лежать в $\Omega_0 \cup \Gamma_0$, $\chi = 1$ в околі $\Omega_1 \cup \Gamma_1$ та $\eta = 1$ на $\operatorname{supp} \chi$. За умовою $u \in H^{(s)}(\Omega)$ для деякого $s \in \mathbb{R}$ такого, що $m + 1/2 < s < \sigma_0(\varphi)$, і $(A, B)u = (f, g) \in \mathcal{H}^{\varphi\rho^{-2q}}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0)$. Тому

$$(A, B)(\chi u) = \eta(A, B)(\chi u) = \eta(f, g) - \eta(A, B)\big((1 - \chi)u\big).$$

Використовуючи проектор $P_\star$ з теореми 2, записуємо $(A, B)(\chi u) = P_\star\big(\eta(f, g)\big) + F$, де

$$F := (1 - P_\star)\big(\eta(f, g)\big) - \eta(A, B)\big((1 - \chi)u\big).$$

Оскільки $P_\star\big(\eta(f, g)\big)$ належить $P_\star\big(\mathcal{H}^{\varphi\rho^{-2q}}(\Omega, \Gamma)\big)$, то

$$F = (A, B)(\chi u) - P_\star\big(\eta(f, g)\big) \in P_\star\big(\mathcal{H}^{\varrho^{s-2q}}(\Omega, \Gamma)\big).$$

За теоремою 2 існують функції $u_1 \in H^{\varphi}(\Omega)$ і $u_2 \in H^{(s)}(\Omega)$ такі, що $(A, B)u_1 = P_\star\big(\eta(f, g)\big)$ і $(A, B)u_2 = F$. Тоді $(A, B)(\chi u - u_1 - u_2) = 0$, звідки

$$w := \chi u - u_1 - u_2 \in N \subset C^{\infty}(\overline{\Omega})$$

на підставі теореми 1. Зазначимо, що F належить $\mathcal{H}^{\varrho^{l-2q}}_{\mathrm{loc}}(\Omega_1, \Gamma_1)$ для кожного дійсного числа $l > \sigma_1(\varphi)$, оскільки $(1 - P_\star)\big(\eta(f, g)\big) \in N_\star$ і $\eta(A, B)\big((1 - \chi)u\big) = 0$ на $\Omega_1 \cup \Gamma_1$. Тому

$$u_2 \in H^{\varrho^{l}}_{\mathrm{loc}}(\Omega_1, \Gamma_1) \subset H^{\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_1, \Gamma_1)$$

згідно з теоремою про локальне підвищення регулярності розв'язків еліптичних крайових задач у просторах Соболєва (див., наприклад, [41], теорема 7.2.1). Таким чином,

$$\chi u = u_1 + u_2 + w \in H^{\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_1, \Gamma_1).$$

Отже, $\zeta u = \zeta\chi u$ належить $H^{\varphi}(\Omega)$ для довільної функції $\zeta \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, яка задовольняє умову $\operatorname{supp}\zeta \subset \Omega_1 \cup \Gamma_1$, тобто u належить $H^{\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_1, \Gamma_1)$. Тепер u належить $H^{\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0)$ згідно із зробленим вибором множини V_1.

Теорему 4 доведено.

***Доведення теореми* 5.** Довільно виберемо точку $x \in \Omega_0 \cup \Gamma_0$ і функцію $\chi \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ таку, що $\operatorname{supp}\chi \subset \Omega_0 \cup \Gamma_0$ і $\chi = 1$ у деякому околі $V(x)$ точки x. З теореми 4, умови (17) і еквівалентності (16) випливає включення $\chi u \in H^{\varphi}(\Omega) \subset C^{p}(\overline{\Omega})$. Тому $u \in C^{p}(V(x))$. Звідси, з урахуванням довільності вибору точки x, робимо висновок, що u належить $C^{p}(\Omega_0 \cup \Gamma_0)$.

Теорему 5 доведено.

Обґрунтуємо зауваження 2. Нехай $0 \leq p \in \mathbb{Z}$, $\varphi \in \mathrm{RO}$ і $\sigma_0(\varphi) > m + 1/2$. Припустимо, що імплікація (18) істинна. Нехай V — деяка відкрита куля така, що $\overline{V} \subset \Omega_0$. Довільно виберемо функцію $v \in H^{\varphi}(V)$. Згідно з означенням простору $H^{\varphi}(V)$ виконується рівність $v = u \restriction V$ для деякого $u \in H^{\varphi}(\Omega)$. Оскільки $(A, B)u$ належить $\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega, \Gamma)$, то на підставі (18) маємо включення $u \in C^{p}(\Omega_0 \cup \Gamma_0)$. Звідси $v \in C^{p}(\overline{V})$. Таким чином, $H^{\varphi}(V) \subset C^{p}(\overline{V})$, що обумовлює за собою умову (17) на підставі (16). Зауваження 2 обґрунтовано.

***Доведення теореми* 6.** Включення $u \in C^{2q}(\Omega)$ є наслідком умов (19) і (21) на підставі теореми 5, у якій покладаємо $p := 2q$, $\varphi := \varphi_1$, $\Omega_0 := \Omega$ і $\Gamma_0 := \varnothing$. Включення $u \in C^{m}(U_{\sigma} \cup \Gamma)$ є наслідком умов (19), (20) і (22) на підставі тієї ж теореми, у якій беремо $\Omega_0 := U_{\sigma}$ і $\Gamma_0 := \Gamma$. Таким чином, розв'язок u є класичним.

Теорему 6 доведено.

Література

1. *Agranovich M. S.* Elliptic boundary problems // Encycl. Math. Sci. Vol. 79. Part. Different. Equat., IX. – Berlin: Springer, 1997. – P. 1 – 144.
2. *Функциональный* анализ Под общ. ред. С. Г. Крейна. – М.: Наука, 1972. – 544 с.
3. *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. – М.: Мир, 1965. – 380 с.
4. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э..* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – 372 с.
5. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. – М.: Мир, 1980. – 664 с.
6. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. – М.: Мир, 1986. – Т. 2. – 456 с.
7. *Jacob N.* Pseudodifferential operators and Markov processes: In 3 vols. – London: Imperial College Press, 2001, 2002, 2005.
8. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Hörmander spaces, interpolation, and elliptic problems. – Berlin; Boston: De Gruyter, 2014. – xii+297 p. (Видання російською доступне як arXiv:1106.3214.)
9. *Nicola F., Rodino L.* Global pseudodifferential calculas on Euclidean spaces. – Basel: Birkhäuser, 2010. – x+306 p.
10. *Paneah B.* The oblique derivative problem. The Poincaré problem. – Berlin: Wiley-VCH, 2000. – 348 p.
11. *Triebel H.* The structure of functions. – Basel: Birkhäuser, 2001. – xii+425 p.
12. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Elliptic operators in a refined scale of functional spaces // Ukr. Math. J. – 2005. – **57**, № 5. – P. 817 – 825.
13. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Refined scales of spaces and elliptic boundary-value problems. II // Ukr. Math. J. – 2006. – **58**, № 3. – P. 398 – 417.
14. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Refined scales of spaces and elliptic boundary-value problems. III // Ukr. Math. J. – 2007. – **59**, № 5. – P. 744 – 765.
15. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Regular elliptic boundary-value problem for homogeneous equation in two-sided refined scale of spaces // Ukr. Math. J. – 2006. – **58**, № 11. – P. 1748 – 1767.
16. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* An elliptic boundary-value problem in a two-sided refined scale of spaces // Ukr. Math. J. – 2008. – **60**, № 4. – P. 574 – 597.

17. *Murach A. A.* Douglis-Nirenberg elliptic systems in the refined scale of spaces on a closed manifold // Methods Funct. Anal. and Top. – 2008. – **14**, № 2. – P. 142 – 158.
18. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* The refined Sobolev scale, interolation, and elliptic problems // Banach J. Math. Anal. – 2012. – **6**, № 2. – P. 211 – 281.
19. *Karamata J.* Sur certains "Tauberian theorems" de M. M. Hardy et Littlewood // Mathematica (Cluj). – 1930. – **3**. – P. 33 – 48.
20. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 144 с.
21. *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular variation. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989. – 512 p.
22. *Murach A. A.* On elliptic systems in Hörmander spaces // Ukr. Math. J. – 2009. – **61**, № 3. – P. 467 – 477.
23. *Zinchenko T. N., Murach A. A.* Douglis – Nirenberg elliptic systems in Hörmander spaces // Ukr. Math. J. – 2013. – **64**, № 11. – P. 1672 – 1687.
24. *Zinchenko T. N., Murach A. A.* Petrovskii elliptic systems in the extended Sobolev scale // J. Math. Sci. – 2014. – **196**, № 5. – P. 721 – 732.
25. *Anop A. V., Murach A. A.* Parameter-elliptic problems and interpolation with a function parameter // Methods Funct. Anal. and Top. – 2014. — **20**, № 2. – P. 103 – 116.
26. *Anop A. V., Murach A. A.* Regular elliptic boundary-value problems in the extended Sobolev scale // Ukr. Math. J. – 2014. – **66**, № 7. – P. 969 – 985.
27. *Chepurukhina I. S., Murach A. A.* Elliptic boundary-value problems in the sense of Lawruk on Sobolev and Hörmander spaces // Ukr. Math. J. – 2015. – **67**, № 5. – P. 764 – 784. –
28. *Anop A. V., Kasirenko T. M.* Elliptic boundary-value problems in Hörmander spaces // Methods Funct. Anal. and Top. – 2016. – **22**, № 4. – P. 295 – 310.
29. *Los V., Mikhailets V. A., Murach A. A.* An isomorphism theorem for parabolic problems in Hӥmander spaces and its applications // Communs Pure and Appl. Anal. – 2017. – **16**, № 1. – P. 69 – 97.
30. *Los V., Murach A.* Isomorphism theorems for some parabolic initial-boundary value problems in Hӥmander spaces // Open Math. – 2017. – **15**. – P. 57 – 76.
31. *Avakumović V. G.* O jednom O-inverznom stavu // Rad Jugoslovenske Akad. Znan. Umjet. – 1936. – **254**. – P. 167 – 186.
32. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Об эллиптических операторах на замкнутом многообразии // Доп. НАН України. – 2009. – № 3. – С. 13 – 19.
33. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Extended Sobolev scale and elliptic operators // Ukr. Math. J. – 2013. – **65**, № 3. – P. 435 – 447.
34. *Kozlov V. A., Maz'ya V. G., Rossmann J.* Elliptic boundary value problems in domains with point singularities. – Providence: Amer. Math. Soc., 1997. – 414 p.
35. *Matuszewska W.* On a generalization of regularly increasing functions // Stud. Math. – 1964. – **24**. – P. 271 – 279.
36. *Чепурухіна І. С.* Еліптичні крайові задачі за Б. Лавруком у розширеній соболєвській шкалі // Диференціальні рівняння і суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. – **12**, № 2. С. 338 – 374.
37. *Волевич Л. Р., Панеях Б. П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения // Успехи мат. наук. – 1965. – **20**, № 1. – С. 3 – 74.
38. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Interpolation Hilbert spaces between Sobolev spaces // Results Math. – 2015. – **67**, № 1. – P. 135 – 152.
39. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. – М.: Мир, 1987. – Т. 3. – 696 с.
40. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. I. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 206 с.
41. *Roitberg Ya. A.* Elliptic boundary value problems in the spaces of distributions. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996. – xii+415 p.
42. *Eskin G.* Lectures on linear partial differential equations. – Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2011. – 410 p.
43. *Вайнберг Б. Р., Грушин В. В.* О равномерно неэллиптических задачах. II // Мат. сб. – 1967. – **73(115)**, № 4. – С. 126 – 154.
44. *Foiaş C., Lions J.-L.* Sur certains théorèmes d'interpolation // Acta Sci. Math. Szeged. – 1961. – **22**, № 3-4. – P. 269 – 282.
45. *Peetre J.* On interpolation functions. II // Acta Sci. Math. (Szeged). – 1968. – **29**, № 1-2. – P. 91 – 92.
46. *Ovchinnikov V. I.* The methods of orbits in interpolation theory // Math. Repts. – London: Harwood Acad. Publ., 1984. – **13**. – P. 349 – 515.
47. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Основные положения о дефектных числах, корневых векторах и индексах линейных операторов // Успехи мат. наук. – 1957. – **12**, № 2. – С. 43 – 118.
48. *Peetre J.* Another approach to elliptic boundary problems // Communs Pure and Appl. Math. – 1961. – **14**, № 4. – P. 711 – 731.

Одержано 00.00.00