УДК 517.53

Дз. В. Луківська, А. Я. Христіянин (Львів. нац. ун-т ім. І.Франка)

ПРО РАЦІОНАЛЬНО ЛОКСОДРОМНІ ГОЛОМОРФНІ ФУНКЦІЇ

We consider a functional equation of the form $f(qz) = R(z)f(z)$, where $R(z)$ is a rational function, $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $q \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $|q| < 1$. Holomorphic solutions of this equation are obtained. These solutions can be regarded as generalizations of p-loxodromic functions.

Рассмотрено функциональное уравнение $f(qz) = R(z)f(z)$, где $R(z)$ — рациональная функция, $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $q \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $|q| < 1$. Найдены голоморфные решения этого уравнения. Эти решения являются некоторыми обобщениями p-локсодромических функций.

Вступ. Позначимо $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Розглянемо рівняння

$$f(qz) = p(z)f(z), \quad z \in \mathbb{C}^*, \tag{1}$$

де $p(z)$ — деяка функція, $q \in \mathbb{C}^*$, $|q| < 1$. У випадку $p(z) \equiv \mathrm{const}$ розв'язками рівняння (1) є p-локсодромні функції, тобто мероморфні функції f, визначені в $\mathbb{C}^*$, для яких виконується $f(qz) = pf(z)$, $z \in \mathbb{C}^*$ [5]. Множину p-локсодромних функцій із мультиплікатором q позначатимемо через $\mathcal{L}_{qp}$. Зокрема, якщо $p(z) \equiv 1$, то ми отримуємо класичні локсодромні функції. Вони вивчалися у монографіях О. Раузенбергера [14], Ж. Валірона [17] та І. Ельгуарша [3]. В останні роки до тематики локсодромних функцій та їх узагальнень неодноразово звертався А. Кондратюк та його учні [4, 6 – 10, 12, 13]. Ці функції мають досить широкий спектр застосувань, з деякими з них можна ознайомитися у роботах [2, 15].

Дану роботу присвячено пошуку голоморфних в $\mathbb{C}^*$ розв'язків рівняння (1) у випадку, коли $p(z)$ є раціональною функцією.

Прості випадки Спочатку розглянемо функціональне рівняння

$$f(qz) = \frac{a}{z^m} f(z), \qquad z \in \mathbb{C}^*, \quad m \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Знайдемо голоморфні в $\mathbb{C}^*$ розв'язки рівняння (2).

Означення [5, 11, 16]. *Функція, що визначається рівністю*

$$P(z) = (1-z)\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n z)\left(1-\frac{q^n}{z}\right),$$

називається первинною функцією Шотткі – Кляйна.

Цю функцію досліджували Ф. Кляйн [11] та Ф. Шотткі [16] у другій половині XIX — на початку XX ст. (див. також [1]). Ця функція голоморфна в $\mathbb{C}^*$ і має нулі у точках $\{q^n\}$, $n \in \mathbb{Z}$. Первинна функція Шотткі – Кляйна має таку властивість [3, с. 94]:

$$P(qz) = -z^{-1}P(z). \tag{3}$$

Спочатку знайдемо мероморфні в $\mathbb{C}^*$ розв'язки рівняння (2).

Теорема 1. *Мероморфна в $\mathbb{C}^*$ функція $f(z) = P^m\big((-1)^m z\big)g(z)$, де $g \in \mathcal{L}_{qa}$, задовольняє рівняння* (2).

Доведення. Застосовуючи рівність (3) і a-локсодромність функції g, отримуємо

$$f(qz) = P^m(q(-1)^m z)g(qz) = \left(-\frac{1}{(-1)^m z} P((-1)^m z)\right)^m ag(z) =$$

$$= \frac{1}{z^m} P^m\big((-1)^m z\big) ag(z) = \frac{a}{z^m} f(z).$$

Теорема 2. *Кожен мероморфний у* $\mathbb{C}^*$ *розв'язок рівняння* (2) *має вигляд* $f(z) = P^m\big((-1)^m z\big)g(z)$, *де* $g \in \mathcal{L}_{qa}$.

Доведення. Нехай f — мероморфний розв'язок (2). Очевидно,

$$f(z) = \frac{f(z)}{P^m((-1)^m z)} P^m\big((-1)^m z\big) = g(z)P^m((-1)^m z),$$

де $g(z) = \dfrac{f(z)}{P^m((-1)^m z)}$. Тоді

$$f(qz) = g(qz)P^m(q(-1)^m z) = g(qz)\left(-\frac{1}{(-1)^m z} P\big((-1)^m z\big)\right)^m = z^{-m} P^m\big((-1)^m z\big) g(qz).$$

З іншого боку, з огляду на (2)

$$f(qz) = az^{-m} P^m((-1)^m z) g(z).$$

Порівнюючи праві частини цих рівностей, отримуємо $g(qz) = ag(z)$ для всіх $z \neq q^n$, $n \in \mathbb{Z}$. Цього достатньо щоб зробити висновок, що g є a-локсодромною.

Теорему 2 доведено.

Повернемося до питання знаходження голоморфних розв'язків рівняння (2). Обмежимося спочатку випадком $m \in \mathbb{N}$.

Теорема 3. *Голоморфна в* $\mathbb{C}^*$ *функція* $f(z) = Cz^\nu \prod_{j=1}^m P\left(\dfrac{z}{c_j}\right)$, *де* $\nu \in \mathbb{Z}$, $c_1, c_2, \ldots, c_m$ — *комплексні числа, не обов'язково різні, такі, що* $\prod_{j=1}^m c_j = (-1)^m a q^{-\nu}$, *а* C — *стала, задовольняє рівняння* (2).

Доведення. Використовуючи формулу (3), одержуємо

$$f(qz) = Cq^\nu z^\nu \prod_{j=1}^m P\left(\frac{qz}{c_j}\right) = Cq^\nu z^\nu \prod_{j=1}^m \left(-\frac{c_j}{z} P\left(\frac{z}{c_j}\right)\right) =$$

$$= Cq^\nu z^\nu \frac{(-1)^m c_1 c_2 \ldots c_m}{z^m} \prod_{j=1}^m P\left(\frac{z}{c_j}\right) = \frac{a}{z^m} C z^\nu \prod_{j=1}^m P\left(\frac{z}{c_j}\right) = \frac{a}{z^m} f(z).$$

Щоб описати всі голоморфні в $\mathbb{C}^*$ розв'язки (2), нам знадобиться наступна властивість p-локсодромних функцій.

Лема А ([5]). *Нехай функція* f *належить* $\mathcal{L}_{qp}$. *Якщо* f *голоморфна в* $\mathbb{C}^*$, *то* $f(z) \equiv 0$ *або існує* $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ *таке, що* $p = q^k$ *і* $f(z) = Cz^k$, *де* C — *стала. Навпаки, голоморфна в* $\mathbb{C}^*$ *функція вигляду* $f(z) = Cz^k$, *де* $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, C — *стала, належить до* $\mathcal{L}_{qp}$.

Тепер можемо довести таку теорему.

Теорема 4. *Кожен голоморфний у $\mathbb{C}^*$ розв'язок рівняння* (2) *можна зобразити у вигляді* $f(z) = Cz^\nu \prod_{j=1}^m P\left(\dfrac{z}{c_j}\right)$, *де* $\nu \in \mathbb{Z}$, $c_1, c_2, \ldots, c_m$ — *комплексні числа, не обов'язково різні, такі, що* $\prod_{j=1}^m c_j = (-1)^m a q^{-\nu}$, *а* C — *стала.*

Доведення. Припустимо, що функція f є голоморфним в $\mathbb{C}^*$ розв'язком рівняння (2). Тоді, за теоремою 2 $f(z) = P^m((-1)^m z)g(z)$, де $g \in \mathcal{L}_{qa}$. Оскільки функції f та P голоморфні в $\mathbb{C}^*$, то g або голоморфна в $\mathbb{C}^*$ або має полюси, причому лише в точках $\{(-1)^m q^k\}$, $k \in \mathbb{Z}$, і кратність кожного полюса $l_k \le m$, $l_k \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Якщо g є голоморфною, то $g(z) \equiv Cz^\nu$ [5]. Тоді $f(z) = Cz^\nu P^m((-1)^m z) = Cz^\nu \prod_{j=1}^m P\left(\dfrac{z}{c_j}\right)$, де $c_1 = c_2 = \ldots = c_m = (-1)^m$.

В іншому випадку використаємо теорему про зображення a-локсодромних функцій через первинну функцію Шотткі – Кляйна (див. [5]). А саме, нехай $c_1, c_2 \ldots, c_n$ та $d_1, d_2 \ldots, d_n$ — нулі і полюси функції g у кільці $A_q(R) = \{z \in \mathbb{C} \colon |q|R < |z| \le R\}$, $R > 0$, відповідно і $\partial A_q(R)$ не містить ні нулів, ні полюсів функції $g \in \mathcal{L}_{qa}$. Зауважимо, що для кожної a-локсодромної функції g кількість її нулів дорівнює кількості її полюсів (з урахуванням кратностей) у кожному такому кільці $A_q(R)$ [5]. Тоді [5]

$$g(z) = Cz^\nu \frac{P\left(\dfrac{z}{c_1}\right) P\left(\dfrac{z}{c_2}\right) \ldots P\left(\dfrac{z}{c_n}\right)}{P\left(\dfrac{z}{d_1}\right) P\left(\dfrac{z}{d_2}\right) \ldots P\left(\dfrac{z}{d_n}\right)}, \tag{4}$$

де

$$\frac{c_1 c_2 \ldots c_n}{d_1 d_2 \ldots d_n} = \frac{a}{q^\nu}, \quad \nu \in \mathbb{Z}, \tag{5}$$

а C — стала.

Зрозуміло, що кожне кільце $A_q(R)$ містить лише одну точку з послідовності $\{(-1)^m q^k\}$, $k \in \mathbb{Z}$. Зручно вибрати таке кільце $A_q(R)$, що містить полюси $d_1 = d_2 = \ldots = d_n = (-1)^m q^0 = (-1)^m$. Зауважимо, що $n = l_0$, де l_0 — кратність полюса в точці $z = (-1)^m$. Оскільки $\prod_{j=1}^n d_j = (-1)^{mn}$, то звідси випливає, що $c_1 c_2 \ldots c_n = (-1)^{mn} a q^{-\nu}$.

Тепер функцію f можна записати у вигляді

$$f(z) = Cz^\nu \frac{P\left(\frac{z}{c_1}\right) P(\dfrac{z}{c_2}) \ldots P\left(\dfrac{z}{c_n}\right)}{P^n\left(\dfrac{z}{(-1)^m}\right)} P^m\big((-1)^m z\big)$$

або

$$f(z) = Cz^\nu P\left(\frac{z}{c_1}\right) P\left(\frac{z}{c_2}\right) \ldots P\left(\frac{z}{c_n}\right) P^{m-n}\big((-1)^m z\big).$$

Зауважимо, що $(-1)^{m^2} = (-1)^m$. У випадку $m = n$ теорему 4 доведено. Якщо $n < m$, то покладемо $c_{n+1} = c_{n+2} = \ldots = c_m = (-1)^m$. Тоді $f(z) = Cz^\nu \prod_{j=1}^m P\left(\dfrac{z}{c_j}\right)$ і знову, використовуючи рівність $(-1)^{m^2} = (-1)^m$, отримуємо $\prod_{j=1}^m c_j = (-1)^m a q^{-\nu}$.

Теорему 4 доведено.

Тепер розглянемо функціональне рівняння

$$f(qz) = \frac{a}{(b-z)^m} f(z), \qquad z \in \mathbb{C}^*, \quad m \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

Знайдемо його голоморфні в $\mathbb{C}^*$ розв'язки.

Визначимо цілу функцію з послідовністю нулів $\{q^{-n}\}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 < |q| < 1$,

$$H(z) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^n z).$$

Нескладно показати, що

$$H(qz) = \frac{1}{1-z} H(z), \quad z \in \mathbb{C}^*. \tag{7}$$

Спочатку знайдемо мероморфні розв'язки рівняння (6).

Теорема 5. *Мероморфна в* $\mathbb{C}^*$ *функція* $f(z) = H^m\left(\frac{z}{b}\right) g(z)$, *де* $g \in \mathcal{L}_{qp}$, $p = \frac{a}{b^m}$, *задовольняє рівняння* (6).

Доведення. Справді, використовуючи (7), маємо

$$H\left(\frac{qz}{b}\right) = \frac{b}{b-z} H\left(\frac{z}{b}\right). \tag{8}$$

Оскільки g є p-локсодромною з $p = \frac{a}{b^m}$, то

$$f(qz) = H^m\left(\frac{qz}{b}\right) g(qz) \overset{(8)}{=} \left(\frac{b}{b-z}\right)^m H^m\left(\frac{z}{b}\right) \frac{a}{b^m} g(z) = \frac{a}{(b-z)^m} H^m\left(\frac{z}{b}\right) g(z).$$

Теорему 5 доведено.

Теорема 6. *Кожен мероморфний у* $\mathbb{C}^*$ *розв'язок рівняння* (6) *можна зобразити у вигляді* $f(z) = H^m\left(\frac{z}{b}\right) g(z)$, *де* $g \in \mathcal{L}_{qp}$, $p = \frac{a}{b^m}$.

Доведення. Нехай f є розв'язком рівняння (6). Розглянемо функцію $g(z) = \dfrac{f(z)}{H^m\left(\frac{z}{b}\right)}$. Оскільки f є мероморфною функцією, а H — голоморфною, то отримуємо, що g є мероморфною. Застосовуючи формули (6) і (8), бачимо, що

$$g(qz) = \frac{f(qz)}{H^m\left(\frac{qz}{b}\right)} = \frac{\frac{a}{(b-z)^m} f(z)}{\left(\frac{b}{b-z}\right)^m H^m\left(\frac{z}{b}\right)} = \frac{a}{b^m} g(z) = pg(z).$$

Таким чином, для всіх $z \neq bq^{-n}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ можемо зробити висновок, що $g(qz) = pg(z)$. Іншими словами, g є p-локсодромною.

Теорему 6 доведено.

Аналогічно до розгляду рівняння (2) обмежимося спочатку випадком $m > 0$.

Теорема 7. *Нехай* $m \in \mathbb{N}$, $a = b^m q^k$, *де* k — *додатне ціле. Тоді голоморфна в* $\mathbb{C}^*$ *функція* $f(z) = Cz^k H^m\left(\frac{z}{b}\right)$, *де* C — *стала, задовольняє рівняння* (6).

Доведення. Легко бачити, що

$$(b-z)^m f(qz) = (b-z)^m C q^k z^k H^m\left(\frac{qz}{b}\right) \overset{(8)}{=} (b-z)^m C q^k z^k \left(\frac{b}{b-z}\right)^m H^m\left(\frac{z}{b}\right) = af(z).$$

Теорема 8. *Нехай* $m \in \mathbb{N}$, $a = b^m q^k$, *де* k — *додатне ціле. Тоді кожен голоморфний у* $\mathbb{C}^*$ *розв'язок рівняння* (6) *має вигляд* $f(z) = Cz^k H^m\left(\frac{z}{b}\right)$, *де* C — *стала.*

Доведення. Припустимо, що f є голоморфним у $\mathbb{C}^*$ розв'язком (6). За теоремою 6

$$f(z) = H^m\left(\frac{z}{b}\right) g(z), \tag{9}$$

де $g \in \mathcal{L}_{qp}$, $p = \dfrac{a}{b^m}$. Запишемо (9) у вигляді

$$g(z) = \frac{f(z)}{H^m\left(\frac{z}{b}\right)}. \tag{10}$$

Функції f і H є голоморфними в $\mathbb{C}^*$. Ми також знаємо, що H^m має нулі в точках $\{bq^{-n}\}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, кратності m.

Якщо f має лише ті самі нулі, що і H, то g не має нулів. Тоді $g \in \mathcal{L}_{qp}$ є голоморфною і за лемою A $g(z) \equiv Cz^k$. В цьому випадку теорему доведено.

Припустимо, що f має також нулі, відмінні від $\{bq^{-n}\}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, тоді g має нулі. А тому за властивістю p-локсодромної функції [3, c. 93] g також має полюси. Оскільки f є голоморфним у $\mathbb{C}^*$ розв'язком, то g може мати полюси лише у точках $\{bq^{-n}\}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, кратності $l_n \le m$.

Використаємо зображення $g \in \mathcal{L}_{qp}$ в кільці $A_q(R)$, а саме рівність (4). Кожне кільце $A_q(R)$ містить лише одну точку з послідовності $\{bq^{-n}\}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Виберемо таке кільце $A_q(R)$, що містить полюси $d_1 = d_2 = \ldots = d_l = q^0 = b$. Зауважимо що $l = l_0$, де l_0 — кратність полюса в точці $z = b$. Тоді можна переписати (9) у вигляді

$$f(z) = Cz^\nu \frac{\prod\limits_{j=1}^{l} P\left(\frac{z}{c_j}\right)}{P^l\left(\frac{z}{b}\right)} H^m\left(\frac{z}{b}\right).$$

Оскільки $P\left(\frac{z}{b}\right)$ має нулі в точках $\{bq^n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, а $H\left(\frac{z}{b}\right)$ — лише в точках $\{bq^{-n}\}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, то приходимо до суперечності.

Теорему 8 доведено.

Якщо $m = 0$, то розв'язками рівнянь (2) і (6) є клас a-локсодромних функцій. Нарешті, для від'ємних цілих m маємо таке твердження.

Теорема 9. *Якщо* m — *від'ємне ціле, то рівняння* (2) *і* (6) *не мають голоморфних в* $\mathbb{C}^*$ *розв'язків.*

Доведення. Розглянемо рівняння (2). Нехай $m < 0$ і, для визначеності, m є парним. Припустимо, що існує голоморфний у $\mathbb{C}^*$ розв'язок f рівняння (2). У цьому випадку за теоремою 2 він має вигляд $f(z) = P^m(z) g(z)$, де $g \in \mathcal{L}_{qa}$. Тоді $g(z) = f(z) P^{-m}(z)$. Як ми бачимо, g є голоморфною в $\mathbb{C}^*$. З огляду на лему А можна стверджувати, що $g(z) \equiv Cz^k$, $k \in \mathbb{Z}$, C — стала.

Але, з іншого боку, функція $f(z) = Cz^k P^m(z)$, де C — стала, не буде голоморфною в $\mathbb{C}^*$, бо f матиме полюси в точках $\{q^n\}$, $n \in \mathbb{Z}$. Це суперечить нашому припущенню.

Міркуючи аналогічно, лише використовуючи $H\left(\frac{z}{b}\right)$ замість $P(z)$ та застосовуючи теорему 6 і лему А, доводимо теорему для рівняння (6).

Загальний випадок. Нехай R — раціональна функція. Тоді

$$R(z) = Cz^m \frac{(a_1 - z)(a_2 - z)\ldots(a_k - z)}{(b_1 - z)(b_2 - z)\ldots(b_l - z)}, \quad m \in \mathbb{Z}, \tag{11}$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_k$ і $b_1, b_2, \ldots, b_l$ — відмінні від нуля комплексні числа, не обов'язково різні, такі, що $a_i \neq b_j$ для всіх i, j, а C — стала.

Тепер розглянемо більш загальне рівняння

$$f(qz) = R(z) f(z), \quad z \in \mathbb{C}^*. \tag{12}$$

Використовуючи результати із попереднього пункту, можемо описати мероморфні в $\mathbb{C}^*$ розв'язки рівняння (12).

Теорема 10. *Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_k$ і $b_1, b_2, \ldots, b_l$ — відмінні від нуля комплексні числа, не обов'язково різні, такі, що $a_i \neq b_j$ для всіх i, j, а C — стала, $m \in \mathbb{Z}$, $g \in \mathcal{L}_{qp}$, де $p = C\frac{a_1 a_2 \ldots a_k}{b_1 b_2 \ldots b_l}$. Мероморфна в $\mathbb{C}^*$ функція*

$$f(z) = \frac{H\left(\frac{z}{b_1}\right) H\left(\frac{z}{b_2}\right) \ldots H\left(\frac{z}{b_l}\right)}{H\left(\frac{z}{a_1}\right) H\left(\frac{z}{a_2}\right) \ldots H\left(\frac{z}{a_k}\right) P^m\big((-1)^m z\big)} g(z)$$

задовольняє рівняння (12).

Доведення. Використовуючи формулу (7), отримуємо

$$H\left(\frac{qz}{a}\right) = \frac{a}{a - z} H\left(\frac{z}{a}\right). \tag{13}$$

З огляду на рівності (3), (13) і беручи до уваги вибір p, одержуємо

$$f(qz) = \frac{H\left(\frac{qz}{b_1}\right) H\left(\frac{qz}{b_2}\right) \ldots H\left(\frac{qz}{b_l}\right)}{H\left(\frac{qz}{a_1}\right) H\left(\frac{qz}{a_2}\right) \ldots H\left(\frac{qz}{a_k}\right) P^m\big(q(-1)^m z\big)} g(qz) \overset{(3),(13)}{=}$$

$$\overset{(3),(13)}{=} \frac{\frac{b_1}{b_1 - z} H\left(\frac{z}{b_1}\right) \frac{b_2}{b_2 - z} H\left(\frac{z}{b_2}\right) \ldots \frac{b_l}{b_l - z} H\left(\frac{z}{b_l}\right)}{\frac{a_1}{a_1 - z} H\left(\frac{z}{a_1}\right) \frac{a_2}{a_2 - z} H\left(\frac{z}{a_2}\right) \ldots \frac{a_k}{a_k - z} H\left(\frac{z}{a_k}\right) \left(-\frac{1}{(-1)^m z} P\big((-1)^m z\big)\right)^m} pg(z) =$$

$$= Cz^m \frac{(a_1 - z)(a_2 - z)\ldots(a_k - z)}{(b_1 - z)(b_2 - z)\ldots(b_l - z)} \times$$

$$\times\frac{H\left(\frac{z}{b_1}\right)H\left(\frac{z}{b_2}\right)\ldots H\left(\frac{z}{b_l}\right)}{H\left(\frac{z}{a_1}\right)H\left(\frac{z}{a_2}\right)\ldots H\left(\frac{z}{a_k}\right)P^m\big((-1)^m z\big)}g(z)=R(z)f(z).$$

Теорему 10 доведено.

Теорема 11. *Нехай* $a_1,a_2,\ldots,a_k$ *і* $b_1,b_2,\ldots,b_l$ *— відмінні від нуля комплексні числа, не обов'язково різні, такі, що* $a_i\neq b_j$ *для всіх* i, j, C *— стала,* $m\in\mathbb{Z}$, $g\in\mathcal{L}_{qp}$, *де* $p=C\frac{a_1a_2\ldots a_k}{b_1b_2\ldots b_l}$. *Тоді кожен мероморфний у* $\mathbb{C}^*$ *розв'язок рівняння* (12) *має вигляд*

$$f(z)=\frac{H\left(\frac{z}{b_1}\right)H\left(\frac{z}{b_2}\right)\ldots H\left(\frac{z}{b_l}\right)}{H\left(\frac{z}{a_1}\right)H\left(\frac{z}{a_2}\right)\ldots H\left(\frac{z}{a_k}\right)P^m\big((-1)^m z\big)}g(z).$$

Доведення. Нехай f є мероморфним у $\mathbb{C}^*$ розв'язком рівняння (12). Розглянемо функцію

$$g(z)=\frac{f(z)H\left(\frac{z}{a_1}\right)H\left(\frac{z}{a_2}\right)\ldots H\left(\frac{z}{a_k}\right)P^m\big((-1)^m z\big)}{H\left(\frac{z}{b_1}\right)H\left(\frac{z}{b_2}\right)\ldots H\left(\frac{z}{b_l}\right)}. \tag{14}$$

Очевидно, що g мероморфна в $\mathbb{C}^*$. Тепер розглянемо $g(qz)$,

$$g(qz)=\frac{f(qz)H\left(\frac{qz}{a_1}\right)H\left(\frac{qz}{a_2}\right)\ldots H\left(\frac{qz}{a_k}\right)P^m\big(q(-1)^m z\big)}{H\left(\frac{qz}{b_1}\right)H\left(\frac{qz}{b_2}\right)\ldots H\left(\frac{qz}{b_l}\right)}\overset{(12)}{=}$$

$$\overset{(12)}{=}R(z)f(z)\frac{H\left(\frac{qz}{a_1}\right)H\left(\frac{qz}{a_2}\right)\ldots H\left(\frac{qz}{a_k}\right)P^m\big(q(-1)^m z\big)}{H\left(\frac{qz}{b_1}\right)H\left(\frac{qz}{b_2}\right)\ldots H\left(\frac{qz}{b_l}\right)}.$$

Застосовуючи (11) і (14), отримуємо

$$g(qz)=Cz^m\frac{(a_1-z)(a_2-z)\ldots(a_k-z)}{(b_1-z)(b_2-z)\ldots(b_l-z)}\frac{H\left(\frac{z}{b_1}\right)H\left(\frac{z}{b_2}\right)\ldots H\left(\frac{z}{b_l}\right)}{H\left(\frac{z}{a_1}\right)H\left(\frac{z}{a_2}\right)\ldots H\left(\frac{z}{a_k}\right)P^m\big((-1)^m z\big)}g(z)\times$$

$$\times\frac{H\left(\frac{qz}{a_1}\right)H\left(\frac{qz}{a_2}\right)\ldots H\left(\frac{qz}{a_k}\right)P^m(q(-1)^m z)}{H\left(\frac{qz}{b_1}\right)H\left(\frac{qz}{b_2}\right)\ldots H\left(\frac{qz}{b_l}\right)}.$$

Використовуючи (3) і (13), записуємо $g(qz)$ таким чином:

$$g(qz) = Cz^m \frac{(a_1 - z)(a_2 - z)\ldots(a_k - z)}{(b_1 - z)(b_2 - z)\ldots(b_l - z)} \frac{H\left(\dfrac{z}{b_1}\right)H\left(\dfrac{z}{b_2}\right)\ldots H\left(\dfrac{z}{b_l}\right)}{H\left(\dfrac{z}{a_1}\right)H\left(\dfrac{z}{a_2}\right)\ldots H\left(\dfrac{z}{a_k}\right)P^m\big((-1)^m z\big)} g(z)\times$$

$$\times \frac{\dfrac{a_1}{a_1 - z}H\left(\dfrac{z}{a_1}\right)\dfrac{a_2}{a_2 - z}H\left(\dfrac{z}{a_2}\right)\ldots\dfrac{a_k}{a_k - z}H\left(\dfrac{z}{a_k}\right)\left(-\dfrac{1}{(-1)^m z}P\big((-1)^m z\big)\right)^m}{\dfrac{b_1}{b_1 - z}H\left(\dfrac{z}{b_1}\right)\dfrac{b_2}{b_2 - z}H\left(\dfrac{z}{b_2}\right)\ldots\dfrac{b_l}{b_l - z}H\left(\dfrac{z}{b_l}\right)}.$$

Спрощуючи вираз у правій частині останньої рівності та враховуючи вибір p, одержуємо

$$g(qz) = C\frac{a_1 a_2 \ldots a_k}{b_1 b_2 \ldots a_l} g(z) = pg(z).$$

Таким чином, для всіх $z \neq q^n$, $n \in \mathbb{Z}$, виконується $g(qz) = pg(z)$. Це означає, що g є p-локсодромною з мультиплікатором q.

Теорему 11 доведено.

Беручи до уваги доведені вище твердження, можемо очікувати, що голоморфні в $\mathbb{C}^*$ розв'язки рівняння (12) існуватимуть лише за умови, що

$$R(z) = \frac{M(z)}{z^m(b_1 - z)(b_2 - z)\ldots(b_l - z)},$$

де $b_1, b_2, \ldots, b_l$ — відмінні від нуля комплексні числа, не обов'язково різні, $\deg M(z) = 0$ і $m \geq 0$.

За таких умов рівняння (12) набирає вигляду

$$f(qz) = \frac{M}{z^m(b_1 - z)(b_2 - z)\ldots(b_l - z)} f(z), \qquad z \in \mathbb{C}^*, \quad M = \text{const}. \tag{15}$$

Ми отримали наступні теореми, які описують голоморфні в $\mathbb{C}^*$ розв'язки рівняння (15).

Теорема 12. *Голоморфна в* $\mathbb{C}^*$ *функція* $f(z) = Cz^\nu \prod_{i=1}^{l} H\left(\dfrac{z}{b_i}\right)\prod_{j=1}^{m} P\left(\dfrac{z}{c_j}\right)$, *де* $\nu \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $c_1, c_2, \ldots c_m$, — *відмінні від нуля комплексні числа, не обов'язково різні, а* C — *стала, задовольняють рівняння* (15) *з* $M = (-1)^m q^\nu \prod_{i=1}^{l} b_i \prod_{j=1}^{m} c_j$.

Доведення. Справді, використовуючи (3) і (13), отримуємо

$$f(qz) = Cq^\nu z^\nu \prod_{i=1}^{l} H\left(\frac{qz}{b_i}\right)\prod_{j=1}^{m} P\left(\frac{qz}{c_j}\right) = Cq^\nu z^\nu \prod_{i=1}^{l}\frac{b_i}{b_i - z}H\left(\frac{z}{b_i}\right)\prod_{j=1}^{m}\left(-\frac{c_j}{z}P\left(\frac{z}{c_j}\right)\right) =$$

$$= \frac{M}{\prod\limits_{i=1}^{l}(b_i - z)} Cz^\nu \prod_{i=1}^{l} H\left(\frac{z}{b_i}\right)P\left(\frac{z}{c_j}\right) = \frac{M}{(b_1 - z)(b_2 - z)\ldots(b_l - z)} f(z).$$

Теорема 13. *Кожен голоморфний у* $\mathbb{C}^*$ *розв'язок рівняння* (15) *можна записати у вигляді* $f(z) = Cz^\nu \prod_{i=1}^{l} H\left(\dfrac{z}{b_i}\right)\prod_{j=1}^{m} P\left(\dfrac{z}{c_j}\right)$, *де* C — *стала,* $\nu \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $c_1, c_2, \ldots c_m$, — *відмінні від нуля комплексні числа, не обов'язково різні, такі що* $M = (-1)^m q^\nu \prod_{i=1}^{l} b_i \prod_{j=1}^{m} c_j$.

Доведення. Нехай f є голоморфним у $\mathbb{C}^*$ розв'язком рівняння (15). Згідно з теоремою 11, мероморфні розв'язки рівняння (15) мають вигляд

$$f(z) = \prod_{i=1}^{l} H\left(\frac{z}{b_i}\right) P^m((-1)^m z) g(z),$$

де $g \in \mathcal{L}_{qp}$, $p = \dfrac{M}{b_1 b_2 \ldots b_l}$. З цієї множини розв'язків ми вибиратимемо голоморфні в $\mathbb{C}^*$ функції. Можливі такі випадки:

1. Якщо g голоморфна, то f є добутком голоморфних функцій, тобто f буде голоморфним у $\mathbb{C}^*$ розв'язком рівняння (15).

Зауважимо що в даному випадку, за лемою А $g(z) \equiv 0$ або існує $\nu \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ таке, що $p = \dfrac{M}{b_1 b_2 \ldots b_l} = q^\nu$ і $g(z) = Cz^\nu$, де C — стала. Іншими словами, функція f набирає вигляду

$$f(z) = Cz^\nu P^m((-1)^m z) \prod_{i=1}^{l} H\left(\frac{z}{b_i}\right),$$

причому в цьому випадку $M = q^\nu \prod_{i=1}^{l} b_i = (-1)^m q^\nu \prod_{i=1}^{l} b_i \prod_{j=1}^{m} (-1)^m$, оскільки $(-1)^{m^2+m} = 1$.

2. Якщо g мероморфна і g має принаймні один полюс, відмінний від нулів $P\big((-1)^m z\big)$ та $H\left(\dfrac{z}{b_i}\right)$, то очевидно, що f не буде голоморфною.

3. Нехай g мероморфна і має полюси в точках, які є нулями функції $H\left(\dfrac{z}{b_i}\right)$. Ми маємо $H\left(\dfrac{z}{b_i}\right) = 0 \Leftrightarrow z = b_i q^{k},\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Оскільки g є p-локсодромною, то g також матиме полюси в точках $z = b_i q^{-k},\ k \in \mathbb{N}$. Але в цьому випадку f не буде голоморфною.

4. Нехай g мероморфна і має полюси лише в точках, які є нулями P, тобто g має полюси лише в точках $z = (-1)^m q^k$, $k \in \mathbb{Z}$. Через l_k позначимо кратність кожного такого полюса g. Тоді необхідною умовою для отримання голоморфного розв'язку f є умова $l_k \le m$.

Використовуючи зображення (4) p-локсодромної функції і міркуючи, як при доведенні теореми 4,

$$f(z) = P^m\left(\frac{(-1)^m z}{1}\right) \prod_{i=1}^{l} H\left(\frac{z}{b_i}\right) Cz^\nu \frac{P\left(\dfrac{z}{c_1}\right) P\left(\dfrac{z}{c_2}\right) \ldots P\left(\dfrac{z}{c_{l_0}}\right)}{P^{l_0}\left(\dfrac{z}{(-1)^m}\right)},$$

де

$$\frac{c_1 c_2 \ldots c_{l_0}}{(-1)^{m l_0}} = \frac{p}{q^\nu}, \quad \nu \in \mathbb{Z}. \tag{16}$$

Оскільки $l_0 \le m$, то f є голоморфною. Позначаючи $c_{l_0+1} = c_{l_0+2} = \ldots = c_m = (-1)^m$, функцію f можна записати у вигляді

$$f(z) = Cz^{\nu} \prod_{i=1}^{l} H\left(\frac{z}{b_i}\right) \prod_{j=1}^{m} P\left(\frac{z}{c_j}\right),$$

де C — стала. При цьому з урахуванням (16) $M = (-1)^m q^{\nu} \prod_{i=1}^{l} b_i \prod_{j=1}^{m} c_j$.

Теорему 13 доведено.

Література

1. *Crowdy D. G.* Geometric function theory: a modern view of a classical subject // Nonlinearity. – 2008. – **21**, № 10. – P. T205 – T219.
2. *Marcotte J.* Matthew salomone loxodromic spirals in M. C. Escher's sphere surface // J. Humanist. Math. – 2014. – **4**, № 2. – P. 25 – 46.
3. *Hellegouarch Y.* Invitation to the mathematics of Fermat – Wiles. Acad. Press, 2002.
4. *Hushchak O., Kondratyuk A.* The Julia exceptionality of loxodromic meromorphic functions // Vicnyk Lviv Univ. Ser. Mech., Math. – 2013. – **78**. – P. 35 – 41.
5. *Khoroshchak V. S., Khrystiyanyn A. Ya., Lukivska D. V.* A class of Julia exceptional functions // Carpath. Math. Publ. – 2016. – **8**, № 1. – P. 172 – 180.
6. *Khoroshchak V. S., Kondratyuk A. A.* The Riesz measures and a representation of multiplicatively periodic δ-subharmonic functions in a punctured euclidean space // Mat. Stud. – 2015. – **43**, № 1. – P. 61 – 65.
7. *Khoroshchak V. S., Sokulska N. B.* Multiplicatively periodic meromorphic functions in the upper halfplane // Mat. Stud. – 2014. – **42**, № 2. – P. 143 – 148.
8. *Khoroshchak V. S., Kondratyuk A. A.* Stationary harmonic functions on homogeneous spaces // Ufimsk. Mat. Zh. – 2015. – **7**, № 4. – P. 155 – 159.
9. *Khrystiyanyn A. Ya., Kondratyuk A. A.* Meromorphic mappings of torus onto the Riemann sphere // Carpath. Math. Publ. – 2012. – **4**, № 1. – P. 155 – 159.
10. *Khrystiyanyn A. Ya., Kondratyuk A. A.* Modulo-loxodromic meromorphic function in $C\backslash 0$ // Ufimsk. Mat. Zh. – 2016. – **8**, № 4. – P. 156 – 162.
11. *Klein F.* Zur Theorie der Abel'schen Functionen // Math. Ann. – 1890. – **36**. – P. 1 – 83.
12. *Kondratyuk A. A., Zaborovska V. S.* Multiplicatively periodic subharmonic functions in the punctured Euclidean space // Mat. Stud. – 2013. – **40**, № 2. – P. 159 – 164.
13. *Kondratyuk A. A.* Loxodromic meromorphic and δ-subharmonic functions // Proc. Workshop Complex Anal. and Appl. Different. and Functi. Equat. . – 2014. – **14**. – P. 89 – 99.
14. *Rausenberger O.* Lehrbuch der Theorie der periodischen Functionen einer Variabeln. – Leipzig: Druck und Ferlag von B. G Teubner, 1884.
15. *Kos S., Pogány T. K.* On the mathematics of navigational calculations for meridian sailing // Electron. J. Geogr. and Math. – 2012.
16. *Schottky F.* Über eine specielle Function welche bei einer bestimmten linearen Transformation ihres Arguments unverändert bleibt // J. reine und angew. Math. – 1887. – **101**.
17. *Valiron G.* Cours d'Analyse Mathematique. Theorie des fonctions, 2nd Ed. – Masson et.Cie., Paris, 1947.

Одержано 17.04.17