УДК 983

В. А. Мозель (Отд-ние гидроакустики Ин-та геофизики НАН Украины, Одесса)

О БАНАХОВОЙ АЛГЕБРЕ, ПОРОЖДЕННОЙ ОПЕРАТОРОМ БЕРГМАНА, ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И КОНЕЧНОПОРОЖДЕННЫМИ ГРУППАМИ СДВИГОВ

We study a Banach algebra generated by the Bergman operator, constant coefficients, and shifts formed by finitely generated commutative groups of hyperbolic transformations of the unit disk acting in the Lebesgue space L_p, $p > 1$, and obtain an effective criterion for the operators from the considered Banach algebra to be Fredholm operators.

Вивчається банахова алгебра, породжена діючими у лебеговому просторі L_p, $p > 1$, оператором Бергмана, сталими коефіцієнтами та зсувами, утвореними скінченнопородженими комутативними групами гіперболічних перетворень одиничного круга. Як результат одержано ефективний критерій фредгольмовості операторів розглянутої банахової алгебри.

1. Введение. Пусть D — единичный круг комплексной плоскости. В банаховом пространстве $L_p(D)$, $p > 1$, введем следующие операторы:

$$(Bf)(z) = \frac{1}{\pi} \iint\limits_D \frac{f(\zeta)}{(1 - \bar{\zeta} z)^2}\, dD_\zeta$$

— известный оператор Бергмана;

$$(W_g f)(z) = \left| g'(z) \right|^{2/p} f(g(z))$$

— изометрический оператор взвешенного сдвига, где $g \in G$ — элемент бесконечной коммутативной группы $G = \langle g_1, g_2, \ldots, g_n \rangle$, порожденной конечным числом образующих g_s, $s = 1, 2, \ldots, n$, которые являются гиперболическими дробно-линейными преобразованиями единичного круга с общей парой неподвижных точек, лежащих на границе. В данной работе изучается банахова алгебра $\mathfrak{B} = \operatorname{alg}(\mathfrak{C}, W_G)$, которая является расширением алгебры $\mathfrak{C}$ операторов вида $A_g = \alpha_g I + \beta_g B + L \in \mathfrak{C}$, где α_g, $\beta_g \in \mathbb{C}$ — комплексные постоянные, L — компактный оператор, с помощью операторов $\{W_g : g \in G\}$. Операторы алгебры $\mathfrak{B}$ имеют вид $M = \sum_{g \in G} A_g W_g$, а норма в алгебре $\mathfrak{B}$ вводится правилом

$$|||M||| = \sum_{g \in G} |||A_g|||. \tag{1}$$

Легко видеть, что

$$|||A_g||| = \max \left\{ |\alpha_g| \, , \, |\gamma_g| = |\alpha_g + \beta_g| \right\}.$$

Операторы алгебры $\mathfrak{B}$ можно представить в виде

$$M = A(I - B) + CB + L, \tag{2}$$

где L — компактный оператор, B — оператор Бергмана, A и C — функциональные операторы вида

© В. А. МОЗЕЛЬ, 2017

$$A = \sum_{g \in G} \alpha_g W_g,$$

$$C = \sum_{g \in G} \gamma_g W_g$$

— абсолютно сходящиеся ряды, т. е.

$$\sum_{g \in G} |\alpha_g| < \infty, \sum_{g \in G} |\gamma_g| < \infty$$

($\alpha_g,\ \beta_g,\ \gamma_g = \alpha_g + \beta_g$ — постоянные, зависящие только от $g \in G$).

Аналогичная алгебра (одномерных операторов невзвешенного сдвига с постоянными коэффициентами) была рассмотрена Н. Л. Василевским [1], однако там получен критерий обратимости функциональных операторов в рассматриваемой алгебре, т. е. строгая фредгольмовость. (Оператор алгебры $\mathfrak{A}$ называется строго фредгольмовым, если он фредгольмов и его регуляризатор принадлежит той же алгебре $\mathfrak{A}$.)

Отметим, что спектры операторов взвешенного сдвига в различных ситуациях были вычислены А. Б. Антоневичем и группой минских математиков [2]. Там же эти результаты были применены к исследованию C^*-алгебр сингулярных интегральных операторов со сдвигами (в частности, приведена теорема об изоморфизме C^*-алгебр, порожденных динамическими системами, и ее приложения к исследованиям фредгольмовости (нетеровости) функциональных операторов в пространстве периодических обобщенных функций и к некоторым классам уравнений и краевых задач и получены формулы индекса). Там же отмечены все статьи и книги по этой тематике математиков (одесских, минских, ростовских) школы Ф. Д. Гахова (см., например, [3]).

В работе Ю. И. Карловича [4] (см. также [5]) анонсирован локально траекторный метод и его вариант теоремы об изоморфизме с приложениями к уравнениям типа свертки с осциллирующими коэффициентами со сдвигами, краевым задачам для таких уравнений и вычислению индекса в различных пространствах.

Отметим также монографию Б. А. Пламеневского [6] и библиографию в ней.

В настоящей работе будет построена алгебра символов и указан критерий фредгольмовости операторов рассматриваемой алгебры.

1. Метод исследования. Описывать фактор-алгебру $\hat{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B}/\mathfrak{I}$ (здесь и далее $\mathfrak{I}$ обозначает алгебру компактных операторов) будем в два этапа.

На первом этапе произвольный элемент алгебры сводим к матричному так: пусть $A \in \mathfrak{D}$, тогда

$$A = \begin{pmatrix} PAP & PAQ \\ QAP & QAQ \end{pmatrix},$$

где P и Q — взаимно дополнительные проекторы из $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}$ — некоторая операторная алгебра.

Справедлива следующая лемма (см. [7] и приведенную там библиографию).

Лемма 1. $W_g B W_g^{-1} = B + L$, *где* L — *компактный оператор.*

Заметим, что операторы $L_2,\ L_3$ в представлении оператора M ниже компактны вследствие того, что по сравнению с [7] имеет место безвесовая ситуация. Поэтому

$$M = \begin{pmatrix} (I-B)M(I-B) & (I-B)MB \\ BM(I-B) & BMB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(I-B)+L_1 & L_2 \\ L_3 & CB+L_4 \end{pmatrix}$$

и

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} \hat{A}(I-B) & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{C}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{A}I_1 & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{C}I_2 \end{pmatrix},$$

где I_1 и I_2 — единичные операторы в пространствах $\operatorname{Im}(I-B)$ и $\operatorname{Im}B$ соответственно. Здесь и далее через $\hat{A}$ обозначен класс смежности оператора A в фактор-алгебре по идеалу $\Im$ всех компактных операторов:

$$\hat{A} = \{A+T : T \in \Im\}.$$

Таким образом, фредгольмовость каждого оператора исходной алгебры эквивалентна одновременной обратимости пары функциональных операторов

$$A = \sum_{g\in G} \alpha_g W_g, \tag{3}$$

$$C = \sum_{g\in G} \gamma_g W_g, \tag{4}$$

где

$$\sum_{g\in G} |\alpha_g| < \infty, \tag{5}$$

$$\sum_{g\in G} |\gamma_g| < \infty. \tag{6}$$

На втором этапе проводится изучение обратимости и фредгольмовости операторов вида (3), (4) с условиями (5), (6).

2. Алгебры функциональных операторов. Алгебру функциональных операторов вида (3), удовлетворяющих условию (5) и действующих в пространстве $L_p(D)$, $p>1$, обозначим через $\mathfrak{A}_p^{(1)}$.

2.1. Спектр изометрического оператора взвешенного сдвига. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Спектр Γ_s изометрического оператора взвешенного сдвига*

$$W_{g_s}, \quad s = 1,\ldots,n,$$

совпадает с единичной окружностью. При этом оператор $W_{g_s} - \lambda I$ не является обратимым для точек λ, лежащих на единичной окружности, в алгебре всех ограниченных линейных операторов.

***Замечание* 1.** Отметим, что в точках λ внутри и вне единичной окружности оператор $W_{g_s} - \lambda I$ обратим.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Существенный спектр оператора W_{g_s} совпадает с обычным спектром:*

$$\mathrm{sp}W_{g_s} = \mathrm{ess}-\mathrm{sp}W_{g_s} := \mathrm{sp}\hat{W}_{g_s} = \Gamma_s.$$

Компактификацией вещественной оси $\mathbb{R}$ будет компактификация Бора: для случая периодических функций n переменных это будет n-мерный тор.

Справедлива место следующая теорема.

Теорема 3. *Функция*

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = -\infty}^{+\infty} \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_n} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \ldots z_n^{i_n} \tag{7}$$

с постоянными коэффициентами $\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_n} \in \mathbb{C}$ *является функцией на спектре и символом функционального оператора*

$$A = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = -\infty}^{+\infty} \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_n} W_{g_1}^{i_1} W_{g_2}^{i_2} \ldots W_{g_n}^{i_n},$$

и

$$\mathrm{sp} A = \mathrm{ess} - \mathrm{sp} A = f(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = -\infty}^{+\infty} \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_n} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \ldots z_n^{i_n}.$$

Отметим, что функция (7) с постоянными коэффициентами $\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_n} \in \mathbb{C}$ является функцией на совместном спектре S_n [8, с. 91] (§ 13) операторов $W_{g_1}, W_{g_2}, \ldots, W_{g_n}$. (Здесь $S_n = \Gamma_1 \times \times \Gamma_2 \times \ldots \times \Gamma_n$ — декартово произведение единичных окружностей; так как точки 0 и ∞ лежат вне этого произведения, то указанная функция является аналитической).

3. Главные результаты.

3.1. Алгебра символов алгебры $\hat{\mathfrak{A}}_p^{(1)}$. В алгебре $\hat{\mathfrak{A}}_p^{(1)}$ введем норму по правилу: если оператор A имеет вид (3), то

$$\left\| \hat{A} \right\|_1 := \sum_{g \in G} |\alpha_g| < \infty \tag{8}$$

или, что эквивалентно,

$$\left\| \hat{A} \right\|_1 = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = -\infty}^{+\infty} |\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_n}| < \infty. \tag{8a}$$

Введем теперь алгебру символов $\mathrm{sym}\, \hat{\mathfrak{A}}_p^{(1)}$ алгебры $\hat{\mathfrak{A}}_p^{(1)}$, которая состоит из функций вида (7) с нормой

$$\left\| \mathrm{sym}\, \hat{A} \right\|_1 := \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = -\infty}^{+\infty} |\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_n}| < \infty. \tag{9}$$

Лемма 2. *Соответствие* $\hat{\mathfrak{A}}_p^{(1)} \to \mathrm{sym}\, \hat{\mathfrak{A}}_p^{(1)}$, $\hat{A} \mapsto \mathrm{sym}\, \hat{A}$ *является алгебраическим и изометрическим изоморфизмом банаховых алгебр.*

Доказательство. Докажем, что алгебры $\hat{\mathfrak{A}}_p^{(1)}$ и $\mathrm{sym}\, \hat{\mathfrak{A}}_p^{(1)}$ с нормами (8), (8а) и (9) соответственно являются банаховыми.

Алгебра $\hat{\mathfrak{A}}_p^{(1)}$. Сначала покажем, что произведение абсолютно сходящихся (мажорируемых) рядов вида (3), (4) является абсолютно сходящимся (мажорируемым) рядом с конечной нормой (9). Для этого представим искомое произведение в виде

$$A \cdot C = \left(\sum_{g \in G} \alpha_g W_g \right) \left(\sum_{g \in G} \gamma_g W_g \right) =$$

$$= \sum_{h \in G} \left[\alpha_h \left(\sum_{g \in G} \gamma_g W_g \right) W_h \right] =$$

$$= \sum_{h \in G} \alpha_h \left(\sum_{g \in G} \gamma_g W_{gh} \right).$$

Тогда

$$\|A \cdot C\|_1 = \left\| \sum_{h \in G} \alpha_h \left(\sum_{g \in G} \gamma_g W_{gh} \right) \right\|_1 \leq$$

$$\leq \sum_{h \in G} |\alpha_h| \left(\sum_{g \in G} |\gamma_g| \, \|W_{gh}\| \right) =$$

$$= \|A\|_1 \sum_{g \in G} |\gamma_g| \cdot 1 = \|A\|_1 \, \|C\|_1 < \infty$$

(так как $\|W_g\| \equiv 1$ для любого сдвига $g \in G$ вследствие изометричности операторов взвешенного сдвига W_g).

Можно доказать, что и $|||W_g||| \equiv 1$ для любого сдвига $g \in G$. Действительно, очевидно, что

$$|||W_g||| = \inf_{L \in \Im} \|W_g - L\| \leq \|W_g\| = 1.$$

С другой стороны,

$$1 = |||I||| = \inf_{L \in \Im} \|I - L\| = \inf_{L \in \Im} \left\|W_g(I - L)W_g^{-1}\right\| \leq \inf_{L \in \Im} \|W_g(I - L)\| =$$

$$= \inf_{L \in \Im} \|W_g - W_g L)\| = \inf_{W_g L \in \Im} \|W_g - W_g L)\| = \inf_{L' \in \Im} \left\|W_g - L')\right\| = |||W_g|||.$$

Итак, $1 \geq |||W_g|||$ и $1 \leq |||W_g|||$, поэтому $|||W_g||| = 1$. Таким образом, $\left\|\hat{W}_g\right\| \equiv |||W_g||| \equiv 1$. Поэтому и

$$\left\|\hat{A} \cdot \hat{C}\right\|_1 \leq \left\|\hat{A}\right\|_1 \left\|\hat{C}\right\|_1 < \infty.$$

Далее, совокупность классов смежности $\left\{\hat{A} \colon A \in \mathfrak{A}_p^{(1)}\right\}$, порожденных операторами A вида (3), является линейным пространством относительно нормы (9). Осталось доказать его полноту.

Для этого необходимо доказать, что в нем любая фундаментальная последовательность сходится (см., например, [9, с. 57] (п.13 § 2), а также [8, с. 92] (п. 1 § 4). Выберем произвольную фундаментальную последовательность $\{\hat{x}_n\}$ классов смежности из алгебры $\hat{\mathfrak{A}}_p^{(1)}$ и покажем, что она сходится к некоторому элементу $\hat{x}$ алгебры $\hat{\mathfrak{A}}_p^{(1)}$.

Напомним [8, с. 57, 92], что последовательность $\{x_n\}$ элементов линейного нормированного пространства X называется фундаментальной, если для каждого положительного числа ε существует такой номер $N(\varepsilon)$, что $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ при $m, n > N(\varepsilon)$. Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда

$$x_m = A_m = \sum_{g \in G} \alpha_g^{(m)} W_g,$$

$$x_n = A_n = \sum_{g \in G} \alpha_g^{(n)} W_g,$$

$$x_m - x_n = \sum_{g \in G} \left(\alpha_g^{(m)} - \alpha_g^{(n)} \right) W_g,$$

$$\|x_m - x_n\|_1 = \left\| \sum_{g \in G} \left(\alpha_g^{(m)} - \alpha_g^{(n)} \right) W_g \right\|_1 =$$

$$= \sum_{g \in G} \left| \alpha_g^{(m)} - \alpha_g^{(n)} \right| < \varepsilon \tag{10}$$

при $m,\ n > N(\varepsilon)$.

Из известного и легко проверяемого неравенства для комплексных чисел $||x| - |y|| \leq |x - y|$ следует, что в неравенстве (10) выполнено

$$\sum_{g \in G} \left| \left| \alpha_g^{(m)} \right| - \left| \alpha_g^{(n)} \right| \right| \leq \sum_{g \in G} \left| \alpha_g^{(m)} - \alpha_g^{(n)} \right| < \varepsilon \tag{11}$$

при $m,\ n > N(\varepsilon)$. Отсюда следует, что последовательность $\left\{ \left| \alpha_g^{(n)} \right| \right\}$ является фундаментальной для каждого $g \in G$ и, по критерию Коши для каждого $g \in G$ имеет предел. Обозначим его через $|\alpha_g| := \lim \left| \alpha_g^{(n)} \right|$ при $n \to \infty$. Но тогда из (11) непосредственно получаем

$$\sum_{g \in G} |\alpha_g| < \infty,$$

т. е. неравенство (5) выполнено. Поэтому ряд

$$x = A = \sum_{g \in G} \alpha_g W_g$$

абсолютно сходится.

Итак, если $x_n = A_n = \sum_{g \in G} \alpha_g^{(n)} W_g$, то

$$\hat{x} = \lim_{n \to \infty} \hat{x}_n,$$

и полнота линейного пространства $\hat{\mathfrak{A}}_p^{(1)}$ доказана, т. е. алгебра $\hat{\mathfrak{A}}_p^{(1)}$ банахова.

Алгебра $\operatorname{sym} \hat{\mathfrak{A}}_p^{(1)}$. Повторяя рассуждения из предыдущего пункта доказательства настоящей леммы, учитывая эквивалентность норм в (8) и (8а), представляя абсолютно сходящийся ряд в (3) в виде кратного ряда (напомним, что $G = \langle g_1, g_2, \ldots, g_n \rangle$ является конечнопорожденной коммутативной группой), где $W_g = W_{g_1}W_{g_2}\dots W_{g_n}$, получаем, что произведение абсолютно сходящихся кратных рядов вида (7) $\sum_{i_1,i_2,\dots,i_n=-\infty}^{\infty}\alpha_{i_1i_2\dots i_n}z_1^{i_1}z_2^{i_2}\dots z_n^{i_n}$ (здесь $W_{g_1}W_{g_2}\dots W_{g_n}$ заменено на $z_1^{i_1}z_2^{i_2}\dots z_n^{i_n}$) также является абсолютно сходящимся кратным рядом вида (7), а затем и полноту линейного пространства таких рядов. Итак, алгебра $\operatorname{sym}\hat{\mathfrak{A}}_p^{(1)}$ также является банаховой.

Из теоремы 3 и взаимной однозначности соответствия $\hat{A}\mapsto\operatorname{sym}\hat{A}$ следует, что соответствие $\hat{\mathfrak{A}}_p^{(1)}\to\operatorname{sym}\hat{\mathfrak{A}}_p^{(1)}$ является алгебраическим изоморфизмом указанных банаховых алгебр. Изометричность данного изоморфизма очевидна.

Лемма доказана.

Отметим, что совместный спектр операторов $W_{g_1}, W_{g_2},\dots,W_{g_n}$ совпадает с компактом максимальных идеалов коммутативной банаховой алгебры $\hat{\mathfrak{A}}_p^{(1)}$.

3.1.1. C^*-алгебра $\hat{\mathfrak{A}}_2$. Для дальнейшего важна следующая C^*-алгебра.

В гильбертовом пространстве $L_2(D)$ $(p=2)$ введем унитарный (и изометрический) оператор взвешенного сдвига

$$(W_gf)(z) = \left|g'(z)\right| f(g(z)),$$

где $g\in G$.

Рассмотрим C^*-алгебру $\mathfrak{A}_2$ операторов вида

$$\mathfrak{A}_2 \ni A = \sum_{g\in G}\alpha_g W_g,$$

которые являются рядами, сходящимися (может быть, условно) по операторной норме. Очевидно, абсолютно сходящиеся ряды (3) с нормой (5) входят (как элементы) в множество $\mathfrak{A}_2$, только нормы у них разные. Алгебра $\mathfrak{A}_2$ является наполненной, т. е. если оператор A алгебры $\mathfrak{A}_2$ обратим, то имеет место включение $A^{-1}\in\mathfrak{A}_2$.

Введем теперь C^*-алгебру $\operatorname{sym}\hat{\mathfrak{A}}_2$ функций вида

$$f(z_1,z_2,\dots,z_n) = \sum_{i_1,i_2,\dots,i_n=-\infty}^{+\infty}\alpha_{i_1i_2\dots i_n}z_1^{i_1}z_2^{i_2}\dots z_n^{i_n},$$

которые являются (может быть, условно) сходящимися кратными рядами.

Из теоремы 3 и теоремы [9], (§ 13, теорема 1) следует, что имеет место алгебраический, а следовательно, изометрический изоморфизм

$$\hat{\mathfrak{A}}_2 \cong \operatorname{sym}\hat{\mathfrak{A}}_2.$$

В частности, класс смежности $\hat{A}\in\hat{\mathfrak{A}}_2$ обратим, если и только если его символ

$$\operatorname{sym}\hat{A} = \sum_{i_1,i_2,\dots,i_n=-\infty}^{+\infty}\alpha_{i_1i_2\dots i_n}z_1^{i_1}z_2^{i_2}\dots z_n^{i_n}$$

отличен от нуля в каждой точке множества $S_n=\Gamma_1\times\Gamma_2\times\dots\times\Gamma_n$ — n-мерного тора (совместного спектра [9] элементов $\hat{W}_{g_s}$, $s=1,2,\dots,n$), который совпадает с компактом максимальных идеалов коммутативной C^*-алгебры $\hat{\mathfrak{A}}_2$.

Из результата Бохнера и Филлипса [10] вытекает следующее.

***Следствие* 1.** *Банахова алгебра* $\operatorname{sym}\hat{\mathfrak{A}}_p^{(1)}$ *абсолютно сходящихся кратных рядов Фурье вида* (7) *является наполненной.*

Отсюда непосредственно получаем такое утверждение.

***Следствие* 2.** *Банахова алгебра* $\hat{\mathfrak{A}}_p^{(1)}$ *наполнена.*

Доказательство. 1. Пусть $p = 2$ и класс смежности $\hat{A} \in \hat{\mathfrak{A}}_2^{(1)}$ обратим. Тогда его символ $\operatorname{sym}\hat{A} \in \operatorname{sym}\hat{\mathfrak{A}}_2$ отличен от нуля, и поэтому из следствия 1 следует, что обратный к символу $\operatorname{sym}^{-1}\hat{A} \in \operatorname{sym}\hat{\mathfrak{A}}_2^{(1)}$ является абсолютно сходящимся кратным рядом Фурье. Теперь по изоморфизму класс смежности $\hat{A}^{-1}$ принадлежит $\hat{\mathfrak{A}}_2^{(1)}$.

2. Варьируя показатель P и учитывая, что символ $\operatorname{sym}\hat{A}$ не зависит от P, получаем нужный результат для любого $p > 1$.

Следствие 2 доказано.

3.2. Алгебра $\hat{\mathfrak{B}}$: ***алгебра символов.*** Из матричного представления оператора (2) (см. п. 1)

$$M = \begin{pmatrix} (I-B)M(I-B) & (I-B)MB \\ BM(I-B) & BMB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(I-B)+L_1 & L_2 \\ L_3 & CB+L_4 \end{pmatrix}$$

и

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} \hat{A}(I-B) & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{C}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{A}I_1 & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{C}I_2 \end{pmatrix},$$

где I_1 и I_2 — единичные операторы в пространствах $\operatorname{Im}(I-B)$ и $\operatorname{Im}B$ соответственно, следует, что отображение

$$\pi : \hat{\mathfrak{B}} \to \pi(\hat{\mathfrak{B}}), \tag{12}$$

где

$$\pi(\hat{M}) = (\operatorname{sym}\hat{A}, \operatorname{sym}\hat{C}) \in \pi(\hat{\mathfrak{B}}), \tag{13}$$

с нормой

$$\left\|\pi(\hat{M})\right\| = \max\left(\left\|\operatorname{sym}\hat{A}\right\|_1, \left\|\operatorname{sym}\hat{C}\right\|_1\right), \tag{14}$$

$\operatorname{sym}\hat{A}$, $\operatorname{sym}\hat{C}$ имеют вид кратных рядов (7), а их нормы $\left\|\operatorname{sym}\hat{A}\right\|_1$, $\left\|\operatorname{sym}\hat{C}\right\|_1$ — вид (9), является изометрическим изоморфизмом указанных банаховых алгебр. Алгебру $\pi(\hat{\mathfrak{B}})$ (12)–(14) будем называть алгеброй символов алгебры $\hat{\mathfrak{B}}$.

3.3. Алгебра $\hat{\mathfrak{B}}$: ***фредгольмовость.*** Получили следующую теорему.

Теорема 4. *Отображение* (12)–(14) *является изометрическим изоморфизмом банаховых алгебр* $\hat{\mathfrak{B}}$ *и ее алгебры символов* $\pi(\hat{\mathfrak{B}})$. *Оператор* M *вида* (2) *алгебры* $\mathfrak{B}$ *фредгольмов, если и только если выполнено условие*

$$\operatorname{sym}\hat{A} \neq 0, \quad \operatorname{sym}\hat{C} \neq 0$$

т. е.

$$\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_n} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \ldots z_n^{i_n} \neq 0, \qquad \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n=-\infty}^{+\infty} \gamma_{i_1 i_2 \ldots i_n} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \ldots z_n^{i_n} \neq 0$$

в каждой точке компакта максимальных идеалов $S_n = \Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \ldots \times \Gamma_n$, *т. е. если и только если его символ невырожден.*

Автор выражает благодарность Ю. И. Карловичу за руководство работой.

Литература

1. *Василевский Н. Л.* Символы операторных алгебр // Докл. АН СССР. – 1977. – **235**, № 1. – С. 15 – 18.
2. *Антоневич А. Б.* Линейные функциональные уравнения. Операторный подход. – Минск: Университетское, 1988. – 232 с.
3. *Литвинчук Г. С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. – М.: Наука, 1977. – 448 с.
4. *Карлович Ю. И.* Локально-траекторный метод изучения обратимости в C^*-алгебрах операторов с дискретными группами сдвигов // Докл. АН СССР. – 1988. – **299**, № 3. – С. 546 – 550.
5. *Karlovich Yu. I.* Local-trajectory method and isomorphism theorems for nonlocal C^*-algebras // Oper. Theory: Adv. and Appl. – 2007. – **170**. – P. 137 – 166.
6. *Пламеневский Б. А.* Алгебры псевдодифференциальных операторов. – М.: Наука, 1986. – 256 с.
7. *Джангибеков Г.* Об алгебре, порожденной поликерноператорами со сдвигом // Докл. АН ТаджССР. – 1991. – **34**, № 7. – С. 399 – 403.
8. *Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е.* Коммутативные нормированные кольца. – М.: Физматгиз, 1960. – 316 с.
9. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца. – М.: Наука, 1968. – 664 с.
10. *Bochner S., Phillips R. S.* Absolutely convergent Fourier expansion for non-commutative normed rings // Ann. Math. – 1942. – **43**, № 2. – P. 409 – 418.

Получено 21.09.15,
после доработки — 26.09.17