УДК 517.9

К. Г. Овсепян (Иджеван. филиал Ереван. гос. ун-та, Армения)

ТИП НЕКОТОРЫХ ЯДЕРНЫХ ПОДАЛГЕБР АЛГЕБРЫ ТЕПЛИЦА, ПОРОЖДЕННЫХ ИНВЕРСНЫМИ ПОДПОЛУГРУППАМИ БИЦИКЛИЧЕСКОЙ ПОЛУГРУППЫ

We construct a $\mathbb{Z}$-graded structure of the Toeplitz algebra and consider nuclear C^*-subalgebras of the Toeplitz algebra generated by the inverse subsemigroups of the bicyclic semigroup. The types of these algebras with respect to the Toeplitz algebra are determined. In addition, it is shown, that considered algebras are equipped with the structrure of Hilbert C^*-modules.

Наведено $\mathbb{Z}$-градуювання алгебри Тепліца. Розглядаються ядерні C^*-підалгебри алгебри Тепліца, що породжуються інверсними піднапівгрупами біциклічної напівгрупи. Знайдено тип цих алгебр відносно алгебри Тепліца. Крім того, доведено, що розглядувані алгебри наділені структурою гільбертових C^*-модулів.

1. Введение. Одним из известных и используемых алгебраических объектов в современной математической физике является алгебра Теплица $\mathcal{T}$. В работах многих авторов исследуются как эта алгебра, так и различные ее модификации [1 – 9]. В работе [1] доказано, что у C^*-алгебры, порожденной бициклической полугруппой, существуют с точностью до унитарной эквивалентности одно бесконечномерное, точное неприводимое представление и серия одномерных представлений, параметризуемых единичной окружностью. Из теоремы Кобурна [2] следует, что все C^*-алгебры, порожденные неунитарными изометрическими представлениями полугруппы неотрицательных целых чисел $\mathbb{Z}_+$, канонически изоморфны. Эта теорема была обобщена Дугласом [3] для полугрупп с архимедовым порядком и Мерфи [4] для полугрупп с полным порядком. В работе [5] доказано обратное утверждение к теореме Мерфи [4], т. е. все C^*-алгебры, порожденные точными изометрическими неунитарными представлениями полугруппы, канонически изоморфны только тогда, когда полугруппа оснащена полным порядком. Таким образом, C^*-алгебра, порожденная точным неунитарным бесконечномерным представлением бициклической полугруппы, изоморфна алгебре Теплица. Данная статья посвящена одному из обобщений алгебры Теплица, которое возникает при исследовании C^*-алгебр, порожденных инверсными подполугруппами бициклической полугруппы.

Ранее автором было начато изучение C^*-подалгебр алгебры Теплица $\mathcal{T}$, порожденных мономами, индекс которых кратен числу m. Такая C^*-алгебра была обозначена через $\mathcal{T}_m$ и было показано, что она неподвижна относительно конечной подгруппы группы S^1 порядка m. Были описаны все неприводимые бесконечномерные представления этой C^*-алгебры (см. [10, 11]).

В работе [12] было продолжено исследование C^*-алгебры $\mathcal{T}_m$ с несколько иной точки зрения. Получено полное описание всех инвариантных идеалов алгебры $\mathcal{T}_m$. Показано, что их конечное число, в точности 2^m, и каждый из них порождается одной или несколькими разностями проекторов вида $T^iT^{*i} - T^jT^{*j}$, $0 \leq i < j \leq m$. Также доказано, что если J — инвариантный идеал C^*-алгебры $\mathcal{T}_m$ и $J \neq \mathcal{K}_m$, то она может быть представлена в виде прямой суммы $\mathcal{T}_m \cong \mathcal{T}_n \oplus J$ для некоторого $n < m$.

В работе [13] показано, что алгебра $\mathcal{T}_m$ представляется в виде скрещенного произведения $\mathcal{T}_m = \varphi(\mathcal{A}) \times_{\delta_m} \mathbb{Z}$, где $\mathcal{A} = C_0(\mathbb{Z}_+) \oplus \mathbb{C}I$ — алгебра непрерывных функций на $\mathbb{Z}_+$, которые в бесконечности имеют конечный предел. Кроме того, полное описание автоморфизмов C^*-алгебр $\mathcal{T}_m$ и ее подалгебр $\mathcal{T}(m)$ и $\mathcal{K}_m$ приведено в работе[14].

2. Необходимые сведения. Полугруппа S называется *инверсной*, если для любого $a \in \in S$ существует единственный инверсный элемент $a^* \in S$ такой, что справедливы равенства $a^*aa^* = a^*$ и $aa^*a = a$. Из определения следует, что $a^{**} = a$. Инверсная полугруппа с единицей e называется *бициклической* полугруппой, если она порождена одним элементом a и соотношением $a^*a = e$.

Рассмотрим бициклическую полугруппу S с порождающим элементом a. Каждый элемент бициклической полугруппы имеет вид $a^m a^{*n}$, где m и n неотрицательные целые числа. Элемент вида $a^m a^{*n}$ назовем мономом. *Индексом* монома $b = a^m a^{*n}$ из S назовем число $m - n$ и обозначим через $\operatorname{ind}(b)$. Отметим, что $\operatorname{ind}(b \cdot c) = \operatorname{ind}(b) + \operatorname{ind}(c)$ для любых элементов $b, c \in S$ (см. [10]). Зафиксируем целое число $m \in \mathbb{N}$ и обозначим $S_m = \{b \in S : \operatorname{ind}(b) = k \cdot m, \text{ где } k \in \mathbb{Z}\}$. Пусть $S(m) \subset S$ — подполугруппа, порожденная элементом a^m. Понятно, что $S(m)$, S_m являются инверсными подполугруппами бициклической полугруппы S. Связь этих полугрупп приведена в работе [10]. Рассмотрим точное бесконечномерное неприводимое представление бициклической полугруппы (см. [1])

$$\pi : S \to B(l^2(\mathbb{Z}_+)), \qquad \pi(a^n a^{*m}) = T^n T^{*m},$$

где T — оператор сдвига на $l^2(\mathbb{Z}_+)$, т. е. на базисе $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ действует следующим образом: $Te_k = e_{k+1}$, и это представление порождает алгебру Теплица $\mathcal{T}$.

Обозначим через $\mathcal{T}_m$ C^*-подалгебру алгебры Теплица $\mathcal{T}$, которая порождается инверсной подполугруппой $\pi(S_m)$. Иными словами, $\mathcal{T}_m$ порождается всеми мономами вида $T^k T^{*l}$, где $\operatorname{ind}(T^k T^{*l}) = cm$, $c \in \mathbb{Z}$.

Пусть $\mathcal{T}(m)$ — C^*-подалгебра алгебры Теплица, $\mathcal{T}$ порождаемая $\pi(S(m))$. Очевидно, что $\mathcal{T}(m) \subset \mathcal{T}_m$. Приведем некоторые утверждения о рассматриваемых алгебрах, полученные в работе [12], которые будут использованы в следующих пунктах.

Рассмотрим разложение гильбертова пространства $l^2(\mathbb{Z}_+)$ в виде прямой суммы

$$l^2(\mathbb{Z}_+) = H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_m, \tag{1}$$

где базис подпространства H_i состоит из векторов $\{e_{i-1+km}\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$, $1 \le i \le m$. Тогда подпространства H_i, $1 \le i \le m$, инвариантны относительно алгебры $\mathcal{T}_m$, поэтому любой элемент $A \in \mathcal{T}_m$ однозначно представляется в виде

$$A = A|_{H_1} \oplus \ldots \oplus A|_{H_m}.$$

Пусть $\mathcal{K}$ — C^*-подалгебра всех компактных операторов алгебры Теплица $\mathcal{T}$, а $\mathcal{K}_m$ — C^*-подалгебра всех компактных операторов алгебры $\mathcal{T}_m$.

Лемма 1. *Справедливо тождество*

$$\mathcal{K}_m = \mathcal{K}(H_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{K}(H_m).$$

В работах [10, 11] показано, что представления

$$\pi_i : \mathcal{T}_m \to B(H_i), \qquad \pi_i(A) = A|_{H_i}, \quad i = 1, \ldots, m,$$

исчерпывают весь класс неприводимых, унитарно неэквивалентных, бесконечномерных представлений алгебры $\mathcal{T}_m$.

В работе [12] показано, что инвариантными идеалами алгебры $\mathcal{T}_m$ являются ядра бесконечномерных представлений $\pi_i,\ i = 1, \ldots, m$, и их всевозможные пересечения:

$$\mathcal{J}_i = \ker(\pi_i) = \big\{\mathcal{K}(H_1) \oplus \ldots \oplus K(H_{i-1}) \oplus 0 \oplus K(H_{i+1}) \oplus \ldots \oplus \mathcal{K}(H_m)\big\}.$$

Также доказано существование коротких точных последовательностей

$$0 \to \mathcal{K}_m \to \mathcal{T}_m \to C(S^1) \to 0, \tag{2}$$

$$0 \to \bigcap_{k=1}^{n} \mathcal{J}_{i_k} \to \mathcal{T}_m \to \mathcal{T}_n \to 0, \tag{3}$$

кроме того, короткая точная последовательность (3) расщепляема.

Лемма 2 [11]**.** *Существует естественное представление группы S^1 в группе автоморфизмов алгебры Теплица*

$$\sigma_0 \colon S^1 \to \mathrm{Aut}\mathcal{T}, \qquad \sigma_0(z)(T^n T^{*m}) = z^{(n-m)} T^n T^{*m} \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}_+.$$

Определим унитарный оператор $u_j \colon H_j \to l^2(\mathbb{Z}_+),\ 1 \le j \le m$, полагая на базисных элементах $u_j(e_{j+km}) = e_k$. Поскольку H_j — инвариантные пространства для C^*-алгебры $\mathcal{T}_m$, то унитарный оператор $u = u_1 \oplus \ldots \oplus u_m \colon H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_m \to \bigoplus\limits_{j=1}^{m} l^2(\mathbb{Z}_+)$ порождает вложение

$$\sigma \colon \mathcal{T}_m \to \bigoplus_{j=1}^{m} B(l^2(\mathbb{Z}_+)),$$

$$\sigma(A) = uAu^*, \quad A \in \mathcal{T}_m.$$

Поскольку $T^m e_{i+km} = e_{i+(k+1)m}$, то $\sigma(T^m) = T \oplus \ldots \oplus T$ — m-я копия оператора сдвига T. Алгебра $\mathcal{T}(m)$ порождается операторами T^m и T^{*m}, следовательно, для любого $A \in \mathcal{T}(m)$ найдется такой оператор $B \in \mathcal{T}$, что

$$\sigma(A) = B \oplus \ldots \oplus B.$$

Очевидно, справедливо и обратное: для любого $B \in \mathcal{T}$ найдется такой оператор $A \in \mathcal{T}(m)$, что $\sigma(A) = B \oplus \ldots \oplus B$. Поэтому алгебру $\mathcal{T}(m)$ будем отождествлять с алгеброй $\sigma(\mathcal{T}(m))$:

$$\mathcal{T}(m) \approx \sigma(\mathcal{T}(m)) = m\mathcal{T} = \big\{A \colon A = B \oplus B \oplus \ldots \oplus B,\ B \in \mathcal{T}\big\} \hookrightarrow \bigoplus^{m} \mathcal{T}, \tag{4}$$

где через $\bigoplus\limits^{m} \mathcal{T}$ обозначена прямая сумма m экземпляров алгебры Теплица $\mathcal{T}$.

Как показано в работе [12],

$$P_j|_{H_i} = \begin{cases} I, & i - 1 \ge j, \\ T^m T^{*m}, & i - 1 < j. \end{cases}$$

Откуда получаем, что $\sigma(P_i) = TT^* \oplus \ldots \oplus TT^* \oplus I \oplus \ldots \oplus I$. Всюду в дальнейшем проекторы $P_i,\ 0 \le i \le m-1$, будем отождествлять с проекторами $\sigma(P_i)\colon P_i \approx \sigma(P_i),\ 0 \le i \le m-1$. Отсюда, в частности (с учетом леммы 1), следует, что подалгебру компактных операторов $\mathcal{K}_m$ в $\mathcal{T}_m$ можно отождествить с алгеброй $\sigma(\mathcal{K}_m)$:

$$\mathcal{K}_m \approx \sigma(\mathcal{K}_m) = \bigoplus^{m} \mathcal{K}. \tag{5}$$

Из (4), (5) следует, что алгебра $\mathcal{T}_m$ может быть отождествлена с алгеброй $\sigma(\mathcal{T}_m)$:

$$\mathcal{T}_m \approx \sigma(\mathcal{T}_m) = \big\{A\colon A = (B+K_1) \oplus \ldots \oplus (B+K_m),\ B \in \mathcal{T},\ K_1,\ldots,K_m \in \mathcal{K}\big\}. \tag{6}$$

3. Градуировка алгебры Теплица.

Определение 1. *C^*-алгебра $\mathcal{A}$ называется $\mathbb{Z}$-градуированной по системе $\{\mathcal{A}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ и записывается в виде*

$$\mathcal{A} = \overline{\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{A}_k},$$

если пространства $\mathcal{A}_k$, удовлетворяют следующим условиям:

1) $\mathcal{A}_k,\ k \in \mathbb{Z}$, *замкнутые*;
2) $\mathcal{A}_n \cdot \mathcal{A}_m \subset \mathcal{A}_{n+m}$;
3) *конечные суммы вида* $\sum_{i=1, B_{k_i}\in\mathcal{A}_{k_i}}^{l} B_{k_i}$ *плотны в* $\mathcal{A}$;
4) $\mathcal{A}_k \cap \mathcal{B}_k = 0$, *где* $\mathcal{B}_k = \overline{\Big\{\sum_{i=1, B_{k_i}\in\mathcal{A}_{k_i}, B_{k_i}\notin\mathcal{A}_k}^{l} B_{k_i}\Big\}}$;
5) *если* $B \in \mathcal{A}_k$, *то* $B^* \in \mathcal{A}_{-k}$.

Введем обозначение

$$\mathcal{D}_k = \big\{A \in \mathcal{T};\ \sigma_0(z)(A) = z^k A \ \ \forall z \in S^1\big\}$$

для любого $k \in \mathbb{Z}$.

Каждому элементу A из $\mathcal{T}$ сопоставим формальный ряд Фурье

$$A \simeq \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k,$$

в котором коэффициенты определяются следующим образом:

$$A_k := \int\limits_{S^1} \sigma_0(z)(A) z^{-k} d\mu(z) \in \mathcal{T}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

(μ — нормированная мера Хаара на S^1). Покажем, что коэффициенты A_k принадлежат $\mathcal{D}_k$. Действительно,

$$\sigma_0(z)(A_k) = \sigma_0(z)\left(\int\limits_{S^1} \sigma_0(t)(A) t^{-k} d\mu(t)\right) = \int\limits_{S^1} \sigma_0(zt)(A) t^{-k} d\mu(t) =$$

$$(w := zt) = \int\limits_{S^1} \sigma_0(w) z^k w^{-k} d\mu(z^{-1}w) = z^k \int\limits_{S^1} \sigma_0(w) w^{-k} d\mu(w) = z^k A_k.$$

Последнее равенство получено с учетом инвариантности меры Хаара. Обозначим через $\mathcal{L}_k$ замкнутое подпространство в $\mathcal{T}$, порожденное всеми линейными комбинациями тех мономов A, для которых $\mathrm{ind} A = k$. Покажем, что подпространство L_k совпадает с подпространством $\mathcal{D}_k$ для любого $k \in \mathbb{Z}$. Включение $\mathcal{L}_k \subset \mathcal{D}_k$ очевидно. Покажем обратное включение. Пусть A принадлежит $\mathcal{D}_k$, т. е. $\sigma_0(z)(A) = z^k A \ \forall z \in S^1$. Последнее означает, что $A = \int_{S^1} \sigma_0(z)(A) z^{-k} d\mu(z)$. Поскольку конечные линейные комбинации мономов плотны в $\mathcal{T}$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется конечная сумма такая, что выполняется неравенство $\Big\| A - \sum_{j=1}^{l} B_j \Big\| < \varepsilon$.

С другой стороны, имеет место неравенство

$$\left\| \int\limits_{S^1} \left(\sigma_0(z)(A) - \sigma_0(z) \left(\sum_{j=1}^{l} B_j \right) \right) z^{-k} d\mu(z) \right\| = \left\| A - \sum_{j, \mathrm{ind}(B_j) = k}^{l} B_j \right\| < \varepsilon.$$

Так как $\sum_{j, \mathrm{ind}(B_j)=k}^{l} B_j \in \mathcal{L}_k$ и $\mathcal{L}_k$ — замкнутое пространство, то и A принадлежит $\mathcal{L}_k$. Таким образом,

$$\mathcal{L}_k = \mathcal{D}_k = \big\{ A \in \mathcal{T};\ \sigma_0(z)(A) = z^k A \ \ \forall z \in S^1 \big\}.$$

Теорема 1. *Алгебра Теплица является $\mathbb{Z}$-градуированной алгеброй по системе $\{\mathcal{L}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$:*

$$\mathcal{T} = \overline{\bigoplus_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}_k}. \tag{7}$$

Доказательство. Поскольку $\mathrm{ind}(AB) = \mathrm{ind}(A) + \mathrm{ind}(B)$, то $\mathcal{L}_k \cdot \mathcal{L}_m \subset \mathcal{L}_{k+m}$. Покажем, что сумма в (7) является ортогональной. Действительно, пусть $C \in \mathcal{L}_p$, $D \in \mathcal{L}_q$, где $p \neq q$, тогда

$$\int\limits_{S^1} \sigma_0(z)(C) \sigma_0(z)(D) d\mu(z) = CD \int\limits_{S^1} z^{(p-q)} d\mu(z) = 0.$$

Более того, конечные линейные комбинации вида $\sum_{k=1}^{l} A_k$ плотны в алгебре Теплица. Осталось доказать, что $\mathcal{L}_k \cap \overline{\Big\{ \sum_{i=1,\, B_{k_i} \in \mathcal{L}_{k_i},\, B_{k_i} \notin \mathcal{L}_k}^{l} B_{k_i} \Big\}} = 0$. Пусть A при любом $\mathcal{L}_k$ такой, что

$$\left\| A - \sum_{i=1, B_{k_i} \in \mathcal{L}_{k_i}, B_{k_i} \notin \mathcal{L}_k}^{l} B_{k_i} \right\| < \delta \quad \forall \delta > 0.$$

Так как A принадлежит $\mathcal{L}_k$, то согласно вышеизложенному $A = \int_{S^1} \sigma_0(z)(A) z^{-k} d\mu(z)$. Отсюда получаем

$$\|A\| = \left\| \int\limits_{S^1} \sigma_0(z) \left(A - \sum_{i=1, B_{k_i} \in \mathcal{L}_{k_i}}^{l} B_{k_i} \right) z^{-k} d\mu(z) \right\| \leq$$

$$\leq \sup_{z \in S^1} \left\| \sigma_0(z) \left(A - \sum_{i=1, B_{k_i} \in \mathcal{L}_{k_i}}^{l} B_{k_i} \right) \right\| \leq \delta.$$

Последнее означает, что алгебра Теплица является $\mathbb{Z}$-градуированной алгеброй по системе $\{\mathcal{L}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

Аналогичным образом можно доказать следующую лемму.

Лемма 3. *Справедливо тождество*

$$\mathcal{T}_m = \overline{\bigoplus_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}_{km}},$$

где $\mathcal{L}_{jm} = \left\{ A \in \mathcal{T};\ \sigma_0(z)(A) = z^{jm} A \ \ \forall z \in S^1 \right\}$.

Определение 2 [6]. *Пусть R — кольцо с единицей. Левым R-модулем называется абелева группа M с операцией умножения на элементы кольца $R \colon R \times M \longrightarrow M$, $(r, m) \longrightarrow rm$, которая удовлетворяет следующим условиям*:

1) $(r_1 r_2) m = r_1 (r_2 m)\ \forall m \in M,\ \forall r_1, r_2 \in R$,

2) $1m = m\ \forall m \in M$,

3) $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2\ \forall m_1, m_2 \in M,\ \forall r \in R$,

4) $(r_1 + r_2) m = r_1 m + r_2 m\ \forall m \in M,\ \forall r_1, r_2 \in R$.

Аналогичным образом определяется правый модуль.

Определение 3. *Пусть A — C^*-алгебра. Правый предгильбертов A-модуль — это комплексное линейное пространство E, наделенное правой A-модульной структурой и A-значным скалярным произведением*

$$\langle \, , \rangle \colon E \times E \to A,$$

которое удовлетворяет следующим условиям:

1) $\langle x, \alpha \cdot y + \beta \cdot z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle$ *для любых* $x, y, z \in E,\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

2) $\langle x, ya \rangle = \langle x, y \rangle a$ *для любых* $x, y \in E,\ a \in A$,

3) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*$ *для любых* $x, y \in E$,

4) $\langle x, x \rangle \geq 0,\ \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x \in E$.

Замыкая предгильбертов A-модуль E по норме $\|v\|\|_E = \sqrt{\|\langle v, v \rangle\|}$, получаем гильбертов E-модуль над C^*-алгеброй A.

Теорема 2. *C^*-алгебра $\mathcal{T}_m$ является предгильбертовым $\mathcal{L}_0$-модулем.*

Доказательство. Рассмотрим действие $\mathcal{L}_0$ на $\mathcal{T}_m$:

$$\mathcal{L}_0 \times \mathcal{T}_m \to \mathcal{T}_m, \qquad \mathcal{T}_m \times \mathcal{L}_0 \to \mathcal{T}_m.$$

Поскольку индекс любого элемента из $\mathcal{L}_0$ равен нулю и $\mathcal{L}_0$ — комутативная алгебра, то $A \cdot B, B \cdot A \in \mathcal{T}_m$, где $A \in \mathcal{T}_m$, $B \in \mathcal{L}_0$. Таким образом, $\mathcal{T}_m$ является $\mathcal{L}_0$-модулем. Покажем, что $\mathcal{T}_m$ является предгильбертовым $\mathcal{L}_0$-модулем.

Определим скалярное произведение

$$\langle A, B\rangle = \left(\int\limits_{S^1} \sigma_0(z)(A^*)\sigma_0(z)(B)d\mu\right), \quad A, B \in \mathcal{T}_m. \tag{8}$$

Согласно лемме 3 $A = \sum_{k\in\mathbb{Z}, A_{km}\in\mathcal{L}_{km}} A_{km},\ B = \sum_{k\in\mathbb{Z}, B_{km}\in\mathcal{L}_{km}} B_{km}$, следовательно,

$$\langle A, B\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}, A_{km}\in\mathcal{L}_{km}, B_{km}\in\mathcal{L}_{km}} \left(\int\limits_{S^1} \sigma_0(z)(A^*_{km})\sigma_0(z)(B_{km})d\mu\right).$$

Так как $A_{km},\ B_{km}$ принадлежит $\mathcal{L}_{km}$, то $\operatorname{ind}(A^*_{km}B_{km}) = -km + km = 0$, следовательно, определенное выше скалярное произведение является $\mathcal{L}_0$-значным. Нетрудно проверить, что скалярное произведение, определенное уравнением (8), удовлетворяет всем условиям определения 3. Таким образом, $\mathcal{T}_m$ является предгильбертовым $\mathcal{L}_0$-модулем.

Определение 4 [6]. *C^*-алгебра A называется ядерной, если для любой C^*-алгебры B на $A \otimes B$ существует единственная норма, по которой она превращается в C^*-алгебру.*

Лемма 4. *Для любого $m \in \mathbb{N}$ C^*-алгебра $\mathcal{T}_m$ является ядерной алгеброй.*

Доказательство. В работе [12] показано существование короткой точной последовательности

$$0 \to \mathcal{K}_m \to \mathcal{T}_m \to C(S^1) \to 0,$$

где $\mathcal{K}_m = K(H_1) \oplus \ldots \oplus K(H_m)$. Поскольку $K(H_i)$ — алгебра компактных операторов на гильбертовом пространстве H_i — является ядерной C^*-алгеброй (см. пример 6.3.2 [6]), то $\mathcal{K}_m$ также является ядерной алгеброй. Кроме того, $C(S^1)$ ядерная алгебра, так как любая коммутативная C^*-алгебра ядерная (см. теорема 6.4.15 [6]). Используя тот факт, что расширение ядерной C^*-алгебры по ядерной C^*-алгебре является ядерной C^*-алгеброй (см. теорему 6.3.2 [6]), получаем, что $\mathcal{T}_m$ — ядерная C^*-алгебра.

Поскольку для любого натурального l $M_l(\mathbb{C})$ ядерная алгебра (см. теорему 6.3.9 [6]), то согласно теореме 6.5.2 [6], существует короткая точная последовательность

$$0 \to \mathcal{K}_m \otimes M_l(\mathbb{C}) \to \mathcal{T}_m \otimes M_l(\mathbb{C}) \to C(S^1) \otimes M_l(\mathbb{C}) \to 0.$$

Так как $A \otimes M_l(\mathbb{C}) \cong M_l(A)$, то

$$0 \to M_l(\mathcal{K}_m) \to M_l(\mathcal{T}_m) \to M_l(C(S^1)) \to 0.$$

Аналогично, учитывая существование расщепляемой короткой точной последовательности (3), убеждаемся в существовании следующей короткой точной расщепляемой последовательности:

$$0 \to M_l\left(\bigcap_{k=1}^{n} \mathcal{J}_{i_k}\right) \to M_l(\mathcal{T}_m) \to M_l(\mathcal{T}_n) \to 0.$$

Докажем предварительную лемму о подалгебре алгебры $\mathcal{T}_m$, которая порождается $\mathcal{T}(m)$ и проекторами $P_1, \ldots, P_i$. Этот результат будет использован в следующем пункте.

Лемма 5. *C^*-алгебра, порожденная $\mathcal{T}(m)$ и проекторами $P_1, \ldots, P_l$, $1 \leq l < m$, имеет вид*

$$C^*\big[\mathcal{T}(m), P_1, \ldots, P_l\big] = \mathcal{T}(m) + \mathcal{K}_0,$$

где $\mathcal{K}_0 = \big\{K_1 \oplus K_2 \oplus \ldots \oplus K_l \oplus K_{l+1} \oplus \ldots \oplus K_{l+1} = K_1 \oplus K_2 \oplus \ldots \oplus K_l \oplus (m-l)K_{l+1},$ $K_i \in \mathcal{K},\ i = 1, \ldots, l+1\big\}$.

Доказательство. Сначала покажем, что $\mathcal{K}_{C^*[\mathcal{T}(m), P_1, \ldots, P_l]} = \mathcal{K}_0$. Поскольку алгебра $\mathcal{T}(m)$ действует неприводимо на H_l, $l = 1, \ldots, m$, из разложения (1) и содержит $T^{ml}T^{*ml} - T^{m(l+1)}T^{*m(l+1)}$ — компактный оператор на H_l, то согласно теореме 2.4.9 [6], она содержит весь идеал компактных операторов на H_l. Кроме того, так как алгебра $\mathcal{T}(m)$ на пространствах H_l, $l = 1, \ldots, m$, действует одинаково, то $\mathcal{K}(m) = \{K \oplus \ldots \oplus K = mK,\ K \in \mathcal{K}\}$.

В работе [12] показано, что

$$P_j|_{H_l} = \begin{cases} I|_{H_l}, & l \geq j, \\ T^mT^{*m}|_{H_l}, & l < j. \end{cases}$$

Поэтому разности $P_k - P_i$, $1 \leq k < i \leq l$, являются конечномерными операторами на H_j, $1 \leq j \leq l$, и, следовательно, компактными, а на H_j, $l+1 \leq j < m$, $P_k - P_i = 0$, $1 \leq k < i \leq l$. Таким образом, $\mathcal{K}_{C^*[\mathcal{T}(m), P_1, \ldots, P_l]} = \big\{K_1 \oplus K_2 \oplus \ldots \oplus K_l \oplus K_{l+1} \oplus \ldots \oplus K_{l+1} = K_1 \oplus K_2 \oplus \ldots \oplus K_l \oplus (m-l)K_{l+1},\ K_i \in \mathcal{K},\ i = 1, \ldots, l+1\big\} = \mathcal{K}_0$.

Осталось доказать, что P_j принадлежит $\mathcal{T}(m) + \mathcal{K}_0$. Имеем

$$P_j = P_j|_{H_1} \oplus \ldots \oplus P_j|_{H_j} \oplus P_j|_{H_{j+1}} \oplus \ldots \oplus P_j|_{H_m} =$$
$$= T^mT^{*m}|_{H_1} \oplus \ldots \oplus T^mT^{*m}|_{H_j} \oplus I|_{H_{j+1}} \oplus \ldots \oplus I|_{H_m} =$$
$$= (T^mT^{*m}|_{H_1} \oplus \ldots \oplus T^mT^{*m}|_{H_m}) +$$
$$+ (0 \oplus \ldots \oplus 0 \oplus (I - T^mT^{*m})|_{H_{j+1}} \oplus \ldots \oplus (I - T^mT^{*m})|_{H_m}) =$$
$$= C + D,$$

где $C = T^mT^{*m}|_{H_1} \oplus \ldots \oplus T^mT^{*m}|_{H_m} \in \mathcal{T}(m)$ и $D = 0 \oplus \ldots \oplus 0 \oplus (I - T^mT^{*m})|_{H_{j+1}} \oplus \ldots \oplus (I - T^mT^{*m})|_{H_m} \in \mathcal{K}_0$, так как $(I - T^mT^{*m})|_{H_l}$ является конечномерным оператором на H_l и, следовательно, компактным. Таким образом, $P_j = C + D$, $1 \leq j \leq l$, где $C \in \mathcal{T}(m)$, $D \in \mathcal{K}_0$.

4. Тип алгебры. В работе [15] мы ввели определение типа алгебры для C^*-алгебр.

Определение 5 (тип алгебры). *Пусть заданы алгебры A и B такие, что $A \subset B$. Рассмотрим цепочку алгебр*

$$A \subsetneq A_1 \subsetneq \ldots \subsetneq A_{n-1} \subsetneq B.$$

Цепочка называется неуплотняемой, если нельзя вложить другую алгебру в эту цепочку. Типом алгебры B относительно алгебры A называется максимальная длина неуплотняемых цепочек, содержащихся между алгебрами A и B, и обозначается через $t_B(A)$.

Иными словами, если $t_B(A) = n$, то в цепочке

$$A \subseteq C_1 \subseteq C_2 \subseteq \ldots \subseteq C_n \subset B, \quad n \geq 1,$$

какие-нибудь две алгебры обязательно совпадают. Будем говорить, что алгебра B является алгеброй конечного типа относительно алгебры A, если $t_B(A) < \infty$. Если A — максимальная собственная подалгебра в B, то будем считать, что $t_B(A) = 1$.

Лемма 6. *Тип алгебры* $\mathcal{K}_0$ *относительно алгебры* $\mathcal{K}(m)$ *равен* l:

$$t_{\mathcal{K}_0}(\mathcal{K}(m)) = l.$$

Доказательство. Рассмотрим оператор $F_1 : \mathcal{K}_0 \to \mathcal{K}(m)$, который действует следующим образом:

$$F_1(A) = A_1 \oplus A_1 \oplus \ldots \oplus A_1, \qquad \text{где} \quad A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_l \oplus A_{l+1} \oplus \ldots \oplus A_{l+1}.$$

Обозначим

$$J_1 = \big\{B_1 - F_1(B_1) : \text{для всех } B_1 \in \mathcal{K}_0\big\},$$

$$\mathcal{K}_1^{(j)}(m-j) = \big\{0 \oplus \oplus \ldots \oplus 0 \oplus A_{j+1} \oplus \ldots \oplus A_{j+1},\ A_{j+1} \in \mathcal{K}\big\},$$

где индекс ${}_1^{(j)}(m-j)$ показывает, что первые j слагаемых из m начиная с первого элемента равны нулю, а остальные $m-j$ являются копией одного и того же элемента. Пусть $F_2 : J_1 \to \mathcal{K}_1^{(1)}(m-1)$ — оператор, который действует следующим образом:

$$F_2(0 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_l \oplus \ldots \oplus A_{l+1}) = 0 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_2.$$

Обозначим $J_2 = \{B_2 - F_2(B_2) : \text{для всех } B_2 \in J_1\}$. Продолжая этот процес, на l-м шаге получаем $F_l : J_{l-1} \to \mathcal{K}_1^{(l)}(m-l) : F_l(0 \oplus 0 \oplus \ldots \oplus A_l \oplus A_{l+1} \oplus \ldots \oplus A_{l+1}) = 0 \oplus 0 \oplus \ldots \ldots \oplus A_{l+1} \oplus \ldots \oplus A_{l+1}$. Обозначим $J_l = \{B_l - F_l(B_l) : \text{для всех } B_l \in J_{l-1}\}$. С другой стороны, согласно вышеприведенному определению $J_l = \mathcal{K}_1^{(l)}(m-l)$. Ясно, что $\mathcal{K}(m) \cap J_l = \{0\}$.

Согласно нашему построению можно записать $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}(m) \oplus J_1$, где под прямой суммой понимается прямая сумма банаховых пространств. С другой стороны, $J_1 = \mathcal{K}_1^{(1)}(m-1) \oplus J_2$, а $J_2 = \mathcal{K}_1^{(2)}(m-2) \oplus J_3, \ldots, J_{l-1} = \mathcal{K}_1^{(l)}(m-l+1) \oplus J_l$. Отсюда получаем $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}(m) \oplus \oplus \mathcal{K}_1^{(1)}(m-1) \oplus \mathcal{K}_1^{(2)}(m-2) \oplus \ldots \oplus \mathcal{K}_1^{(l)}(m-l)$.

Таким образом,

$$\mathcal{K}(m) \subset \mathcal{K}(m) \oplus \mathcal{K}_1^{(1)}(m-1) \subset \mathcal{K}(m) \oplus \mathcal{K}_1^{(1)}(m-1) \oplus \mathcal{K}_1^{(2)}(m-2) \subset \ldots$$

$$\ldots \subset \mathcal{K}(m) \oplus \mathcal{K}_1^{(1)}(m-1) \oplus \mathcal{K}_1^{(2)}(m-2) \oplus \ldots \oplus \mathcal{K}_1^{(l-1)}(m-l+1) \subset \mathcal{F}. \tag{9}$$

Сначала покажем, что (9) — неуплотняемая цепочка, которая содержит $\mathcal{K}(m)$ и содержится в $\mathcal{K}_0$. Для этого достаточно показать, что $\mathcal{K}(m) \oplus \mathcal{K}_1^{(1)}(m-1)$ является собственной подалгеброй в $\mathcal{K}(m) \oplus \mathcal{K}_1^{(1)}(m-1) \oplus \mathcal{K}_1^{(2)}(m-2)$. Действительно, $\mathcal{K}(m) \oplus \mathcal{K}_1^{(1)}(m-1) = \{A_0 \oplus (m-1)A_1\ \forall A_0, A_1 \in \mathcal{K}\} \subset \{B_0 \oplus B_1 \oplus (m-2)B_2\ \forall B_0, B_1, B_2 \in \mathcal{K}\} = \mathcal{K}(m) \oplus \mathcal{K}_1^{(1)}(m-1) \oplus \mathcal{K}_1^{(2)}(m-2)$. Таким образом, мы доказали, что $t_{\mathcal{K}_0}(\mathcal{K}(m)) \geq l$. Покажем, что $t_{\mathcal{K}_0}(\mathcal{K}(m)) = l$. Последнее докажем методом от противного. Для определенности предположим, что $t_{\mathcal{K}_0}(\mathcal{K}(m)) = l+1$. Это означает, что существует неуплотняемая максимальная цепочка длины $l+1$:

$$\mathcal{K}(m) \subset D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset D_l \subset \mathcal{K}_0.$$

В качестве D_1 можно использовать любую из алгебр

$$\Big\{K_1^0 \oplus K_2^0 \oplus \ldots \oplus K_r^0 \oplus (m-r)K_{r+1}^0,\ 1 \le r \le l,\ K_i^0 \in \mathcal{K},\ i = 1, 2, \ldots, l+1\Big\}. \tag{10}$$

Если в D_1 $r \neq 1$, то цепочка $\mathcal{K}(m) \subset D_1$ уплотняемая, следовательно, $r = 1$. Если в качестве D_2 рассматривать алгебру, которая получается из (10) при $r > 2$, то цепочка $D_1 \subset D_2$ будет уплотняемой, следовательно, D_2 получается из (10) при $r = 2$. Аналогичным образом продолжая этот процесс, на $(l-1)$-м шаге получаем $D_{l-1} = \mathcal{K}_0$. Пришли к противоречию, следовательно, (9) является максимальной неуплотняемой цепочкой, т. е.

$$t_{\mathcal{K}_0}(\mathcal{K}(m)) = l.$$

***Следствие* 1.** *Тип алгебры $\mathcal{K}_m$ относительно алгебры $\mathcal{K}(m)$ равен $m-1$:*

$$t_{\mathcal{K}_m}(\mathcal{K}(m)) = m-1.$$

Доказательство. Как и в доказательстве леммы 6, $\mathcal{K}_m = \mathcal{K}(m) \oplus \mathcal{K}_1^{(1)}(m-1) \oplus \mathcal{K}_1^{(2)}(m-2) \oplus \ldots \oplus \mathcal{K}_1^{(m-1)}(1)$. Отсюда следует неуплотняемая цепочка

$$\mathcal{K}(m) \subset \mathcal{K}(m) \oplus \mathcal{K}_1^{(1)}(m-1) \subset \mathcal{K}(m) \oplus \mathcal{K}_1^{(1)}(m-1) \oplus K_1^{(2)}(m-2) \subset$$

$$\subset \ldots \mathcal{K}(m) \oplus \mathcal{K}_1^{(1)}(m-1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{K}_1^{(m-2)}(2) \subset \mathcal{K}_m,$$

т. е.

$$t_{\mathcal{K}_m}(\mathcal{K}(m)) = m-1.$$

***Следствие* 2.** *Существуют такие неуплотняемые цепочки длины $m-1$:*

$$\mathcal{K}(m) \subset \mathcal{K}(m) \oplus \mathcal{K}_2^{(1)}(m-1) \subset \mathcal{K}(m) \oplus \mathcal{K}_2^{(1)}(m-1) \oplus \mathcal{K}_2^{(2)}(m-2) \subset \ldots$$

$$\ldots \subset \mathcal{K}(m) \oplus \mathcal{K}_2^{(1)}(m-1) \oplus \mathcal{K}_2^{(2)}(m-2) \oplus \mathcal{K}_2^{(m-1)}(1) = \mathcal{K}_m,$$

....

$$\mathcal{K}(m) \subset \mathcal{K}(m) \oplus \mathcal{K}_m^{(1)}(m-1) \subset \mathcal{K}(m) \oplus \mathcal{K}_m^{(1)}(m-1) \oplus \mathcal{K}_m^{(2)}(m-2) \subset \ldots$$

$$\ldots \subset \mathcal{K}(m) \oplus \mathcal{K}_m^{(1)}(m-1) \oplus \mathcal{K}_m^{(2)}(m-2) \oplus \mathcal{K}_m^{(m-1)}(1) = \mathcal{K}_m.$$

Имея в виду отождествление, приведенное в начале пункта 2, в частности, используя формулы (4) – (6), лемму 5 можно сформулировать следующим образом:

C^*-алгебра, порожденная $\mathcal{T}(m)$ и проекторами $P_1, \ldots, P_l$, $1 \le l < m$, имеет вид

$$C^*[\mathcal{T}(m), P_1, \ldots, P_l] = \mathcal{T}(m) + \big(\mathcal{K}_1^{(1)}(m-1) \oplus \mathcal{K}_1^{(2)}(m-2) \oplus \ldots \oplus \mathcal{K}_1^{(l)}(m-l)\big). \tag{11}$$

Теорема 3. *Тип алгебры $\mathcal{T}_m$ относительно алгебры $\mathcal{T}(m)$ равен $m-1$:*

$$t_{\mathcal{T}_m}(\mathcal{T}(m)) = m-1.$$

Доказательство. Рассмотрим цепочку

$$\mathcal{T}(m) \subset C^*[\mathcal{T}(m), P_1] \subset$$

$$\subset C^*[\mathcal{T}(m), P_1, P_2] \subset \ldots \subset C^*[\mathcal{T}(m), P_1, \ldots, P_{m-2}] \subset$$

$$\subset C^*[\mathcal{T}(m), P_1, \ldots, P_{m-2}, P_{m-1}] = \mathcal{T}_m.$$

Покажем неуплотняемость этой цепочки, откуда и будет следовать доказательство теоремы. С учетом равенства (11), приведенная выше цепочка принимает вид

$$\mathcal{T}(m) \subset \mathcal{T}(m) + \mathcal{K}_1^{(1)}(m-1) \subset \mathcal{T}(m) + \big(\mathcal{K}_1^{(1)}(m-1) \oplus \mathcal{K}_1^{(2)}(m-2)\big) \subset \ldots$$

$$\ldots \subset \mathcal{T}(m) + \big((\mathcal{K}_1^{(1)}(m-1) \oplus \mathcal{K}_1^{(2)}(m-2) \oplus \ldots \oplus \mathcal{K}_1^{(m-1)}(1)\big) \subset \mathcal{T}(m) + \mathcal{K}_m. \qquad (12)$$

С другой стороны, согласно следствию 1 цепочка $\mathcal{K}_1^{(1)}(m-1) \subset \mathcal{K}_1^{(1)}(m-1) \oplus \mathcal{K}_1^{(2)}(m-2) \subset \ldots \ldots \subset (\mathcal{K}_1^{(1)}(m-1) \oplus \mathcal{K}_1^{(2)}(m-2) \oplus \ldots \oplus \mathcal{K}_1^{(m-1)}(1) \subset \mathcal{K}_m$ неуплотняема и $t_{\mathcal{K}_m}\big(\mathcal{K}_1^{(1)}(m-1)\big) = m-2$. Из вышеизложенного и из того, что $\mathcal{T}(m) \cap \mathcal{K}_1^{(i)}(m-i) = \{0\}$, следует, что $t_{\mathcal{T}_m}(\mathcal{T}(m) + \mathcal{K}_1^{(1)}(m-1)) = m-2$. Поскольку $\mathcal{T}(m)$ — собственная подалгебра в $\mathcal{T}(m) + \mathcal{K}_1^{(1)}(m-1)$, то $t_{\mathcal{T}_m}(\mathcal{T}(m)) = m-1$.

***Следствие* 3.** *Существуют следующие неуплотняемые цепочки длины $m-1$:*

$$\mathcal{T}(m) \subset C^*[\mathcal{T}(m), P_2] \subset$$

$$\subset C^*[\mathcal{T}(m), P_1, P_2] \subset \ldots \subset C^*[\mathcal{T}(m), P_1, \ldots, P_{m-1}] = \mathcal{T}_m,$$

....

$$\mathcal{T}(m) \subset C^*[\mathcal{T}(m), P_{m-1}] \subset$$

$$\subset C^*[\mathcal{T}(m), P_{m-1}, P_{m-2}] \subset \ldots \subset C^*[\mathcal{T}(m), P_2, \ldots, P_{m-1}] = \mathcal{T}_m.$$

Теорема 4. *Тип алгебры $\mathcal{T}_m$ относительно алгебры $\mathcal{T} \oplus \mathcal{T} \oplus \ldots \oplus \mathcal{T}$ конечен и равен $m-1$:*

$$t_{\mathcal{T} \oplus \mathcal{T} \oplus \ldots \oplus \mathcal{T}}(\mathcal{T}_m) = m-1 < \infty.$$

Доказательство. Рассмотрим цепочку алгебр

$$\mathcal{T}_m = \big\{A \colon A = (B+K_1) \oplus \ldots \oplus (B+K_m),\ \ B \in \mathcal{T}, K_1, \ldots, K_m \in \mathcal{K}\big\} \subset$$

$$\subset \big\{(B_1+K_1) \oplus (B+K_2) \oplus \ldots \oplus (B+K_m)\ \forall B_1 \in \mathcal{T},\ B \in \mathcal{T},\ K_1, \ldots, K_m \in \mathcal{K}\big\} \subset$$

$$\subset \big\{(B_1+K_1) \oplus (B_2+K_2) \oplus (B+K_3) \oplus \ldots \oplus (B+K_m)$$

$$\forall B_1, B \in \mathcal{T},\ B_2 \in \mathcal{T},\ K_1, \ldots, K_m \in \mathcal{K}\big\} \subset \ldots$$

$$\ldots \subset \big\{(B_1+K_1) \oplus (B_2+K_3) \oplus (B_3+K_3) \oplus \ldots$$

$$\ldots \oplus (B_{m-2} + K_{m-2}) \oplus (B + K_{m-1}) \oplus (B + K_m)$$

$$\forall B_1, \ldots, B_{m-2} \in \mathcal{T},\ B \in \mathcal{T},\ K_1, \ldots, K_m \in \mathcal{K}\Big\} \subset$$

$$\subset \Big\{(B_1 + K_1) \oplus (B_2 + K_3) \oplus (B_3 + K_3) \oplus \ldots$$

$$\ldots \oplus (B_{m-2} + K_{m-2}) \oplus (B_{m-1} + K_{m-1}) \oplus (B + K_m)$$

$$\forall B_1, \ldots, B_{m-1} \in \mathcal{T},\ B \in \mathcal{T},\ K_1, \ldots, K_m \in \mathcal{K}\Big\} =$$

$$= \mathcal{T} \oplus \mathcal{T} \oplus \ldots \oplus \mathcal{T}. \qquad (13)$$

Неуплотняемость данной цепочки можно доказать, как и в доказательстве леммы 6. Доказательство того, что не существует неуплотняемая цепочка длины больше чем $m-1$, которая содержит $\mathcal{T}_m$ и содержится в $\mathcal{T} \oplus \mathcal{T} \oplus \ldots \oplus \mathcal{T}$, приведем методом от противного. Предположим, что существует неуплотняемая цепочка длины m:

$$\mathcal{T}_m \subset \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{A}_{m-2} \subset \mathcal{A}_{m-1} \subset \mathcal{T} \oplus \mathcal{T} \oplus \ldots \oplus \mathcal{T}.$$

Как известно, каждый элемент алгебры $\mathcal{T}_m$ имеет вид

$$\Big\{(B \oplus B \oplus B \oplus \ldots \oplus B) + (K_1 \oplus \ldots \oplus K_m), B \in \mathcal{T}, K_1, \ldots, K_m \in \mathcal{K}\Big\}. \qquad (14)$$

Если в этом выражение один B заменить на другой элемент из алгебры Теплица, то получим другие алгебры, любая из которых может быть использована в качестве $\mathcal{A}_1$. Как и в доказательстве леммы 6, положим $\mathcal{A}_1 = \Big\{(B \oplus D_1 \oplus B \oplus \ldots \oplus B) + (K_1 \oplus \ldots \oplus K_m), B, D_1 \in \mathcal{T}, K_1, \ldots, K_m \in \in \mathcal{K}\Big\}$. Таких алгебр всего m. Если в (14) заменить несколько B на разные элементы из алгебры Теплица и рассматривать полученную алгебру в качестве $\mathcal{A}_1$, то цепочка $\mathcal{T}_m \subset \mathcal{A}_1$ будет уплотняемой. $\mathcal{A}_2$ получим, если в выражении mB два элемента заменить разными элементами из алгебры Теплица. Продолжая этот процесс, убеждаемся, что $\mathcal{A}_{m-1} = \mathcal{T} \oplus \mathcal{T} \oplus \ldots \oplus \mathcal{T}$. Следовательно, цепочка (13) максимальна. Последнее означает, что $t_{\mathcal{T} \oplus \mathcal{T} \oplus \ldots \oplus \mathcal{T}}(\mathcal{T}_m) = m - 1$.

***Следствие* 4.** *Справедливо тождество*

$$\Big\{(B_1 + K_1) \oplus (B + K_2) \oplus \ldots \oplus (B + K_m),\ B_1, B \in \mathcal{T},\ K_1, \ldots, K_m \in \mathcal{K}\Big\} = \mathcal{T} \oplus \mathcal{T}_{m-1}.$$

Доказательство. Действительно, используя (9), (11), (12), получаем

$$(B_1 + K_1) \oplus (B + K_2) \oplus \ldots \oplus (B + K_m) =$$

$$= (B_1 + K_1) \oplus ((B \oplus \ldots \oplus B) + (K_2 \oplus \ldots \oplus K_m)) \in \mathcal{T} \oplus \mathcal{T}_{m-1}.$$

Обратное включение очевидно.

Таким образом, на основании вышеизложенного, цепочка (13) принимает вид

$$\mathcal{T}_m \subset \mathcal{T} \oplus \mathcal{T}_{m-1} \subset \mathcal{T} \oplus \mathcal{T} \oplus \mathcal{T}_{m-2} \subset \ldots \subset \mathcal{T} \oplus \mathcal{T} \oplus \ldots \oplus \mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T} \oplus \mathcal{T} \oplus \ldots \oplus \mathcal{T}.$$

Автор выражает искреннюю благодарность Г. С. Аршаковичу за полезные советы, которые способствовали улучшению статьи.

Литература

1. *Арзуманян В. А.* *-Представления инверсных полугрупп // Изв. АН АрмССР. – 1976. – **218**. – С. 361 – 396.
2. *Coburn L. A.* The C*-algebra generated by an isometry // Bull. Amer. Math. Soc. – 1967. – **73**. – P. 722 – 726.
3. *Douglas R. G.* On the C*-algebra of a one-parameter semigroup of isometries // Acta Math. – 1972. – **128**. – P. 143 – 152.
4. *Murphy G. J.* Ordered groups and Toeplitz algebras // J. Operator Theory. – 1987. – **18**. – P. 303 – 326.
5. *Aukhadiev M. A., Tepoyan V. H.* Isometric representations of totally ordered semigroups // Lobachevskii J. Math. – 2012. – **33**, № 3. – P. 239 – 243.
6. *Мерфи Дж.,* C*-алгебра и теория операторов. – М.: Факториал, 1997.
7. *Davidson K. R.* C^*-algebras by example // Fields Institute Monograph. – AMS, 1996. – **6**.
8. *Jang S. Y.* Uniqueness property of C*-algebras like the Toeplitz algebras // Trends Math. – 2003. – **6**. – P. 29 – 32.
9. *Григорян С. А., Салахутдинов А. Ф.* C*-алгебры, порожденные полугруппами с сокращением // Сиб. мат. журн. – 2010. – **51**, № 1. – С. 16 – 25.
10. *Овсепян К. Г.* О C^*-алгебрах порожденных инверсными подполугруппами бициклической полугруппы // Изв. НАН Армении. Математика. – 2014. – **49**, № 5. – С. 67 – 75.
11. *Липачева Е. В., Овсепян К. Г.* Структура подалгебр алгебры Теплица, неподвижных относительно конечной группы автоморфизмов // Изв. вузов. Математика. – 2015. – №6. – С. 14 – 23.
12. *Hovsepyan K. H., Lipacheva E. V.* The structure of invariant ideals of some subalgebras of Toeplitz algebra // J. Contemp. Math. Anal. – 2015. – **50**, № 2. – P. 70 – 79.
13. *Hovsepyan K. H.* The C*-algebra $\mathcal{T}_m$ as a crossed product // Proc. Yerevan State Univ., Phys. and Math. Sci. – 2014. – №3. – P. 24 – 30.
14. *Липачева Е. В., Овсепян К. Г.* Автоморфизмы некоторых подалгебр алгебры Теплица // Сиб. мат. журн. – 2016. – **57**, № 3. – С. 666 – 674.
15. *Овсепян К. Г.* Подалгебры алгебры Теплица и тип алгебры // Тр. Мат. центра им. Н. И. Лобачевского. – 2013. – Вып. 47. – С. 136 – 138.

Получено 05.04.17