УДК 517.9

Е. А. Севостьянов (Житомир. гос. ун-т им. И. Франко),
Е. А. Петров (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Славянск)

О РАВНОСТЕПЕННОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ ГОМЕОМОРФИЗМОВ КЛАССОВ СОБОЛЕВА И ОРЛИЧА – СОБОЛЕВА В ЗАМЫКАНИИ ОБЛАСТИ

We investigate the behavior of homeomorphisms of the Orlicz – Sobolev classes in the closure of a domain. The theorems on equicontinuity of the indicated classes are obtained in terms of the prime ends of regular domains. In particular, it is shown that indicated classes are equicontinuous in domains with certain restrictions imposed on their boundaries provided that the corresponding inner dilatation of order p has a majorant of finite mean oscillation at every point. We also prove theorems on the (pointwise) equicontinuity of the analyzed classes in the case of locally connected boundaries.

Вивчається поведінка гомеоморфізмів класів Орліча – Соболєва в замиканні заданої області. В термінах простих кінців регулярних областей отримано теореми про одностайну неперервність вказаних класів. Зокрема, доведено, що в областях, межі яких задовольняють певні обмеження, зазначені класи є одностайно неперервними, як тільки їх внутрішня дилатація порядку p має мажоранту скінченного середнього коливання в кожній точці. Отримано також теореми про (поточкову) одностайну неперервність вказаних класів у випадку локально зв'язних меж.

1. Введение. Настоящая статья посвящена изучению глобального поведения классов Соболева и Орлича – Соболева, а также кольцевых и нижних кольцевых отображений, тесно связанных с их исследованием. В частности, эти исследования связаны с непрерывным граничным продолжением гомеоморфизмов в терминах так называемых простых концов, в связи с чем следует отметить на недавние публикации [1, 2], а также классические результаты Р. Някки [3]. Основной целью статьи является получение результатов о равностепенной непрерывности указанных классов в замыкании области в смысле простых концов, чему посвящены многие исследования квазиконформных отображений и отображений с конечным искажением (см., например, [4] и [5], разд. 3.7). Равностепенная непрерывность, полученная для локально связных границ в последнем пункте работы, понимается в поточечном смысле. Мы ограничиваемся здесь рассмотрением гомеоморфизмов, при этом в качестве коэффициента искажения рассматриваем так называемую внутреннюю дилатацию порядка α, $\alpha \in (n-1, n]$. В качестве области в образе при отображении рассматривается фиксированная область D' с „хорошей" границей, а в качестве области D определения гомеоморфизмов — так называемая регулярная область, отличающаяся от «хорошей» на фиксированное квазиконформное отображение. Согласно теореме Римана, в качестве примера регулярной области на плоскости можно рассматривать произвольную ограниченную односвязную область.

Все необходимые определения, касающиеся понятия и свойств простых концов, могут быть найдены в работах [1, 2], и потому не приводяться. Мы также опускаем понятия, связанные с поверхностью, интегралом по поверхности и модулями семейств кривых и поверхностей. Все эти понятия могут быть найдены в монографиях [6, 7]. Следуя [3], будем говорить, что конец K является *простым концом*, если K содержит такую цепь разрезов $\{\sigma_m\}$, что

$$\lim_{m\to\infty} M(\Gamma(C,\sigma_m,D)) = 0$$

для некоторого континуума C в D, где M — модуль семейства $\Gamma(C,\sigma_m,D)$.

Будем говорить, что граница области D в $\mathbb{R}^n$ является *локально квазиконформной*, если каждая точка $x_0 \in \partial D$ имеет окрестность U, которая может быть отображена квазиконформным отображением φ на единичный шар $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ так, что $\varphi(\partial D \cap U)$ является пересечением $\mathbb{B}^n$ с координатной гиперплоскостью. Говорим, что ограниченная область D в $\mathbb{R}^n$ *регулярна*, если D может быть квазиконформно отображена на область с локально квазиконформной границей. В силу леммы 1 [2] каждый простой конец P регулярной области D в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, содержит цепь разрезов σ_m, лежащую на сферах S_m с центром в некоторой точке $x_0 \in \partial D$ и евклидовыми радиусами $r_m \to 0$ при $m \to \infty$.

Как следует из теоремы 4.1 в [3], при квазиконформных отображениях g области D_0 с локально квазиконформной границей на область D в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, существует естественное взаимно однозначное соответствие между точками ∂D_0 и простыми концами области D и, кроме того, предельные множества $C(g, b)$, $b \in \partial D_0$, совпадают с телом $I(P)$ соответствующих простых концов P в D.

Если $\overline{D}_P$ является пополнением регулярной области D ее простыми концами а g_0 — квазиконформным отображением области D_0 с локально квазиконформной границей на D, то оно естественным образом определяет в $\overline{D}_P$ метрику $\rho_0(p_1, p_2) = \left|\widetilde{g_0}^{-1}(p_1) - \widetilde{g_0}^{-1}(p_2)\right|$, где $\widetilde{g_0}$ — продолжение g_0 в $\overline{D_0}$, упомянутое выше.

Если g_* является другим квазиконформным отображением некоторой области D_* с локально квазиконформной границей на область D, то соответствующая метрика $\rho_*(p_1, p_2) = \left|\widetilde{g_*}^{-1}(p_1) - \widetilde{g_*}^{-1}(p_2)\right|$ порождает ту же самую сходимость и, следовательно, ту же самую топологию в $\overline{D}_P$, как и метрика ρ_0, поскольку $g_0 \circ g_*^{-1}$ является квазиконформным отображением между областями D_* и D_0, которое по теореме 4.1 из [3] продолжается до гомеоморфизма между $\overline{D_*}$ и $\overline{D_0}$.

В дальнейшем будем называть данную топологию в пространстве $\overline{D}_P$ *топологией простых концов* и понимать непрерывность отображений $F\colon \overline{D}_P \to \overline{D'}_P$ именно относительно этой топологии.

Пусть $\varphi\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ — неубывающая функция, f — локально интегрируемая вектор-функция n вещественных переменных $x_1, \ldots, x_n$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$, $f_i \in W^{1,1}_{\rm loc}$, $i = 1, \ldots, n$. Будем говорить, что $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ принадлежит классу $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$, (пишем $f \in W^{1,\varphi}_{\rm loc}$), если $\int_G \varphi\big(|\nabla f(x)|\big)\, dm(x) < \infty$ для любой компактной подобласти $G \subset D$, где $|\nabla f(x)| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)^2}$. Класс $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ называется классом *Орлича–Соболева*.

Для отображений класса $W^{1,1}_{\rm loc}$ и произвольного $\alpha \geq 1$ корректно определена так называемая *внутренняя дилатация* $K_{I,\alpha}(x, f)$ *отображения* f *порядка* α *в точке* x, определяемая равенствами

$$K_{I,\alpha}(x, f) = \begin{cases} \dfrac{|J(x, f)|}{l^{\alpha}\big(f'(x)\big)}, & J(x, f) \neq 0, \\ 1, & f'(x) = 0, \\ \infty, & \text{— в остальных случаях.} \end{cases} \tag{1}$$

Следуя [8] (разд. 7.22), будем говорить, что борелева функция $\rho\colon X \to [0, \infty]$, заданная в метрическом пространстве X с мерой μ, является *верхним градиентом* функции $u\colon X \to \mathbb{R}$, если для всех спрямляемых кривых γ, соединяющих произвольные точки x и $y \in X$, выполняется неравенство $|u(x)-u(y)|\le\int\limits_\gamma\rho\,|dx|$. Будем также говорить, что в указанном пространстве X выполняется $(1;\alpha)$-неравенство Пуанкаре, если найдутся постоянные $C\ge 1$ и $\tau>0$ такие, что для каждого шара $B\subset X$, произвольной ограниченной непрерывной функции $u\colon X\to\mathbb{R}$ и любого ее верхнего градиента ρ выполняется неравенство

$$\frac{1}{\mu(B)}\int\limits_B|u-u_B|d\mu(x)\le C\,(\mathrm{diam}\,B)\left(\frac{1}{\mu(\tau B)}\int\limits_{\tau B}\rho^\alpha d\mu(x)\right)^{1/\alpha},$$

где $u_B:=\dfrac{1}{\mu(B)}\displaystyle\int_B u\,d\mu(x)$. Метрическое пространство (X,d,μ) назовем *$\widetilde{Q}$-регулярным по Альфорсу* при некотором $\widetilde{Q}\ge 1$, если $\dfrac{1}{C}R^{\widetilde{Q}}\le\mu(B(x_0,R))\le CR^{\widetilde{Q}}$ при каждом $x_0\in X$, некоторой постоянной $C\ge 1$ и произвольном $R<\mathrm{diam}\,X$.

Всюду далее, если не оговорено противное, $Q(x)\colon\mathbb{R}^n\to[0,\infty]$ — измеримая по Лебегу функция такая, что $Q(x)\equiv 0$ при $x\notin D$ и $0<Q(x)<\infty$ при всех $x\in D$.

Для областей $D,\ D'\subset\mathbb{R}^n$, $b_0\in D$, $b_0'\in D'$ и произвольной измеримой по Лебегу функции $Q(x)\colon\mathbb{R}^n\to[0,\infty]$ обозначим символом $\mathfrak{F}_{\alpha,b_0,b_0',\varphi,Q}(D,D')$ семейство всех гомеоморфизмов $f\colon D\to D'$ класса $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ в D, $f(D)=D'$, таких, что $K_{I,\alpha}(x,f)\le Q(x)$ при почти всех $x\in D$ и $f(b_0)=b_0'$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть область D регулярна, область D' ограничена, имеет локально квазиконформную границу и, одновременно, является пространством, n-регулярным по Альфорсу относительно евклидовой метрики и меры Лебега в $\mathbb{R}^n$, в котором выполнено $(1;\alpha)$-неравенство Пуанкаре, $n-1<\alpha\le n$. Пусть также $C(f,P_1)\cap C(f,P_2)=\varnothing$ для произвольных различных простых концов $P_1,P_2\in E_D$ (где, как обычно, $C(f,P)$ обозначает предельное множество отображения f в точке P, а E_D — пространство простых концов области D). Предположим, $Q\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, заданная неубывающая функция $\varphi\colon[0,\infty)\to[0,\infty)$ удовлетворяет условию*

$$\int\limits_1^\infty\left(\frac{t}{\varphi(t)}\right)^{\frac{1}{n-2}}dt<\infty, \tag{2}$$

и для каждого $x_0\in\overline{D}$ выполнено одно из следующих условий:

1) *либо $Q\in FMO(\overline{D})$;*

2) *либо в каждой точке $x_0\in\overline{D}$ при некотором $\varepsilon_0=\varepsilon_0(x_0)>0$ и всех $0<\varepsilon<\varepsilon_0$*

$$\int\limits_\varepsilon^{\varepsilon_0}\frac{dt}{t^{\frac{n-1}{\alpha-1}}q_{x_0}^{\frac{1}{\alpha-1}}(t)}<\infty,\qquad\int\limits_0^{\varepsilon_0}\frac{dt}{t^{\frac{n-1}{\alpha-1}}q_{x_0}^{\frac{1}{\alpha-1}}(t)}=\infty, \tag{3}$$

где $q_{x_0}(r):=\dfrac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}}\displaystyle\int_{|x-x_0|=r}Q(x)\,d\mathcal{H}^{n-1}$.

Тогда каждый элемент $f \in \mathfrak{F}_{\alpha,b_0,b_0',\varphi,Q}(D,D')$ *продолжается до непрерывного отображения* $\overline{f}\colon \overline{D}_P \to \overline{D'}_P$ *при этом, семейство отображений* $\mathfrak{F}_{b_0,b_0',\varphi,Q}(\overline{D}_P,\overline{D'}_P)$, *состоящее из всех продолженных таким образом отображений, является равностепенно непрерывным, а значит, и нормальным в* $\overline{D}_P$.

В случае локально связных границ заданной области справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $n \geq 2$, $n-1 < \alpha \leq n$, *область* D *имеет не менее одной конечной граничной точки,* D *локально связна на границе, область* D' *ограничена и кроме того,* D' *является* n*-регулярным по Альфорсу пространством с евклидовой метрикой и мерой Лебега в* $\mathbb{R}^n$, *в котором выполнено* $(1;\alpha)$*-неравенство Пуанкаре. Предположим, что* $Q \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$, *заданная неубывающая функция* $\varphi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ *удовлетворяет условию* (2), *и что либо* $Q \in FMO(\overline{D})$, *либо для каждого* $x_0 \in \overline{D}$ *функция* Q *удовлетворяет условиям* (3).

Тогда каждый элемент $f \in \mathfrak{F}_{\alpha,b_0,b_0',\varphi,Q}(D,D')$ *продолжается до непрерывного отображения* $\overline{f}\colon \overline{D} \to \overline{D'}$, *при этом, семейство отображений* $\mathfrak{F}_{\alpha,b_0,b_0',\varphi,Q}(\overline{D},\overline{D'})$, *состоящее из всех продолженных таким образом отображений, является равностепенно непрерывным, а значит, и нормальным в* $\overline{D}$.

2. Вспомогательные сведения. Дальнейшее изложение существенно опирается на аппарат нак называемых нижних Q-гомеоморфизмов (см. [6], гл. 9). Говорят, что некоторое свойство P выполнено для *p-почти всех поверхностей* области D, если оно имеет место для всех поверхностей, лежащих в D, кроме, быть может, некоторого их подсемейства, p-модуль которого равен нулю. Будем говорить, что измеримая по Лебегу функция $\rho\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}^+}$ *обобщенно допустима относительно p-модуля* для семейства Γ k-мерных поверхностей S в $\mathbb{R}^n$, (сокращенно $\rho \in {\rm ext}_p\,{\rm adm}\,\Gamma$), если соотношение $\displaystyle\int_S \rho^k\,d\mathcal{A} \geq 1$ выполнено для p-почти всех поверхностей S семейства Γ. Следующий класс отображений представляет собой обобщение квазиконформных отображений в смысле кольцевого определения по Герингу [9])и исследуется отдельно (см., например, [6], гл. 9). Пусть D и D' — заданные области в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $x_0 \in \overline{D} \setminus \{\infty\}$ и $Q\colon \mathbb{R}^n \to (0,\infty)$ — измеримая по Лебегу функция. Будем говорить, что $f\colon D \to D'$ — *нижнее Q-отображение в точке x_0 относительно p-модуля*, как только

$$M_p\big(f(\Sigma_\varepsilon)\big) \geq \inf_{\rho \in {\rm ext}_p\,{\rm adm}\,\Sigma_\varepsilon} \int\limits_{D\cap A(x_0,\varepsilon,r_0)} \frac{\rho^p(x)}{Q(x)}\,dm(x) \tag{4}$$

для каждого кольца

$$A(x_0,\varepsilon,r_0) = \big\{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon < |x-x_0| < r_0\big\}, \tag{5}$$

где $r_0 \in (0,d_0)$, $d_0 = \sup\limits_{x\in D}|x-x_0|$, Σ_ε обозначает семейство всех пересечений сфер $S(x_0,r)$ с областью D, $r \in (\varepsilon,r_0)$. Если $p=n$, то будем говорить, что f — нижнее Q-отображение в точке x_0. Будем говорить, что f нижнее Q-отображение относительно p-модуля в $A \subset \overline{D}$, если соотношение (4) имеет место для каждого $x_0 \in A$. Для отображения $f\colon D \to \mathbb{R}^n$, множества $E \subset D$ и $y \in \mathbb{R}^n$, определим *функцию кратности* $N(y,f,E)$ как число прообразов точки y во множестве E, т. е.

$$N(y,f,E) = {\rm card}\big\{x \in E : f(x) = y\big\}, \qquad N(f,E) = \sup_{y\in\mathbb{R}^n} N(y,f,E)\,. \tag{6}$$

Полное доказательство следующей леммы в полном объеме приведено в [10] (лемма 2.3).

Лемма 1. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $\varphi\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ — неубывающая функция, удовлетворяющая условию* (2). *Если $p > n-1$, то каждое открытое дискретное отображение $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ с конечным искажением класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ такое, что $N(f,D) < \infty$, является нижним Q-отображением относительно p-модуля в каждой точке $x_0 \in \overline{D}$ при $Q(x) = N(f,D)K_{I,\alpha}^{\frac{p-n+1}{n-1}}(x,f)$, $\alpha\colon = \dfrac{p}{p-n+1}$, где внутренняя дилатация $K_{I,\alpha}(x,f)$ отображения f в точке x порядка α определена соотношением* (1), *а кратность $N(f,D)$ — вторым соотношением в* (6).

Пусть $E,\ F \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ — произвольные множества. Обозначим через $\Gamma(E,F,D)$ семейство всех кривых $\gamma\colon [a,b] \to \overline{\mathbb{R}^n}$, которые соединяют E и F в D, т. е. $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $t \in (a,b)$. Дальнейшее изложение существенно опираются на аппарат так называемых Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля (см. [6], [гл. 7). Дадим определение этого класса отображений. Пусть $x_0 \in \overline{D}$, тогда отображение $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ будем называть *кольцевым Q-отображением относительно p-модуля в точке* x_0, если для каждых $0 < r_1 < r_2 < d_0 := := \sup_{x\in D}|x-x_0|$

$$M_p\Big(f(\Gamma\big(S_1,S_2,D)\big)\Big) \leq \int\limits_{A(x_0,r_1,r_2)\cap D} Q(x)\eta^p\big(|x-x_0|\big)dm(x), \tag{7}$$

где $A(x_0,r_1,r_2)$ определено в (5), $S_i = S(x_0,r_i)$, $i=1,2$, и $\eta\colon (r_1,r_2) \to [0,\infty]$ — произвольная измеримая по Лебегу функция такая, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)dr = 1. \tag{8}$$

Отображение $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ будет называться кольцевым Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля на множестве $A \subseteq \overline{D}$, если кольцевое условие (7) выполняется для любой точки $x_0 \in A$. Следующее утверждение доказано в [12] (следствие 5) при $p = n$ для точек из $\overline{D}$ (см. также случай внутренних точек и $p > n-1$ [11]) (лемма 3.8). Для граничных точек области D и произвольного $p > n-1$ доказательство данного утверждения проводится аналогично доказательству следствия 5 [12], и потому опускается.

Лемма 2. *Пусть $x_0 \in \overline{D}$, $p > n-1$ и ограниченный гомеоморфизм $f : D \to \mathbb{R}^n$ является нижним Q-отображением в области $D \subset \mathbb{R}^n$ относительно p-модуля, $Q \in L^{\frac{n-1}{p-n+1}}_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$. Тогда f является кольцевым $Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}$-отображением в точке x_0 относительно α-модуля, $\alpha := := \dfrac{p}{p-n+1}$.*

Справедливо следующее фундаментальное утверждение, аналог которого для гомеоморфизмов и частного случая $p = n = 2$ доказан в [1] (лемма 5.1) (см. также аналогичный результат для нижних Q-гомеоморфизмов в [2] (лемма 3)). Доказательство в случае $p \in (n-1,n]$ может быть проведено по полной аналогии с доказательством леммы 5.1 [1].

Лемма 3. *Пусть $n \geq 2$, $\alpha \geq 1$, область $D \subset \mathbb{R}^n$ регулярна, а $D' \subset \mathbb{R}^n$ ограничена и имеет локально квазиконформную границу, являющуюся сильно достижимой относительно α-модуля. Пусть также отображение $f : D \to D'$, $D' = f(D)$, является кольцевым Q-гомеоморфизмом в каждой точке $x_0 \in \partial D$ относительно α-модуля.*

Тогда f продолжается до непрерывного отображения $f\colon \overline{D}_P \to \overline{D'}_P$, $f(\overline{D}_P) = \overline{D'}_P$, если выполнено следующее условие. Для каждой точки $x_0 \in \partial D$ найдутся $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(x_0) > 0$ и измеримая по Лебегу функция $\psi(t)\colon (0,\varepsilon_0) \to [0,\infty]$ со следующим свойством: для любого $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ выполнено условие $I(\varepsilon,\varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)dt < \infty$, $I(\varepsilon,\varepsilon_0) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$ и, кроме того, при $\varepsilon \to 0$

$$\int\limits_{A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} Q(x)\psi^{\alpha}\big(|x-x_0|\big)\, dm(x) = o(I^{\alpha}(\varepsilon,\varepsilon_0)),$$

где, как обычно, сферическое кольцо $A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)$ определено формулой (5).

3. О равностепенной непрерывности в областях с $(1;\alpha)$-неравенством Пуанкаре, регулярных по Альфорсу. Справедливо следующее утверждение (см. [13], предложение 4.7).

Предложение 1. *Пусть X — β-регулярное по Альфорсу метрическое пространство с мерой, в котором выполняется $(1;\alpha)$-неравенство Пуанкаре, $\beta - 1 < \alpha \le \beta$. Тогда для произвольных континуумов E и F, содержащихся в шаре $B(x_0,R)$, и некоторой постоянной $C > 0$ выполняется неравенство $M_{\alpha}(\Gamma(E,F,X)) \ge \dfrac{1}{C}\dfrac{\min\{\mathrm{diam}\, E, \mathrm{diam}\, F\}}{R^{1+\alpha-\beta}}$.*

Имеет место следующее утверждение, обобщающее лему 3.7.1 [5] в случае нелокально связных границ.

Лемма 4. *Пусть $\alpha \in (n-1,n]$, область D регулярна, область D' ограничена, имеет локально квазиконформную границу и, одновременно, является пространством, n-регулярным по Альфорсу относительно евклидовой метрики и меры Лебега в $\mathbb{R}^n$, в котором выполнено $(1;\alpha)$-неравенство Пуанкаре. Пусть также P_0 — некоторый простой конец в E_D, а σ_m, $m = 1,2,\ldots,$ — соответствующая ему цепь разрезов, лежащих на сферах с центром в некоторой точке $x_0 \in \partial D$ и радиусов $r_m \to 0$, $m \to \infty$. Пусть D_m — соответствующая P_0 последовательность ассоциированных областей, а C_m — произвольная последовательность континуумов, принадлежащих D_m. Потребуем, кроме того, чтобы $C(f,P_1) \cap C(f,P_2) = \varnothing$ для произвольных различных простых концов $P_1, P_2 \in E_D$.*

Предположим, что $f\colon D \to D'$ — кольцевой Q-гомеоморфизм относительно α-модуля в $\overline{D}$, $f(D) = D'$, такой, что $b_0' = f(b_0)$ для некоторых $b_0 \in D$ и $b_0' \in D'$. Пусть также найдется $\varepsilon_0 = \varepsilon(x_0) > 0$, такое, что при некотором $0 < p' < \alpha$ выполнено условие

$$\int\limits_{A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} Q(x)\psi^{\alpha}\big(|x-x_0|\big)\, dm(x) \le KI^{p'}(\varepsilon,\varepsilon_0), \tag{9}$$

где сферическое кольцо $A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)$ определено, как в (5), *а ψ — некоторая неотрицательная измеримая функция, такая, что при всех $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$*

$$I(\varepsilon,\varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt < \infty, \tag{10}$$

при этом, $I(\varepsilon,\varepsilon_0) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$.

Тогда найдутся числа $\widetilde{\varepsilon_0} = \widetilde{\varepsilon_0}(x_0) \in (0,\varepsilon_0)$ и $M_0 \in \mathbb{N}$ такие, что

$$\mathrm{diam}\; f(C_m) \le C \cdot R^{1+\alpha-n} K I^{p'-\alpha}(r_m,\varepsilon_0)\Delta(\sigma,\widetilde{\varepsilon_0},\varepsilon_0), \quad m \ge M_1,$$

где $\mathrm{diam}\; f(C_m)$ *— евклидов диаметр множества $f(C_m)$,*

$$\Delta(\sigma, \widetilde{\varepsilon_0}, \varepsilon_0) = \left(1 + \frac{\int\limits_{\widetilde{\varepsilon_0}}^{\varepsilon_0} \psi(t)\,dt}{\int\limits_{\sigma}^{\widetilde{\varepsilon_0}} \psi(t)\,dt}\right)^{\alpha}, \tag{11}$$

R — радиус шара, содержащего область D', а C — постоянная из предложения 1.

Доказательство. Прежде всего, по определению регулярной области, D может быть отображена квазиконформно на область G с локально квазиконформной границей посредством отображения $g\colon D \to G$. Заметим, что $G \neq \mathbb{R}^n$ ввиду теоремы Лиувилля, имеющей место для квазиконформных отображений (см. [14], следствие 2.12, гл. III). С другой стороны, в силу леммы 3 отображение g продолжается до гомеоморфизма $g\colon \overline{D}_P \to \overline{G}_P$, причем согласно теореме 4.1 [3] существует взаимно однозначное соответствие между точками границы G и простыми концами в области G. В таком случае также существует взаимно однозначное соответствие между точками границы G и простыми концами в области D, а значит, таких простых концов не менее двух.

Пусть теперь $P_1 \in E_D$ — простой конец, не совпадающий с P_0, где P_0 — фиксированный простой конец из условия леммы. Предположим, что G_m, $m = 1, 2, \ldots,$ — последовательность областей, соответствующая простому концу P_1 и $x_m \in G$ — такая произвольная последовательность точек, что $x_m \to P_1$ при $m \to \infty$. Можно считать, что $x_m \in G_m$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Тогда, так как f имеет непрерывное продолжение на $\overline{D}_P$ в силу леммы 3, то $f(x_m) \to f(P_1)$ при $m \to \infty$. Заметим, что при всех $m \geq m_0$ и некотором $m_0 \in \mathbb{N}$

$$\left|f(b_0) - f(x_m)\right| = \left|b_0' - f(x_m)\right| \geq \left|b_0' - f(P_1)\right| - \left|f(x_m) - f(P_1)\right| \geq \frac{1}{2} d(b_0', \partial D') := \delta, \tag{12}$$

где $d(b_0', \partial D')$ обозначает евклидово расстояние между b_0' и $\partial D'$. Построим последовательность континуумов K_m, $m = 1, 2, \ldots,$ следующим образом. Соединим точку x_1 с точкой b_0 произвольной кривой в D, которую мы обозначим через K_1. Далее, соединим точки x_2 и x_1 кривой K_1', лежащей в G_1. Объединив кривые K_1 и K_1', получим кривую K_2, соединяющую точки b_0 и x_2. И так далее. Пусть на некотором шаге мы имеем кривую K_m, соединяющую точки x_m и b_0. Соединим точки x_{m+1} и x_m кривой K_m', лежащей в G_m. Объединяя между собой кривые K_m и K_m', получаем кривую K_{m+1}. И так далее.

Покажем, что найдется такой номер $m_1 \in \mathbb{N}$, что

$$D_m \cap K_m = \varnothing \quad \forall \quad m \geq m_1\,. \tag{13}$$

Предположим, что (13) не имеет места, тогда найдутся возрастающая последовательность номеров $m_k \to \infty$, $k \to \infty$, и последовательность точек $\xi_k \in K_{m_k} \cap D_{m_k}$, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда, с одной стороны, $\xi_k \to P_0$ при $k \to \infty$.

Рассмотрим следующую процедуру. Итак, возможны два случая: либо все элементы ξ_k при $k = 1, 2, \ldots$ принадлежат множеству $D \setminus G_1$, либо найдется такой номер k_1, что $\xi_{k_1} \in G_1$. Далее, рассмотрим последовательность ξ_k, $k > k_1$. Здесь также, что возможны два случая: либо ξ_k при $k > k_1$ принадлежат множеству $D \setminus G_2$, либо найдется такой номер $k_2 > k_1$, что $\xi_{k_2} \in G_2$. И так далее. Предположим что, элемент $\xi_{k_{l-1}} \in G_{l-1}$ построен. Заметим, что возможны два случая: либо ξ_k при $k > k_{l-1}$ принадлежат множеству $D \setminus G_l$, либо найдется такой номер $k_l > k_{l-1}$, что $\xi_{k_l} \in G_l$. И так далее. Эта процедура может быть как конечной (оборваться на каком-то $l \in \mathbb{N}$), так и бесконечной, в зависимости от чего мы имеем два случая:

1) либо найдутся номера $n_0 \in \mathbb{N}$ и $l_0 \in \mathbb{N}$ такие, что $\xi_k \in D \setminus G_{n_0}$ при всех $k > l_0$;

2) либо для каждого $l \in \mathbb{N}$ найдется такой элемент ξ_{k_l}, что $\xi_{k_l} \in G_l$, причем последовательность k_l является возрастающей по $l \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим каждый из этих случаев и покажем, что в обоих из них мы приходим к противоречию. Пусть имеет место случай 1, тогда все элементы последовательности ξ_k принадлежат K_{n_0}, откуда следует существование подпоследовательности ξ_{k_r}, $r = 1, 2, \ldots$, сходящейся при $r \to \infty$ к некоторой точке $\xi_0 \in D$. Однако, с другой стороны, $\xi_k \in D_{m_k}$ и, значит, $\xi_0 \in \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \overline{D_m} \subset \partial D$ (см. [2], предложение 1). Полученное противоречие свидетельствует о том, что случай 1 невозможен. Пусть имеет место случай 2, тогда одновременно $\xi_k \to P_0$ и $\xi_k \to P_1$ при $k \to \infty$. В силу непрерывного продолжения f на $\overline{D}_P$ отсюда следует, что $f(\xi_k) \to f(P_0)$ и $f(\xi_k) \to f(P_1)$ при $k \to \infty$, откуда $f(P_0) = f(P_1)$, что противоречит условию $C(f, P_1) \cap C(f, P_2) = \varnothing$, $P_1 \neq P_2$. Полученное противоречие указывает на справедливость соотношения (13).

Положим теперь $\widetilde{\varepsilon_0} = \min\{\varepsilon_0, r_{m_1+1}\}$, и пусть M_0 — такое натуральное число, что $r_m < \widetilde{\varepsilon_0}$ при всех $m \geq M_0$. Заметим, что согласно соотношению (13) и определению разрезов $\sigma_m \subset r_m$, $\Gamma(C_m, K_m, D) > \Gamma\big(S(x_0, r_m), S(x_0, \widetilde{\varepsilon_0}), D\big)$ и, значит, $M_\alpha\big(f(\Gamma(C_m, K_m, D))\big) \leq M_\alpha\big(f\big(\Gamma(S(x_0, r_m), S(x_0, \widetilde{\varepsilon_0}), D\big)\big)$ (см. [7], теорема 6.4). Повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве леммы 3.7.1 [5], с помощью рассмотрения вспомогательной измеримой функции $\eta_m(t) = \begin{cases} \psi(t)/I(r_m, \widetilde{\varepsilon_0}), & t \in (r_m, \widetilde{\varepsilon_0}), \\ 0, & t \notin (r_m, \widetilde{\varepsilon_0}), \end{cases}$ $I(a, b) = \int\limits_a^b \psi(t)\, dt$, приходим к неравенству

$$M_\alpha\left(\Gamma\left(f(C_m), f(K_m), D'\right)\right) \leq K I^{p'-\alpha}(r_m, \varepsilon_0) \Delta(r_m, \widetilde{\varepsilon_0}, \varepsilon_0), \qquad m \geq M_0, \tag{14}$$

где Δ определяется из соотношения (11) при $\sigma = r_m$. Поскольку из (14) вытекает, что $M_\alpha\big(\Gamma(f(C_m), f(K_m), D')\big) \to 0$ при $m \to \infty$, а $\operatorname{diam} f(K_m) \geq \delta$ ввиду (12), то из предложения 1 вытекает существование некоторого $M_1 \geq M_0$ такого, что при всех $m \geq M_1$

$$\operatorname{diam} f(C_m) \leq C R^{1+\alpha-n} M_\alpha\big(\Gamma(f(C_m), f(K_m), D')\big), \tag{15}$$

где R — радиус шара, содержащего область D', а $C > 0$ — постоянная из предложения 1. Тогда из (14) и (15) вытекает, что $\operatorname{diam} f(C_m) \leq C R^{1+\alpha-n} K I^{p'-\alpha}(r_m, \varepsilon_0) \Delta(r_m, \widetilde{\varepsilon_0}, \varepsilon_0)$, $m \geq M_1$.

Лемма 4 доказана.

Для заданных областей D, $D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $n - 1 < p \leq n$, измеримой по Лебегу функции $Q(x) \colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$, $b_0 \in D$, $b_0' \in D'$, обозначим через $\mathfrak{G}_{\alpha, b_0, b_0', Q}(D, D')$ семейство кольцевых Q-гомеоморфизмов $f \colon D \to D'$ относительно α-модуля в $\overline{D}$ таких, что $f(D) = D'$, $b_0' = f(b_0)$. В наиболее общем случае основное утверждение настоящего пункта может быть сформулировано следующим образом.

Лемма 5. *В условиях леммы* 4 *каждое* $f \in \mathfrak{G}_{\alpha, b_0, b_0', Q}(D, D')$ *продолжается до гомеоморфизма* $f \colon \overline{D}_P \to \overline{D'}_P$, *при этом семейство таким образом продолженных отображений является равностепенно непрерывным в* $\overline{D}_P$.

Доказательство. Каждое отображение f имеет непрерывное продолжение на $\overline{D}_P$ в силу леммы 3. Равностепенная непрерывность семейства $\mathfrak{G}_{\alpha, b_0, b_0', Q}(D, D')$ во внутренних точках области D следует, например, из леммы 3.2.2 [5] при $\alpha = n$ и леммы 2.4 [15] при $\alpha \neq n$.

Осталось показать равностепенную непрерывность семейства продолженных по непрерывности гомеоморфизмов $\mathfrak{G}_{\alpha, b_0, b_0', Q}\left(\overline{D}_P, \overline{D'}_P\right)$ на E_D.

Предположим противное, а именно, что семейство отображений $\mathfrak{G}_{\alpha,b_0,b_0',Q}\left(\overline{D}_P,\overline{D'}_P\right)$ не является равностепенно непрерывным в некоторой точке $P_0\in E_D$. Тогда найдутся число $a>0$, последовательность $P_k\in\overline{D}_P,\ k=1,2,\ldots,$ и элементы $f_k\in\mathfrak{G}_{b_0,b_0',Q}\left(\overline{D}_P,\overline{D'}_P\right)$ такие, что $d(P_k,P_0)<1/k$ и

$$\left|f_k(P_k)-f_k(P_0)\right|\geq a,\qquad k=1,2,\ldots. \tag{16}$$

В силу возможности непрерывного продолжения каждого f_k на границу D в терминах простых концов для любого $k\in\mathbb{N}$ найдется такой элемент $x_k\in D$, что $d(x_k,P_k)<1/k$ и $|f_k(x_k)-f_k(P_k)|<1/k$. Тогда из (16) следует, что

$$\left|f_k(x_k)-f_k(P_0)\right|\geq a/2,\qquad k=1,2,\ldots. \tag{17}$$

Аналогично, в силу непрерывного продолжения отображения f_k в $\overline{D}_P$ найдется последовательность $x_k'\in D,\ x_k'\to P_0$ при $k\to\infty$ такая, что $\left|f_k(x_k')-f_k(P_0)\right|<1/k$ при $k=1,2,\ldots.$ Тогда из (17) следует, что

$$|f_k(x_k)-f_k(x_k')|\geq a/4,\qquad k=1,2,\ldots. \tag{18}$$

Пусть $\sigma_m,\ m=1,2,\ldots,$ — соответствующая P_0 цепь разрезов, лежащих на сферах с центром в некоторой точке $x_0\in\partial D$ и радиусов $r_m\to 0,\ m\to\infty$. Пусть D_m — соответствующая P_0 последовательность ассоциированных областей. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что x_k и x_k' принадлежат области D_k. Соединим точки x_k и x_k' кривой C_k лежащей в D_k. Тогда согласно лемме 4 получим, что $\operatorname{diam} f(C_k)\to 0$ при $k\to\infty$, что противоречит неравенству (18). Полученное противоречие свидетельствует о том, что исходное предположение об отсутствии равностепенной непрерывности семейства $\mathfrak{G}_{\alpha,b_0,b_0',Q}(\overline{D}_P,\overline{D'}_P)$ было ошибочным.

Из леммы 5 на основе леммы 2.5 [15] (см. также лемму 2.3.1 [5]), получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть $\alpha\in(n-1,n]$, область D регулярна, область D' ограничена, имеет локально квазиконформную границу и одновременно является пространством, n-регулярным по Альфорсу относительно евклидовой метрики и меры Лебега в $\mathbb{R}^n$, в котором выполнено $(1;\alpha)$-неравенство Пуанкаре.*

Предположим, что выполнено одно из следующих условий:

1) *либо в каждой точке $x_0\in\overline{D}$ при некотором $\varepsilon_0=\varepsilon_0(x_0)>0$ и всех $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ выполнены условия типа* (3);

2) *либо $Q\in FMO(\overline{D})$.*

Тогда каждое $f\in\mathfrak{G}_{\alpha,b_0,b_0',Q}\left(D,D'\right)$ продолжается до гомеоморфизма $f\colon\overline{D}_P\to\overline{D'}_P$, при этом семейство таким образом продолженных отображений является равностепенно непрерывным в $\overline{D}_P$.

***Доказательство теоремы* 1.** Пусть p — число, определяющееся из условия $\alpha=\dfrac{p}{p-n+1}$, т. е., $p:=\alpha(n-1)/(\alpha-1))$. Тогда $p>n-1$ и по лемме 1 каждое отображение $\mathfrak{F}_{\alpha,b_0,b_0',\varphi,Q}(D,D')$ является нижним B-отображением относительно p-модуля при $B(x)=Q^{\frac{p-n+1}{n-1}}(x,f)$ в $\overline{D}$. По лемме 2 отображение f является кольцевым $B^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)$-отображением в $\overline{D}$ относительно α-модуля. Другими словами, поскольку $B^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)=Q(x)$, то f является кольцевым $Q(x)$-отображением в $\overline{D}$ относительно α-модуля, т. е., $f\in\mathfrak{G}_{\alpha,b_0,b_0',Q}(D,D')$. Так как $Q(x)$ удовлетворяет условиям 1 и 2 теоремы 3, то желанное утверждение непосредственно следует из этой теоремы.

4. Случай локально связных границ. Как было отмечено во введении, случай локально связной границы заслуживает отдельного рассмотрения. Имеет место следующее утверждение, обобщающее лемму 3.7.1 [5] на случай произвольного порядка α модуля семейств кривых.

Лемма 6. *Пусть $n \geq 2$, $\alpha \in (n-1, n]$, область $D \subset \mathbb{R}^n$ локально связна в точках границы, $x_0 \in \partial D$, $x_0 \neq \infty$, а отображение $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке x_0 относительно α-модуля таким, что $b_0' = f(b_0)$ для некоторых $b_0 \in D$ и $b_0' \in D' = f(D)$. Пусть также D' ограничена и является n-регулярным по Альфорсу пространством с евклидовой метрикой и мерой Лебега в $\mathbb{R}^n$, в котором выполнено $(1;\alpha)$-неравенство Пуанкаре. Предположим, что найдется такое $\varepsilon_0 = \varepsilon(x_0) > 0$, что при некотором $0 < p' < \alpha$, $\varepsilon \to 0$ и некоторой постоянной $K > 0$ выполнено условие* (9), *где сферическое кольцо $A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0)$ определено, как в* (5), *а ψ — некоторая заданная неотрицательная измеримая функция такая, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ имеет место соотношение* (10), *при этом, $I(\varepsilon, \varepsilon_0) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$.*

Тогда найдется число $\widetilde{\varepsilon_0} = \widetilde{\varepsilon_0}(x_0) \in (0, \varepsilon_0)$ такое, что при каждом $\sigma \in (0, \widetilde{\varepsilon_0})$ и любого континуума $E_1 \subset B(x_0, \sigma) \cap D$ выполнено неравенство

$$\operatorname{diam} f(E_1) \leq CR^{1+\alpha-n} K I^{p'-\alpha}(\sigma, \varepsilon_0) \Delta(\sigma, \widetilde{\varepsilon_0}, \varepsilon_0), \tag{19}$$

где $\operatorname{diam} f(E_1)$ *— евклидов диаметр множества $f(E_1)$, Δ определяется соотношением* (11), *d — евклидово расстояние между множествами, R — радиус шара, содержащего область D', а C — постоянная из предложения* 1.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $I(\varepsilon_1, \varepsilon_0) > 0$. Повторяя рассуждения из доказательства леммы 3.7.1 [5], мы заключаем, что существуют $a_0 \in D$ и $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0)$ такие, что точка b_0 может быть соединена некоторой кривой E_2 с точкой a_0, $E_2 \subset D \setminus B(x_0, \varepsilon_1)$, такой что

$$d\big(b_0', f(a_0)\big) \geq \frac{1}{2}\, d(b_0', \partial D') := \delta \tag{20}$$

(здесь d обозначает евклидово расстояние между множествами). Пусть $\sigma \in (0, \varepsilon_1)$, $E_1 \subset \overline{B(x_0, \sigma)} \cap D$ — произвольный континуум. Дальнейший ход рассуждений повторяет технику, примененную во второй части доказательство леммы 4 (см. также [5]). Как и при доказательстве этой леммы, рассматривая вспомогательную измеримую функцию $\eta_\sigma(t) = \begin{cases} \psi(t)/I(\sigma, \varepsilon_1), & t \in (\sigma, \varepsilon_1) \\ 0, & t \notin (\sigma, \varepsilon_1) \end{cases}$ $I(a, b) = \int_a^b \psi(t)\, dt$, и используя соотношения (9), (10), мы приходим к оценке

$$M_\alpha\big(\Gamma(f(E_1), f(E_2), D')\big) \leq K I^{p'-\alpha}(\sigma, \varepsilon_0) \Delta(\sigma, \varepsilon_1, \varepsilon_0), \tag{21}$$

где Δ определено в (11). Поскольку из (21) следует, что $M_\alpha\big(\Gamma(f(E_1), f(E_2), D')\big) \to 0$ при $\sigma \to 0$, в силу предложения 1

$$\operatorname{diam} f(E_1) \leq CR^{1+\alpha-n} M_\alpha\big(\Gamma(f(E_1), f(E_2), D')\big), \tag{22}$$

где R — радиус шара, содержащего область D', а $C > 0$ — постоянная из предложения 1. Из (21) и (22) следует соотношение (19).

Лемма 6 доказана.

В наиболее общем случае основное утверждение настоящего пункта может быть сформулировано следующим образом.

Лемма 7. *В условиях леммы 6 каждое $f \in \mathfrak{G}_{\alpha,b_0,b_0',Q}(D,D')$ продолжается до непрерывного отображения $f : \overline{D} \to \overline{D'}$, при этом семейство таким образом продолженных отображений является равностепенно непрерывным в $\overline{D}$.*

Доказательство. Возможность непрерывного продолжения отображения f на $\overline{D}$ следует из леммы 4 [16], поскольку области D', содержащиеся в условии леммы 7, имеют сильно достижимые границы относительно α-модуля в силу предложения 1. Равностепенная непрерывность семейства $\mathfrak{G}_{\alpha,b_0,b_0',Q}(D,D')$ во внутренних точках области D следует, например, из леммы 3.2.2 [5] при $\alpha = n$ и леммы 2.4 [15] при $\alpha \neq n$.

Осталось показать равностепенную непрерывность продолженных по непрерывности гомеоморфизмов $\mathfrak{G}_{\alpha,b_0,b_0',Q}\left(\overline{D},\overline{D'}\right)$ на ∂D.

Предположим противное, а именно, что семейство отображений $\mathfrak{G}_{\alpha,b_0,b_0',Q}\left(\overline{D},\overline{D'}\right)$ не является равностепенно непрерывным в некоторой точке $x_0 \in \partial D$. Повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве леммы 5 (см. также доказательство леммы 3.8.2 [5]), мы заключаем, что в этом случае найдутся $a > 0$, последовательности $x_k, x_k' \in D$, $x_k, x_k' \to x_0$ при $k \to \infty$, и элементы $f_k \in \mathfrak{G}_{\alpha,b_0,b_0',Q}\left(\overline{D},\overline{D'}\right)$ такие, что

$$|f_k(x_k) - f_k(x_k')| \geq a/4, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{23}$$

Поскольку по условию область D является локально связной на границе, то найдется последовательность окрестностей V_m точки x_0, $m = 1, 2, \ldots$, лежащих в шаре $B(x_0, 2^{-m})$, такая, что $W_m := V_m \cap D$ есть связное множество при каждом $m \in \mathbb{N}$, а так как x_k и $x_k' \to x_0$ при $k \to \infty$, то найдется подпоследовательность номеров m_k, $k = 1, 2, \ldots$, такая, что $x_{m_k} \in W_k$ и $x_{m_k}' \in W_k$. Соединим точки x_{m_k} и x_{m_k}' кривой C_k, лежащей в W_k. Тогда при достаточно больших k число 2^{-k} меньше числа $\widetilde{\varepsilon_0}$ из леммы 6, поэтому в этой лемме можно положить $E_1 := C_k$. В таком случае

$$\left|f_{m_k}(x_{m_k}) - f_{m_k}(x_{m_k}')\right| \leq CR^{1+\alpha-n}KI^{p'-\alpha}(2^{-k}, \varepsilon_0)\Delta(2^{-k}, \widetilde{\varepsilon_0}, \varepsilon_0) \to 0, \quad k \to \infty,$$

что противоречит (23). Полученное противоречие указывает на то, что исходное предположение об отсутствии равностепенной непрерывности семейства $\mathfrak{G}_{\alpha,b_0,b_0',Q}\left(\overline{D},\overline{D'}\right)$ было ошибочным.

Из леммы 7 на основе леммы 2.5 и доказательства теоремы 3.3 [15] (см. также [5] лемма 2.3.1) получаем следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть $\alpha \in (n-1, n]$, область D локально связна на границе и имеет не менее одной конечной граничной точки, а область D' ограничена, имеет локально квазиконформную границу и одновременно является пространством, n-регулярным по Альфорсу относительно евклидовой метрики и меры Лебега в $\mathbb{R}^n$, в котором выполнено $(1;\alpha)$-неравенство Пуанкаре. Предположим, что либо $Q \in FMO(\overline{D})$, либо в каждой точке $x_0 \in \overline{D}$ выполняются условия* (3).

Тогда каждое $f \in \mathfrak{G}_{\alpha,b_0,b_0',Q}(D,D')$ продолжается до непрерывного отображения $f : \overline{D} \to \overline{D'}$, при этом семейство таким образом продолженных отображений является равностепенно непрерывным в $\overline{D}$.

***Доказательство теоремы* 2** точно такое же, как и доказательство теоремы 1. В силу леммы 1 каждое отображение $\mathfrak{F}_{\alpha,b_0,b_0',\varphi,Q}(D,D')$ является нижним B-отображением относительно p-модуля при $B(x) = Q^{\frac{p-n+1}{n-1}}(x,f)$, где α находится из условия $\alpha = \dfrac{p}{p-n+1}$. Однако, относительно $B(x)$ выполнены условия 1 и 2 теоремы 3, поскольку $B^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x) = Q(x)$, где Q удовлетворяет условиям 1, 2 теоремы 1. Оставшаяся часть утверждения следует из теоремы 4.

Еще один полезный результат касается классов Соболева, поэтому определим следующий класс отображений. Для числа $\alpha \geq 1$, областей $D,\ D' \subset \mathbb{R}^n$, $b_0 \in D$, $b_0' \in D'$ и произвольной измеримой по Лебегу функции $Q(x)\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$, обозначим символом $\mathfrak{R}_{\alpha,b_0,b_0',Q}(D,D')$ семейство всех гомеоморфизмов $f\colon D \to D'$ класса $W^{1,\alpha}_{\rm loc}$ в D, $f(D) = D'$, имеющих N- и N^{-1}-свойства Лузина, таких, что $K_{I,\alpha}(x,f) \leq Q(x)$ при почти всех $x \in D$ и $f(b_0) = b_0'$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть $n \geq 2$, $n - 1 < \alpha \leq n$, $Q \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$, область D имеет не менее одной конечной граничной точки, D локально связна на границе, область D' ограничена, и кроме того, D' является n-регулярным по Альфорсу пространством с евклидовой метрикой и мерой Лебега в $\mathbb{R}^n$, в котором выполнено $(1;\alpha)$-неравенство Пуанкаре. Пусть также $Q \in FMO(\overline{D})$, либо в каждой точке $x_0 \in \overline{D}$ выполнены условия вида* (3).

Тогда каждый элемент $f \in \mathfrak{R}_{\alpha,b_0,b_0',Q}(D,D')$ продолжается до непрерывного отображения $\overline{f}\colon \overline{D} \to \overline{D'}$, при этом семейство отображений $\mathfrak{R}_{\alpha,b_0,b_0',Q}(\overline{D},\overline{D'})$, состоящее из всех продолженных таким образом гомеоморфизмов, является равностепенно непрерывным, а значит, и нормальным в $\overline{D}$.

Доказательство. Достаточно показать, что каждое отображение $f \in \mathfrak{R}_{\alpha,b_0,b_0',Q}(D,D')$ принадлежит также классу $\mathfrak{G}_{\alpha,b_0,b_0',Q}\,(D,D')$ (см. определения этих классов перед теоремами 1 и 5 соответственно). Действительно, пусть $f \in \mathfrak{R}_{\alpha,b_0,b_0',Q}(D,D')$, тогда, в частности, $f \in W^{1,\alpha}_{\rm loc}$, $\alpha > n-1$. Отсюда в силу теоремы 1.1 [17] $f^{-1} \in W^{1,1}_{\rm loc}$. Поскольку отображение f имеет N-свойство Лузина, вследствие замены переменной под знаком интеграла (см. [18], теоремы 3.2.5) для любого компакта $K \subset f(D)$

$$\int\limits_K \|g'(y)\|^\alpha dm(y) = \int\limits_{f^{-1}(K)} K_{I,\alpha}(x,f)dm(x) < \int\limits_{f^{-1}(K)} Q(x)dm(x) < \infty,$$

где $g(y) = f^{-1}(y)$, откуда $f^{-1} \in W^{1,\alpha}_{\rm loc}$. Кроме того, так как $f \in W^{1,\alpha}_{\rm loc}$, $\alpha > n-1$, то f является дифференцируемым почти всюду (см. [19], лемма 3).

Таким образом, f является дифференцируемым почти всюду отображением, имеющим N- и N^{-1}-свойства Лузина, таким, что $f^{-1} \in W^{1,\alpha}_{\rm loc}$ и $K_{I,\alpha}(x,f) \leq Q(x)$, а указанные отображения удовлетворяют неравенствам вида (7), что установлено в [20] (теорема 2.2). Таким образом, $\mathfrak{R}_{\alpha,b_0,b_0',Q}(D,D') \subset \mathfrak{G}_{\alpha,b_0,b_0',Q}(D,D')$ и, значит, заключение теоремы 5 следует из теоремы 4.

Литература

1. *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Yakubov E.* The Beltrami equations and prime ends // Укр. мат. вісн. – 2015. – **12**, № 1. – С. 27 – 66.
2. *Ковтонюк Д. А., Рязанов В. И.* К теории простых концов для пространственных областей // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 4. – С. 467 – 479 .
3. *Näkki R.* Prime ends and quasiconformal mappings // J. Anal. Math. – 1979. – **35**. – P. 13 – 40.
4. *Näkki R., Palka B.* Uniform equicontinuity of quasiconformal mappings // Proc. Amer. Math. Soc. – 1973. – **37**, № 2. – P. 427 – 433.
5. *Севостьянов Е. А.* Исследование пространственных отображений геометрическим методом. – Киев: Наук. думка, 2014.

6. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory. – New York: Springer Sci. + Business Media, LLC, 2009.
7. *Väisälä J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings // Lect. Notes Math. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 1971. – **229**.
8. *Heinonen J.* Lectures on analysis on metric spaces. – New York: Springer Sci.+Business Media, 2001.
9. *Gehring F. W.* Rings and quasiconformal mappings in space // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – **103**. – P. 353 – 393.
10. *Севостьянов Е. А., Салимов Р. Р., Петров Е. А.* Об устранении особенностей классов Орлича – Соболева // Укр. мат. вестн. – 2016. – **13**, № 3. – С. 324 – 349.
11. *Ковтонюк Д., Салимов Р., Севостьянов Е.* К теории отображений классов Соболева и Орлича – Соболева. – Киев: Наук. думка, 2013.
12. *Ковтонюк Д. А., Рязанов В. И., Салимов Р. Р., Севостьянов Е. А.* К теории классов Орлича – Соболева // Алгебра и анализ. – 2013. – **25**, № 6. – С. 50 – 102.
13. *Adamowicz T., Shanmugalingam N.* Non-conformal Loewner type estimates for modulus of curve families // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 2010. – **35**. – P. 609 – 626.
14. *Rickman S.* Quasiregular mappings // Results Math. and Relat. Areas. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 1993. – **26**, № 3.
15. *Golberg A., Salimov R., Sevost'yanov E.* Normal families of discrete open mappings with controlled p-module // Contemp. Math. – 2016. – **667**. – P. 83 – 103.
16. *Афанасьева Е. С.* О граничном поведении одного класса отображений в метрических пространствах // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 1. – С. 17 – 29.
17. *Ziemer W. P.* Change of variables for absolutely continuous functions // Duke Math. J. – 1969. – **36**. – P. 171 – 178.
18. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. – М.: Наука, 1987.
19. *Väisälä J.* Two new characterizations for quasiconformality // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A 1 Math. – 1965. – **362**. – P. 1 – 12.
20. *Salimov R. R., Sevost'yanov E. A.* The Poletskii and Väisälä inequalities for the mappings with (p, q)-distortion // Complex Var. and Elliptic Equat. – 2014. – **59**, № 2. – P. 217 – 231.

Получено 30.01.17