УДК 517.5

С. О. Чайченко (Донбас. держ. пед. ун-т, Слов'янськ)

НАБЛИЖЕННЯ ЯДЕР БЕРГМАНА РАЦІОНАЛЬНИМИ ФУНКЦІЯМИ З ФІКСОВАНИМИ ПОЛЮСАМИ

We solve the problem of best rational approximations of the Bergman kernels on the unit circle of the complex plane in the quadratic and uniform metrics.

Решена задача о наилучших рациональных приближениях ядер Бергмана на единичной окружности комплексной плоскости в квадратичной и равномерной метриках.

У серії праць М. М. Джрбашяна [1 – 4] було розвинено метод, що дозволяв отримувати розв'язки екстремальних задач про найкращі раціональні наближення ядра Коші на одиничному колі комплексної площини як у квадратичній, так і в рівномірній метриці. Цей метод, зокрема, спирався на зображення ядра Коші за допомогою відрізка ряду Фур'є по ортонормованій на одиничному колі системі раціональних функцій, що визначається фіксованою послідовністю полюсів, які лежать зовні одиничного круга (система Такенаки – Мальмквіста). У даній роботі, з використанням зазначеного методу і деяких результатів роботи [4] знайдено розв'язок аналогічних задач для наближення вагових ядер Бергмана.

Наведемо означення і факти, які будемо використовувати в цій роботі. Нехай $\mathbf{a} := \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ — послідовність точок в одиничному крузі $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$ комплексної площини $\mathbb{C}$, серед яких можуть бути точки скінченної і навіть нескінченної кратності. Системою функцій Такенаки – Мальмквіста, породженою послідовністю $\mathbf{a}$, називається система $\varphi := \{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ функцій φ_k вигляду [5] (§10.7)

$$\varphi_0(z) := \frac{\sqrt{1-|a_0|^2}}{1-\overline{a_0}z}, \qquad \varphi_k(z) := \frac{\sqrt{1-|a_k|^2}}{1-\overline{a_k}z}\prod_{j=0}^{k-1}\frac{-|a_j|}{a_j}\frac{z-a_j}{1-\overline{a_j}z}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

де при $a_j = 0$ покладається $|a_j|/a_j = -1$.

Відомо [5] (§10.7), що система Такенаки – Мальмквіста є ортонормованою системою на одиничному колі $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$, тобто

$$\langle\varphi_k, \varphi_l\rangle := \int\limits_{\mathbb{T}} \varphi_k(z)\overline{\varphi_l(z)}\, d\sigma(z) = \delta_{kl}, \quad k, l = 0, 1, \ldots,$$

де σ — нормована міра Лебега на $\mathbb{T}$, δ_{kl} — символ Кронекера.

Кожному елементу системи φ поставимо у відповідність добуток Бляшке B_k степеня k, тобто функцію вигляду

$$B_0(z) := 1, \qquad B_n(z) := \tau\prod_{j=0}^{n-1}\frac{z-a_j}{1-\overline{a_j}z}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

де $a_j \in \mathbb{D}$, $j = \overline{0, n-1}$, і $|\tau| = 1$.

Лема 1. *Для довільних значень z, $\zeta \in \mathbb{D}$ і будь-якого $n \in \mathbb{N}$ справджується тотожність*

$$\frac{1}{1-\overline{z}\zeta} = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{\varphi_k(z)}\varphi_k(\zeta) + \frac{\overline{B_n(z)}B_n(\zeta)}{1-\overline{z}\zeta}. \tag{2}$$

Доведення леми 1 можна знайти в [1] (див. також роботу [6]).

Аналітичну у крузі $\mathbb{D}$ функцію f відносять до простору Гарді $H_2(\mathbb{D})$, якщо

$$\|f\|_{H_2} := \sup_{0<\varrho<1} \left(\int\limits_{\mathbb{T}} |f(\varrho z)|^2 d\sigma(z) \right)^{1/2} < \infty.$$

Добре відомо, що функції з простору Гарді $H_2(\mathbb{D})$ мають на колі $\mathbb{T}$ граничні значення по недотичних шляхах і

$$f(z) = \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{d\sigma(t)}{1-z\bar{t}} \quad \forall\, z \in \mathbb{D}. \tag{3}$$

З леми 1 і формули (3) випливає, що для будь-якої функції $f \in H_2(\mathbb{D})$ і довільного $n \in \mathbb{N}$ справджується зображення [4]

$$f(z) = \sum_{m=0}^{n-1} c_m(f)\varphi_m(z) + B_n(z) \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\overline{B_n(t)}f(t)}{1-z\bar{t}}\, d\sigma(t), \quad z \in \mathbb{D}, \tag{4}$$

де

$$c_m(f) := \int\limits_{\mathbb{T}} f(t)\overline{B_m(t)}\, d\sigma(t), \quad m = 0, 1, \ldots .$$

У теорії просторів Бергмана важливу роль відіграє функція вигляду (див., наприклад, [7, с. 6])

$$\mathcal{K}_\alpha(z; w) = \frac{1}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}}, \qquad \alpha = 0, 1, \ldots, \quad z, w \in \mathbb{D}, \tag{5}$$

яку називають (ваговим) ядром Бергмана для круга $\mathbb{D}$.

Нехай

$$S_{n+1}(\mathcal{K}_\alpha)(z; w) := \sum_{m=0}^{n} c_m(\mathcal{K}_\alpha)\varphi_m(z) \tag{6}$$

— частинна сума ряду Фур'є функції $\mathcal{K}_\alpha(z; w)$ за системою (1).

Справджується така лема.

Лема 2. *Нехай $a_n = a_{n-1} = \ldots = a_{n-\alpha} \equiv w \in \mathbb{D}$. Тоді для довільного $n = \alpha, \alpha+1, \ldots,$ і $z \in \mathbb{D}$*

$$\mathcal{K}_\alpha(z; w) - S_{n+1}(\mathcal{K}_\alpha)(z; w) =$$

$$= (-1)^\alpha \left(\frac{\overline{w}}{1-|w|^2} \right)^{\alpha+1} \left(\frac{w-z}{1-\overline{w}z} \right)^{\alpha+1} \frac{B_{n-\alpha}(z)\overline{B_{n-\alpha}(w)}}{(\overline{w}z-1)}. \tag{7}$$

Доведення. Оскільки при $w \in \mathbb{D}$ буде $\mathcal{K}_\alpha \in H_2(\mathbb{D})$, то використовуючи зображення (4), отримуємо

$$\mathcal{K}_\alpha(z;w) = \frac{1}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}} = \sum_{m=0}^{n} c_m(\mathcal{K}_\alpha)\varphi_m(z) + B_{n+1}(z)\mathcal{J}_{n,\alpha}(z;w), \tag{8}$$

де

$$\mathcal{J}_{n,\alpha}(z;w) := \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\overline{B_{n+1}(t)}\mathcal{K}_\alpha(t;w)}{1-z\bar{t}} d\sigma(t). \tag{9}$$

Покладемо

$$\pi_n(z) := \prod_{m=0}^{n-\alpha-1}(a_m - z), \qquad \tau_n(z) := \prod_{m=0}^{n-\alpha-1}(1-\bar{a}_m z), \quad n = \alpha, \alpha+1, \ldots .$$

Тоді

$$B_{n+1}(z) = B_{n-\alpha}(z)\Big(\frac{w-z}{1-\overline{w}z}\Big)^{\alpha+1}\left(\frac{|w|}{w}\right)^{\alpha+1} =$$

$$= \frac{\pi_{n-\alpha}(z)}{\tau_{n-\alpha}(z)} \prod_{m=0}^{n-\alpha-1} \frac{|a_m|}{a_m}\Big(\frac{w-z}{1-\overline{w}z}\Big)^{\alpha+1}\left(\frac{|w|}{w}\right)^{\alpha+1}. \tag{10}$$

Звідси, використовуючи визначення функції $\mathcal{K}_\alpha(z;w)$ і очевидну тотожність

$$\overline{\left(\frac{\pi_n(t)}{\tau_n(t)}\right)} = \frac{\tau_n(t)}{\pi_n(t)}, \quad t \in \mathbb{T},$$

маємо

$$\overline{B_{n+1}(t)}\mathcal{K}_\alpha(t;w) = \prod_{m=0}^{n-\alpha-1} \frac{|a_m|}{\overline{a}_m}\left(\frac{|w|}{\overline{w}}\right)^{\alpha+1}\left(\frac{1-\overline{w}t}{w-t}\right)^{\alpha+1} \frac{\tau_{n-\alpha}(t)}{\pi_{n-\alpha}(t)} \frac{1}{(1-\overline{w}t)^{2+\alpha}} =$$

$$= \prod_{m=0}^{n-\alpha-1} \frac{|a_m|}{\overline{a}_m}\left(\frac{|w|}{\overline{w}}\right)^{\alpha+1} \frac{\tau_{n-\alpha}(t)}{\pi_{n-\alpha}(t)} \frac{1}{(w-t)^{\alpha+1}(1-\overline{w}t)}, \quad t \in \mathbb{T}. \tag{11}$$

З рівностей (9) і (11) одержуємо

$$\mathcal{J}_{n,\alpha}(z;w) = \prod_{m=0}^{n-\alpha-1} \frac{|a_m|}{\overline{a}_m}\left(\frac{|w|}{\overline{w}}\right)^{\alpha+1} \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\tau_{n-\alpha}(t)}{\pi_{n-\alpha}(t)} \frac{1}{(w-t)^{\alpha+1}(1-\overline{w}t)} \frac{d\sigma(t)}{1-z\bar{t}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \prod_{m=0}^{n-\alpha-1} \frac{|a_m|}{\overline{a}_m}\left(\frac{|w|}{\overline{w}}\right)^{\alpha+1} \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\tau_{n-\alpha}(t)}{\pi_{n-\alpha}(t)} \frac{1}{(w-t)^{\alpha+1}(t-z)} \frac{dt}{1-\overline{w}t}. \tag{12}$$

У співвідношенні (12) підінтегральна функція

$$g_{n,\alpha}(t,w,z) := \frac{\tau_{n-\alpha}(t)}{\pi_{n-\alpha}(t)} \frac{1}{(w-t)^{\alpha+1}(t-z)} \frac{1}{1-\overline{w}t}, \qquad w, z \in \mathbb{D}, \quad \alpha = 0, 1, \ldots,$$

як функція змінної t, зовні одиничного круга $\mathbb{D}$ має єдиний простий полюс $1/\overline{w}$, а при $|t| \to \infty$ має порядок прямування до нуля $\mathcal{O}(|t|^{-2})$. Враховуючи ці факти і змінюючи напрям інтегрування, з рівності (12) за теоремою про лишки отримуємо

$$\mathcal{J}_{n,\alpha}(z;w) = -\prod_{m=0}^{n-\alpha-1} \frac{|a_m|}{\overline{a}_m} \left(\frac{|w|}{\overline{w}}\right)^{\alpha+1} \lim_{t \to 1/\overline{w}} (t - 1/\overline{w}) g_{n,\alpha}(t,w,z) =$$

$$= \prod_{m=0}^{n-\alpha-1} \frac{|a_m|}{\overline{a}_m} \left(\frac{|w|}{\overline{w}}\right)^{\alpha+1} \frac{1/\overline{w}}{(w - 1/\overline{w})^{\alpha+1}(1/\overline{w} - z)} \frac{\tau_{n-\alpha}(1/\overline{w})}{\pi_{n-\alpha}(1/\overline{w})} =$$

$$= (-1)^{\alpha} \left(\frac{|w|}{1-|w|^2}\right)^{\alpha+1} \frac{1}{\overline{w}z - 1} \overline{\left(\frac{\prod_{m=0}^{n-\alpha-1}(a_m - w)}{\prod_{m=0}^{n-\alpha-1}(1 - \overline{a}_m w)}\right)} \prod_{m=0}^{n-\alpha-1} \frac{|a_m|}{\overline{a}_m} =$$

$$= (-1)^{\alpha} \left(\frac{|w|}{1-|w|^2}\right)^{\alpha+1} \frac{\overline{B_{n-\alpha}(w)}}{\overline{w}z - 1}. \tag{13}$$

Оскільки $|w|^2/w = \overline{w}$, то з рівностей (8), (10) і (13) випливає формула (7).

Лему доведено.

Для довільного фіксованого значення $\omega \in \mathbb{D}$ визначимо раціональну функцію

$$r_{\alpha,n}(z;w) = (1 - z\overline{w}) S_{n+1}(\mathcal{K}_{\alpha})(z;w). \tag{14}$$

Справджується таке твердження.

Лема 3. *Нехай $a_n = a_{n-1} = \ldots = a_{n-\alpha} \equiv w \in \mathbb{D}$. Тоді для довільного $n \in N$ і $z \in \mathbb{D}$*

$$r_{\alpha,n}(z;w) = \frac{(1-|w|^2)^{\alpha+1} + (\overline{w}(w-z))^{\alpha+1} B_{n-\alpha}(z)\overline{B_{n-\alpha}(w)}}{(1-|w|^2)^{\alpha+1}(1-\overline{w}z)^{\alpha+1}} \tag{15}$$

і функція $r_{\alpha,n}(z;w)$ задовольняє інтерполяційні умови

$$r_{\alpha,n}^{(s_m-1)}(a_m;w) = \frac{(\alpha + s_m - 1)!\overline{w}^{s_m-1}}{(1-\overline{w}a_m)^{\alpha+s_m}}, \quad 0 \le m \le n. \tag{16}$$

Доведення. Помноживши ліву і праву частину формули (7) на $(1 - \overline{w}z)$ і врахувавши співвідношення (14), отримаємо рівність (15).

Нехай $s_k \ge 1$ — кратність появи числа a_m у послідовності $\{a_j\}_{j=0}^{m}$, а $p_m(n)$ — кратність появи числа a_m у $\{a_j\}_{j=0}^{n}$. Зрозуміло, що $1 \le s_m \le p_m(n)$, $0 \le m \le n$ і $s_n = p_n(n)$. Отже, якщо $0 \le j \le s_k - 1 \le p_k(n)$, то функція

$$\psi_{nj}(t) = \frac{\pi_n(t)}{(t-a_m)^{j+1}}$$

є поліномом. Диференціюючи j разів по z формулу

$$\pi_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\pi_n(t)}{t-z} dt, \quad |z| \le 1, \tag{17}$$

знаходимо

$$\frac{d^j}{dz^j}[\pi_n(z)] = \frac{j!}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\pi_n(t)}{(t-z)^{j+1}}dt,$$

звідки при $z = a_m$ одержуємо рівність

$$[\pi_n(a_m)]^{(j)} = \frac{j!}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\pi_n(t)}{(t-a_m)^{j+1}}dt = \frac{j!}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}} \psi_{nj}(t)dt = 0, \tag{18}$$

яка виконується при всіх $0 \leq j \leq s_m - 1$.

Далі зауважимо, що

$$\frac{d^{s_m-1}}{dz^{s_m-1}}\left(\frac{1}{(1-z\overline{w})^{\alpha+1}}\right) = \frac{(\alpha+s_m-1)!\ \overline{w}^{s_m-1}}{(1-z\overline{w})^{\alpha+s_m}}, \quad 0 \leq m \leq n. \tag{19}$$

Нарешті після $(s_m - 1)$-кратного диференціювання по z тотожності

$$\frac{1}{(1-z\overline{w})^{\alpha+1}} - r_{\alpha,n}(z;w) = (-1)^\alpha\left(\frac{\overline{w}\overline{B_{n-\alpha}(w)}}{1-|\overline{w}|^2}\right)^{\alpha+1} B_{n+1}(z) =$$

$$= (-1)^\alpha\left(\frac{\overline{w}\ \overline{B_{n-\alpha}(w)}}{1-|\overline{w}|^2}\right)^{\alpha+1} \frac{\pi_{n+1}(z)}{\tau_{n+1}(z)}, \qquad a_n = \ldots = a_{n-\alpha} \equiv w \in \mathbb{D}, \quad z \in \mathbb{D},$$

на підставі співвідношень (18) і (19) отримуємо (16), оскільки

$$\frac{(\alpha+s_m-1)!\ \overline{w}^{s_m-1}}{(1-a_m\overline{w})^{1+\alpha}} - r_{\alpha,n}^{s_m-1}(a_m;w) =$$

$$= (-1)^\alpha\left(\frac{\overline{w}\ \overline{B_{n-\alpha}(w)}}{1-|\overline{w}|^2}\right)^{\alpha+1} \sum_{j=0}^{s_m-1} C_{s_k-1}^j \frac{\pi_{n+1}^{(j)}(a_m)}{\tau_{n+1}^{(s_k-j)}(a_m)} = 0.$$

Лему доведено.

Для даного n $(1 \leq n < \infty)$ позначимо через $\mathcal{R}(n)$ множину раціональних функцій вигляду

$$R_n(x) = c_0 + \sum_{m=1}^{n} c_m\varphi_{m-1}(x).$$

Беручи до уваги визначення системи $\{\varphi_m(z)\}_{m=0}^\infty$, легко зрозуміти, що $\mathcal{R}(n)$ збігається з множиною раціональних функцій вигляду

$$b_0^{(n)} + \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j^{(n)}}{(1-\bar{a}_j x)^{s_j}}.$$

Основним результатом роботи є таке твердження.

Теорема 1. *На множині функцій $\mathcal{R}(n)$ мінімум функціонала*

$$\mu_\alpha(R_n) := \int\limits_{\mathbb{T}} \left|\frac{1}{(1-x\overline{w})^{2+\alpha}} - \frac{R_n(x)}{(1-x\overline{w})}\right|^2 d\sigma(x) \tag{20}$$

реалізує функція

$$r_{\alpha,n}(x;w) = (1 - x\overline{w})S_{n+1}(\mathcal{K}_\alpha)(x;w) \in \mathcal{R}(n),$$

де $S_{n+1}(\mathcal{K}_\alpha)(x;w)$ *— частинна сумма порядку* $n+1$ *ряду Фур'є функції* $\mathcal{K}_\alpha(x;w)$ *по системі* (1), $a_n = a_{n-1} = \ldots = a_{n-\alpha} \equiv w \in \mathbb{D}$, *і при цьому виконується рівність*

$$\inf_{R_n \in \mathcal{R}(n)} \mu_\alpha(R_n) = \mu_\alpha(r_{\alpha,n}) = \frac{|wB_{n-\alpha}(w)|^{2\alpha+2}}{(1-|w|^2)^{2\alpha+3}}. \tag{21}$$

Доведення. З тотожності (7) випливає рівність

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \left| \frac{1}{(1-x\overline{w})^{2+\alpha}} - S_{n+1}(\mathcal{K}_\alpha)(x;w) \right|^2 d\sigma(x) =$$

$$= \frac{|wB_{n-\alpha}(w)|^{2\alpha+2}}{(1-|\overline{w}|^2)^{2\alpha+2}} \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{|B_{n+1}(x)|^2}{|1-x\overline{w}|^2} d\sigma(x) = \frac{|wB_{n-\alpha}(w)|^{2\alpha+2}}{(1-|w|^2)^{2\alpha+3}}. \tag{22}$$

Зауважимо, що довільна раціональна функція $R_n(x) \in \mathcal{R}(n)$ дозволяє зображення вигляду

$$R_n(x) = (1 - x\overline{w}) \sum_{m=0}^{n} c_m \varphi_m(x), \qquad a_n = \ldots = a_{n-\alpha} \equiv w \in \mathbb{D}, \tag{23}$$

з певними коефіцієнтами $\{c_m\}_{k=0}^n$ і навпаки, для довільного набору коефіцієнтів $\{c_m\}_{m=0}^n$ вираз з правої частини рівності (23) є деякою раціональною функцією $R_n \in \mathcal{R}(n)$.

Внаслідок цього, беручи до уваги визначення функції $r_{\alpha,n}(x;w)$ (рівність (14)), можна стверджувати, що для довільної функції $R_n \in \mathcal{R}(n)$ функціонал $\mu_\alpha(R_n)$ має зображення

$$\mu_\alpha(R_n) = \int\limits_{\mathbb{T}} \left| \frac{1}{(1-x\overline{w})^{2+\alpha}} - \sum_{m=0}^{n} c_m \varphi_m(x) \right|^2 d\sigma(x) \tag{24}$$

з певними коефіцієнтами c_m, $m = 0, 1, \ldots, n$, і навпаки, для довільного набору сталих c_m, $m = 0, 1, \ldots, n$, вираз у правій частині співвідношення (24) є значенням функціонала $\mu_\alpha(R_n)$ при деякому $R_n \in \mathcal{R}(n)$.

Враховуючи те, що сума $S_{n+1}(\mathcal{K}_\alpha)(x;w)$ є $(n+1)$-м відрізком ряду Фур'є функції $\mathcal{K}_\alpha(x;w)$ по ортонормованій на одиничному колі $\mathbb{T}$ системі $\{\varphi_m\}_{m=0}^\infty$, зі співвідношень (22) і (24) для довільної раціональної функції $R_n \in \mathcal{R}(n)$ отримуємо

$$\mu_\alpha(R_n) \geq \mu_\alpha(r_{\alpha,n}) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{T}} \left| \frac{1}{(1-x\overline{w})^{2+\alpha}} - S_{n+1}(\mathcal{K}_\alpha)(x;w) \right|^2 d\sigma(x) = \frac{|wB_n(w)|^{2\alpha+2}}{(1-|w|^2)^{2\alpha+3}}. \tag{25}$$

При цьому знак рівності у (25) можливий лише у випадку, коли

$$R_n(x) = r_{\alpha,n}(x;w), \quad w \in \mathbb{D}.$$

Співставлення співвідношень (22) і (25) переконує нас у справедливості формули (21).

Теорему доведено.

У випадку $\alpha = 0$ ядра (5) мають вигляд

$$\mathcal{K}_0(z;w) := \mathcal{K}(z;w) = \frac{1}{(1-z\overline{w})^2}, \quad z,w \in \mathbb{D},$$

і називаються (звичайними) ядрами Бергмана [7, с. 6].

Покладаючи $\alpha = 0$, з теореми 1 отримуємо такий наслідок.

Наслідок. *На множині функцій $\mathcal{R}(n)$ мінімум функціонала*

$$\mu(\mathcal{K};R_n) := \int\limits_{\mathbb{T}} \left| \frac{1}{(1-x\overline{w})^2} - \frac{R_n(x)}{(1-x\overline{w})} \right|^2 d\sigma(x) \tag{26}$$

реалізує функція

$$r_n(x;w) = (1-x\overline{w})S_{n+1}(\mathcal{K})(x;w) \in \mathcal{R}(n),$$

де $S_{n+1}(\mathcal{K})(x;w)$ — частинна сумма порядку $n+1$ ряду Фур'є функції $\mathcal{K}(x;w)$ по системі (1), $a_n \equiv w \in \mathbb{D}$, *і при цьому виконується рівність*

$$\inf_{R_n \in \mathcal{R}(n)} \mu(\mathcal{K};R_n) = \mu(\mathcal{K};r_n) = \frac{|wB_n(w)|^2}{(1-|w|^2)^3}. \tag{27}$$

Використовуючи лему 2 і теорему 1, отримуємо таке твердження.

Теорема 2. *Серед раціональних функцій $R_n \in \mathcal{R}(n)$ мінімум функціоналу*

$$\nu_\alpha(R_n) := \sup_{|x|=1} \left| \frac{1}{(1-x\overline{w})^{1+\alpha}} - R_n(x) \right|, \qquad R_n \in \mathcal{R}(n), \quad \alpha = 0,1,\ldots, \tag{28}$$

реалізує функція

$$r_{\alpha,n}(x;w) = (1-x\overline{w})S_{n+1}(\mathcal{K}_\alpha)(x;w) \in \mathcal{R}(n),$$

де $S_{n+1}(\mathcal{K}_\alpha)(x;w)$ — частинна сумма порядку $n+1$ ряду Фур'є функції $\mathcal{K}_\alpha(x;w)$ по системі (1), $a_n = a_{n-1} = \ldots = a_{n-\alpha} \equiv w \in \mathbb{D}$, *і при цьому*

$$\inf_{R_n \in \mathcal{R}(n)} \nu_\alpha(R_n) = \nu_\alpha(r_{\alpha,n}) = \left(\frac{|wB_{n-\alpha}(w)|}{1-|w|^2} \right)^{1+\alpha}. \tag{29}$$

Зі співвідношення (28) випливає, що при $\alpha = 0$ величина у правій частині рівності (29) є найкращим рівномірним наближенням ядра Коші, тобто функції вигляду

$$\mathcal{C}(z;w) := \frac{1}{1-z\overline{w}}, \quad z,w \in \mathbb{D},$$

на одиничному колі за допомогою раціональних функцій із множини $\mathcal{R}(n)$. Її точне значення вперше було отримано в [6].

Доведення. Дійсно, зі співвідношень (20), (21) і (29) одержуємо

$$\frac{|wB_{n-\alpha}(w)|^{2\alpha+2}}{(1-|w|^2)^{2\alpha+3}} \le \mu_\alpha(R_n) = \int\limits_{\mathbb{T}} \left| \frac{1}{(1-x\overline{w})^{2+\alpha}} - \frac{R_n(x)}{1-x\overline{w}} \right|^2 d\sigma(x) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{T}} \left| \frac{1}{(1-x\overline{w})^{1+\alpha}} - R_n(x) \right|^2 \frac{d\sigma(x)}{|1-x\overline{w}|^2} \le \nu_\alpha^2(R_n) \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{d\sigma(x)}{|1-x\overline{w}|^2} = \frac{\nu_\alpha^2(R_n)}{1-|w|^2},$$

звідки випливає, що для довільного $R_n \in \mathcal{R}(n)$

$$\inf_{R_n \in w(a_k)} \nu_\alpha(R_n) \ge \left(\frac{|wB_{n-\alpha}(w)|}{1-|w|^2} \right)^{1+\alpha}.$$

З іншого боку, використовуючи тотожність (7), знаходимо

$$\nu_\alpha(r_{\alpha,n}) = \sup_{x\in\mathbb{T}} \left| \frac{1}{(1-x\overline{w})^{1+\alpha}} - (1-x\overline{w}) S_{n+1}(\mathcal{K}_\alpha)(x;w) \right| =$$

$$= \sup_{x\in\mathbb{T}} |1-x\overline{w}| \left| \frac{1}{(1-x\overline{w})^{2+\alpha}} - S_{n+1}(\mathcal{K}_\alpha)(x;w) \right| =$$

$$= \sup_{x\in\mathbb{T}} |1-x\overline{w}| \left| \left(\frac{\overline{w}}{1-|w|^2} \right)^{1+\alpha} \overline{B_{n-\alpha}(w)} \frac{B_{n+1}(x)}{\overline{w}x-1} \right| =$$

$$= \left(\frac{|wB_{n-\alpha}(w)|}{1-|w|^2} \right)^{1+\alpha} \sup_{x\in\mathbb{T}} |B_{n+1}(x)| = \left(\frac{|wB_{n-\alpha}(w)|}{1-|w|^2} \right)^{1+\alpha}.$$

Теорему доведено.

Література

1. *Джрбашян М. М.* К теории рядов Фурье по рациональным функциям // Изв. АН АрмССР. Сер. Математика. – 1956. – **9**, № 7. – С. 3 – 28.
2. *Джрбашян М. М.* Ортогональные системы рациональных функций на окружности // Изв. АН АрмССР. Сер. Математика. – 1956. – **1**, № 1. – С. 3 – 24.
3. *Джрбашян М. М.* Ортогональные системы рациональных функций на окружности // Изв. АН АрмССР. Сер. Математика. – 1956. – **1**, № 2. – С. 106 – 125.
4. *Джрбашян М. М.* Разложения по системам рациональных функций с фиксированными полюсами // Изв. АН АрмССР. Сер. Математика. – 1967. – **2**, № 1. – С. 3 – 51.
5. *Уолш Дж. Л.* Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплесксной области. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961. – 508 с.
6. *Савчук В. В.* Найкращі лінійні методи наближення та оптимальні ортонормовані системи простору Гарді // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 5. – С. 661 – 671.
7. *Hedenmalt H., Korenblum B., Zhu K.* Theory of Bergman spaces. – New York etc.: Springer-Verlag, 2000. – 286 p.

Одержано 27.02.17