УДК 514

В. А. Горькавый (Физ.-техн. ин-т низких температур НАН Украины, Харьков),
Е. Н. Невмержицкая (Харьков. нац. ун-т им. В. Н. Каразина)

ВЫРОЖДЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БЭКЛУНДА

A concept of degenerate Bäcklund transformation is introduced for two-dimensional surfaces in many-dimensional Euclidean spaces. It is shown that if a surface in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, admits a degenerate Bäcklund transformation, then this surface is pseudospherical, i.e., its Gauss curvature is constant and negative. The complete classification of pseudospherical surfaces in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$ that admit degenerate Bianchi transformations is obtained. Moreover, we also obtain a complete classification of pseudospherical surfaces in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, admitting degenerate Bäcklund transformations into straight lines.

Введено поняття виродженого перетворення Беклунда для двовимірних поверхонь у багатовимірному евклідовому просторі. Доведено, що якщо поверхня в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, допускає вироджене перетворення Беклунда, то вона є псевдосферичною, тобто має сталу від'ємну гауссову кривину. Повністю описано псевдосферичні поверхні в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, що допускають вироджене перетворення Бьянкі, а також псевдосферичні поверхні в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, що допускають вироджене перетворення Беклунда, результуючою кривою якого є пряма.

Введение. Работа посвящена вопросам обобщения классической теории преобразований Бэклунда двумерных псевдосферических поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ на случай двумерных поверхностей в многомерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$. Данная проблематика была инициирована работами Ю. А. Аминова и А. Сыма [1, 2], а затем получила развитие в работах авторов (см., например, [5 – 9] и обзор [10]). Проведенные исследования показали, что, с одной стороны, часть классических результатов успешно переносится на случай поверхностей в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, тогда как, с другой стороны, некоторые результаты уже перестают быть справедливыми, чем и объясняется интерес к этому направлению.

В классической теории понятие преобразования Бэклунда для двумерных поверхностей в $\mathbb{R}^3$ опирается на следующую геометрическую конструкцию (см. [3], гл. 10, § 25, [14], гл. I, § 4).

Определение 1. *Диффеоморфизм поверхностей* $\psi : F^2 \to \tilde{F}^2$ *в* $\mathbb{R}^3$ *называется преобразованием Бэклунда, если для любой точки* $P \in F^2$ *выполнены следующие условия*:

(B_1) *прямая в* $\mathbb{R}^3$, *соединяющая* $P \in F^2$ *с соответствующей по отображению* ψ *точкой* $\tilde{P} = \psi(P) \in \tilde{F}^2$, *касается обеих поверхностей в указанных точках*;

(B_2) *расстояние между* $P \in F^2$ *и* $\tilde{P} \in \tilde{F}^2$ *равно фиксированному* $l_0 > 0$, *не зависящему от* $P \in F^2$;

(B_3) *угол между касательными плоскостями поверхностей* $T_P F^2$ *и* $T_{\tilde{P}} \tilde{F}^2$ *равен фиксированному* $\omega_0 \in (0, \pi/2]$, *не зависящему от* $P \in F^2$.

Известно, что если две поверхности в $\mathbb{R}^3$ соединены преобразованием Бэклунда, то обе поверхности являются псевдосферическими, т. е. имеют постоянные отрицательные гауссовы кривизны, $K = \tilde{K} = -\sin^2 \omega_0 / l_0^2$. Более того, каждая псевдосферическая поверхность в $\mathbb{R}^3$ локально допускает непрерывное семейство различных преобразований Бэклунда. Это дает возможность по заданной псевдосферической поверхности построить цепочку новых псевдосферических поверхностей, последовательно применяя преобразования Бэклунда, при этом между различными преобразованиями Бэклунда имеют место определенные коммутационные соотношения [13] (гл. 3, § 2), [14] (гл. I, § 4).

Частным случаем преобразования Бэклунда является *преобразование Бьянки*, соответствующее значению $\omega_0 = \pi/2$. Оно имеет ряд исключительных свойств: в частности, преобразование Бьянки достаточно просто описывается с помощью орициклических координат на псевдосферической поверхности (см. [3], гл. 10, § 24).

С аналитической точки зрения псевдосферические поверхности в $\mathbb{R}^3$ интерпретируются в терминах решений уравнения синус-Гордона $\dfrac{\partial^2 W}{\partial p \partial q} = \sin W$, функция $W(p,q)$ представляет собой угол между координатными асимптотическими линиями чебышевской сети (p,q) на поверхности (см. [11, 12] и [13], гл. 2, § 7). Соответственно, описанное выше понятие преобразования Бэклунда для псевдосферических поверхностей $F \to \tilde{F}$ интерпретируется как некоторое преобразование решений $W \to \tilde{W}$ уравнения синус-Гордона, которое также называется преобразованием Бэклунда [13] (гл. 3, § 1), [14] (гл. I, § 5). Описанная конструкция и заложенные в ней общие идеи преобразования решений нелинейных уравнений легли в основу современной теории интегрируемых систем, в которой уравнение синус-Гордона играет роль одного из наиболее фундаментальных и показательных примеров. Этим тоже, в определенной степени, объясняется интерес к развитию и обобщению теории преобразований Бэклунда псевдосферических поверхностей.

Особое значение имеют так называемые солитонные решения уравнения синус-Гордона, в частности односолитонные решения $W(p,q) = 4 \operatorname{arctg} e^{\lambda p + q/\lambda}$. С геометрической точки зрения этим решениям соответствуют специальные псевдосферические поверхности в $\mathbb{R}^3$: поверхность Бельтрами, получающаяся вращением трактрисы, и поверхности Дини, получающиеся винтовым вращением трактрисы [13] (гл. 3, § 2–4). Для каждого односолитонного решения уравнения синус-Гордона имеется преобразование Бэклунда, переводящее его в тривиальное решение $\tilde{W} \equiv 0$. Соответствующее геометрическое преобразование для поверхностей Бельтрами и Дини является вырожденным в том смысле, что результирующая поверхность $\tilde{F}$ вырождается в кривую, а именно в прямую (ось вращения). Конечно, такое вырожденное преобразование Бэклунда уже не удовлетворяет в полной мере требованиям определения 1.

Основной целью данной работы является обобщение описанной конструкции вырожденного преобразования Бэклунда на случай двумерных поверхностей в многомерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Предлагаемый геометрический подход основывается на следующей модификации определения 1.

Определение 2. *Регулярное отображение $\psi\colon F^2 \to \gamma$ поверхности F^2 в кривую γ в многомерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, назовем вырожденным преобразованием Бэклунда, если для любой точки $P \in F^2$ выполнены следующие условия*:

(DB_1) *прямая в $\mathbb{R}^n$, соединяющая $P \in F^2$ с соответствующей по отображению ψ точкой $\tilde{P} = \psi(P) \in \gamma$, касается поверхности F^2 в точке P*;

(DB_2) *расстояние между $P \in F^2$ и $\tilde{P} \in \gamma$ равно фиксированному $l_0 > 0$, не зависящему от $P \in F^2$*;

(DB_3) *угол между касательной плоскостью $T_P F^2$ поверхности F^2 и плоскостью Π_P, натянутой на прямую, соединяющую $P \in F^2$ с $\tilde{P} \in \gamma$, и касательную прямую кривой γ*

в точке $\tilde{P}$, равен фиксированному $\omega_0 \in (0, \pi/2]$, не зависящему от $P \in F^2$. [1]

Вырожденное преобразование Бэклунда с $\omega_0 = \pi/2$ будем называть *вырожденным преобразованием Бьянки*.

В работе доказан аналог теоремы Бэклунда: если поверхность F^2 в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, допускает вырожденное преобразование Бэклунда, то F^2 является псевдосферической, ее гауссова кривизна равна $K = -\sin^2 \omega_0 / l_0^2$. При доказательстве этого утверждения приведены условия на фундаментальные формы поверхности, являющиеся необходимыми и достаточными для того, чтобы F^2 допускала вырожденное преобразование Бэклунда.

Затем рассмотрены обобщенные поверхности Бельтрами в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, введенные в работе [8] как обобщение классической поверхности Бельтрами в $\mathbb{R}^3$. Показано, что, как и поверхность Бельтрами в $\mathbb{R}^3$, обобщенные поверхности Бельтрами, и только эти поверхности в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, допускают вырожденное преобразование Бьянки. Заметим, что любая регулярная кривая в $\mathbb{R}^{n-2} \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, может быть получена локально как образ некоторой области на обобщенной поверхности Бельтрами под действием вырожденного преобразования Бьянки.

Далее, как обобщение классических поверхностей Дини в $\mathbb{R}^3$, вводятся в рассмотрение обобщенные поверхности Дини в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$. Показано, что, как и поверхности Дини в $\mathbb{R}^3$, каждая обобщенная поверхность Дини в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$ допускает вырожденное преобразование Бэклунда с $\omega_0 \neq \pi/2$, при этом результирующая кривая γ представляет собой прямую в $\mathbb{R}^n$. Доказано и обратное утверждение: если какая-либо поверхность F^2 в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, допускает вырожденное преобразование Бэклунда с $\omega_0 \neq \pi/2$, при котором кривая γ представляет собой интервал прямой в $\mathbb{R}^n$, то F^2 представляет собой область на обобщенной поверхности Дини.

Открытым остается вопрос о существовании и классификации псевдосферических поверхностей в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, допускающих вырожденное преобразование Бэклунда с $\omega_0 \neq \pi/2$, при котором результирующая кривая γ в $\mathbb{R}^n$ отлична от прямой.

1. Вырожденное преобразование Бэклунда — необходимые и достаточные условия. Рассмотрим регулярную поверхность F^2 в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, и некоторое ее преобразование $\psi\colon F^2 \to \tilde{F}$. Прямые в $\mathbb{R}^n$, соединяющие соответствующие точки на F^2 и $\tilde{F}$, будут касаться поверхности F^2, если их направляющие векторы задают касательное векторное поле X на F^2. Не уменьшая общности, локальные координаты (u^1, u^2) на F^2 можно ввести таким образом, чтобы X было коллинеарно $\partial_1 r$, тогда преобразование ψ задается в виде [2]

$$\tilde{r} = r + \frac{l}{|\partial_1 r|} \partial_1 r, \tag{1}$$

где $r(u^1, u^2)$ и $\tilde{r}(u^1, u^2)$ — радиусы-векторы F^2 и $\tilde{F}$. Функция $l(u^1, u^2)$ отвечает за расстояние между соответствующими по отображению ψ точками на F^2 и $\tilde{F}$.

[1] Регулярность отображения ψ подразумевает, что плоскость Π_P определена однозначно для любой точки $P \in \in F^2$. Взаимное расположение пары двумерных подпространств в $\mathbb{R}^n$ определяется двумя углами: стационарными значениями углов между векторами из одного и другого подпространств [3] (гл. 8, § 14), [4]. Поскольку, благодаря выполнению условия DB_1, плоскости $T_P F^2$ и Π_P пересекаются по прямой, соединяющей точки P и $\tilde{P}$, один из двух стационарных углов между этими плоскостями равен нулю, а второй стационарный угол ω определяется как угол между векторами в $T_P F^2$ и $T_{\tilde{P}} \tilde{F}_1^2$, ортогональными к прямой $P\tilde{P}$. Именно постоянство этого угла, $\omega \equiv \omega_0$, и подразумевается в условии DB_3.

[2] Здесь и в дальнейшем мы используем обозначения $\partial_j = \dfrac{\partial}{\partial u^j}$, $\partial_{ij} = \dfrac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^j}$.

Проанализируем, когда рассматриваемое преобразование ψ, задаваемое формулой (1), удовлетворяет всем требованиям из определения 2 и, таким образом, представляет собой вырожденное преобразование Бэклунда. Очевидно, условие (DB_1) уже выполнено по построению, а условие (DB_2) выполняется тогда и только тогда, когда $l \equiv l_0$.

Обозначим через $g = \langle dr, dr \rangle = g_{ij} du^i du^j$ первую фундаментальную форму поверхности, Γ^k_{ij} — символы Кристоффеля, $N_1, \ldots, N_{n-2}$ — ортонормированный базис нормалей на F^2, $L^\sigma = \langle d^2 r, N_\sigma \rangle = L^\sigma_{ij} du^i du^j$ — соответствующие вторые фундаментальные формы, $\mu_{\nu\sigma} = \langle dN_\nu, N_\sigma \rangle = \mu_{\nu\sigma|j} du^j$ — формы кручения. Для упрощения выкладок можно специализировать выбор локальных координат (u^1, u^2) так, чтобы они были ортогональными:

$$g_{12} \equiv 0. \tag{2}$$

Записывая представление для ψ в виде

$$\tilde{r} = r + \frac{l_0}{\sqrt{g_{11}}} \partial_1 r \tag{3}$$

и дифференцируя (3) с применением деривационных формул Вейнгартена, получаем

$$\partial_1 \tilde{r} = \partial_1 r + \frac{l_0}{\sqrt{g_{11}}} \Gamma^2_{11} \partial_2 r + \frac{l_0}{\sqrt{g_{11}}} \sum_{\sigma=1}^{n-2} L^\sigma_{11} N_\sigma, \tag{4}$$

$$\partial_2 \tilde{r} = \left(1 + l_0 \frac{\Gamma^2_{12}}{\sqrt{g_{11}}}\right) \partial_2 r + \frac{l_0}{\sqrt{g_{11}}} \sum_{\sigma=1}^{n-2} L^\sigma_{12} N_\sigma. \tag{5}$$

Преобразованная поверхность $\tilde{F}$ будет вырождаться в некоторую кривую γ тогда и только тогда, когда бивектор $[\partial_1 \tilde{r}, \partial_2 \tilde{r}] \equiv 0$. Принимая во внимание (4), (5), легко видеть, что $\partial_1 \tilde{r}$ не обращается в нуль, а $\partial_2 \tilde{r}$ будет коллинеарным $\partial_1 \tilde{r}$ тогда и только тогда, когда $\partial_2 \tilde{r} \equiv 0$, т. е. когда выполнены условия

$$L^\sigma_{12} \equiv 0, \qquad 1 \le \sigma \le n-2, \tag{6}$$

$$1 + l_0 \frac{\Gamma^2_{12}}{\sqrt{g_{11}}} \equiv 0. \tag{7}$$

В этом случае вектор-функция $\tilde{r}$ зависит только от u^1 и задает некоторую регулярную кривую γ.

Проверим выполнение условия (DB_3). Для каждой точки $P \in F^2$ касательная плоскость $T_P F^2$ натянута на пару векторов $\partial_1 r$, $\partial_2 r$. В свою очередь, плоскость Π_P натянута на векторы $\partial_1 r$ (направляющий вектор прямой, соединяющей $P \in F^2$ с $\psi(P) \in \gamma$) и $\partial_1 \tilde{r}$ (касательный вектор кривой γ в точке $\psi(P)$). Плоскости $T_P F^2$ и Π_P пересекаются по прямой с направляющим вектором $\partial_1 r$. Ортогональным к $\partial_1 r$ вектором в $T_P F^2$ будет вектор $\zeta = \partial_2 r$, а ортогональным к $\partial_1 r$ вектором в Π_P — вектор

$$\tilde{\zeta} = \langle \partial_1 r, \partial_1 r \rangle \partial_1 \tilde{r} - \langle \partial_1 r, \partial_1 \tilde{r} \rangle \partial_1 r = \frac{l_0}{\sqrt{g_{11}}} \Gamma^2_{11} \partial_2 r + \frac{l_0}{\sqrt{g_{11}}} \sum_{\sigma=1}^{n-2} L^\sigma_{11} N_\sigma.$$

Угол ω между плоскостями $T_P F^2$ и Π_P определяется углом между векторами ζ и $\tilde{\zeta}$. Постоянство угла $\omega \equiv \omega_0$ означает, что $\langle \zeta, \tilde{\zeta} \rangle^2 = \cos^2 \omega_0 |\zeta|^2 |\tilde{\zeta}|^2$. Подставляя указанные выше выражения для ζ и $\tilde{\zeta}$, убеждаемся, что условие (DB_3) будет выполняться тогда и только тогда, когда

$$g_{22} \left(\Gamma_{11}^2 \right)^2 \sin^2 \omega_0 = \cos^2 \omega_0 \sum_{\sigma=1}^{n-2} \left(L_{11}^{\sigma} \right)^2 . \tag{8}$$

Таким образом, имеет место следующая лемма.

Лемма 1. *Регулярная поверхность F^2 в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, допускает вырожденное преобразование Бэклунда тогда и только тогда, когда локально поверхность F^2 может быть параметризована ортогональными координатами $(u^1,\ u^2)$ так, что выполнены условия* (6) – (8). *При этом упомянутое вырожденное преобразование Бэклунда задается формулой* (3).

Заметим, что условия (2), (6) – (8), как и выражение (3) для рассматриваемого преобразования ψ, являются инвариантными относительно шкалирующих замен координат $u^1 = u^1(\hat{u}^1)$, $u^2 = u^2(\hat{u}^2)$ с $\dfrac{du^2}{d\hat{u}^2} > 0$. Если же $\dfrac{du^2}{d\hat{u}^2} < 0$, то (2), (6), (8) будут по-прежнему инвариантными, тогда как в (3) и (7) следует изменить знак, т. е. суммы заменить разностями.

Следствием леммы 1 является следующее утверждение, представляющее один из основных результатов статьи.

Теорема 1. *Если регулярная поверхность F^2 в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, допускает вырожденное преобразование Бэклунда, то F^2 является псевдосферической, ее гауссова кривизна равна*

$$K \equiv -\frac{\sin^2 \omega_0}{l_0^2}.$$

Доказательство. Предположим сначала, что $\omega_0 = \pi/2$. Тогда из (8) следует, что $\Gamma_{11}^2 \equiv 0$, т. е. $\partial_2 g_{11} = 0$. Это означает, что g_{11} зависит только от u^1, поэтому, выполнив шкалирующую замену координат $u^1 \to \hat{u}^1 = \displaystyle\int \sqrt{g_{11}} du^1$, можно положить $g_{11} = 1$. В этом случае из (7) следует, что $\partial_1 g_{22} = -\dfrac{2}{l_0} g_{22}$, т. е. $g_{22} = e^{-\frac{2}{l_0} u^1} h$, где $h = h(u^2)$ — произвольная положительная функция. Выполнив шкалирующую замену координат $u^2 \to \hat{u}^2 = \displaystyle\int \sqrt{h} du^2$, можно положить $h \equiv 1$. Таким образом, получаем, что метрика поверхности F^2 имеет вид $ds^2 = (du^1)^2 + e^{-\frac{2}{l_0} u^1} (du^2)^2$, а это в точности метрика плоскости Лобачевского кривизны $K \equiv -\dfrac{1}{l_0^2}$ в орициклических координатах $(u^1,\ u^2)$. Заметим, что само вырожденное преобразование Бьянки в этом случае принимает вид

$$\tilde{r} = r + l_0 \, \partial_1 r. \tag{9}$$

Предположим теперь, что $\omega_0 \neq \pi/2$. Условия (2) и (6) означают, что координатные линии на F^2 образуют сеть линий кривизны. Как следствие, F^2 имеет плоскую нормальную связность, и поэтому ортонормированный базис нормалей $N_1, \ldots, N_{n-2}$ на F^2 можно выбрать таким образом, что все формы кручения $\mu_{\nu\sigma} \equiv 0$. В этом случае фундаментальные уравнения Гаусса – Кодацци – Риччи для поверхности F^2 принимают вид

$$R_{1212} = \sum_{\sigma=1}^{n-2} L_{11}^{\sigma} L_{22}^{\sigma}, \tag{10}$$

$$\partial_2 L_{11}^{\sigma} + \Gamma_{11}^2 L_{22}^{\sigma} - \Gamma_{12}^1 L_{11}^{\sigma} \, = \, 0, \qquad 1 \le \sigma \le n-2, \tag{11}$$

$$\partial_1 L_{22}^{\sigma} + \Gamma_{22}^1 L_{11}^{\sigma} - \Gamma_{12}^2 L_{22}^{\sigma} \, = \, 0, \qquad 1 \le \sigma \le n-2. \tag{12}$$

Здесь через R_{1212} обозначен коэффициент риманова тензора:

$$R_{1212} = g_{22} \left(\partial_2 \Gamma_{11}^2 - \partial_1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 \right). \tag{13}$$

Проанализируем (10) – (12) вместе с (2), (6) – (8).

Домножая (12) на L_{11}^{σ} и суммируя по σ, с учетом (10) получаем

$$\frac{1}{2} \partial_2 \left(\sum_{\sigma=1}^{n-2} \left(L_{11}^{\sigma} \right)^2 \right) + \Gamma_{11}^2 R_{1212} - \Gamma_{12}^1 \sum_{\sigma=1}^{n-2} \left(L_{11}^{\sigma} \right)^2 \, = \, 0. \tag{14}$$

Записывая (8) в виде $\sum_{\sigma=1}^{n-2} \left(L_{11}^{\sigma} \right)^2 \, = \, g_{22} \left(\Gamma_{11}^2 \right)^2 \mathrm{tg}^2 \omega_0$ и подставляя в (14), имеем

$$\frac{1}{2} \partial_2 (g_{22} \left(\Gamma_{11}^2 \right)^2 \mathrm{tg}^2 \omega_0) + \Gamma_{11}^2 R_{1212} - \Gamma_{12}^1 g_{22} \left(\Gamma_{11}^2 \right)^2 \mathrm{tg}^2 \omega_0 \, = \, 0,$$

или, после упрощения,

$$\Gamma_{11}^2 \left(R_{1212} \, + \, \mathrm{tg}^2 \omega_0 \, g_{22} \left(\partial_2 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^1 g_{22} \Gamma_{11}^2 \right) \right) \, = \, 0. \tag{15}$$

Если бы $\Gamma_{11}^2 \, \equiv \, 0$, то, с одной стороны, с учетом (7) снова получили бы, что метрика поверхности F^2 приводится к виду $ds^2 \, = \, (du^1)^2 + e^{-\frac{2}{l_0} u^1} (du^2)^2$, а сама поверхность имеет гауссову кривизну $K \equiv -\dfrac{1}{l_0^2}$. С другой стороны, из (8) при $\Gamma_{11}^2 \, \equiv \, 0$ следует, что $L_{11}^1 \, = \, \ldots$ $\ldots = L_{11}^{n-2} \equiv 0$, а в силу (10) это означало бы, что гауссова кривизна F^2 равна нулю, $K \equiv 0$. Противоречие.

Поэтому $\Gamma_{11}^2 \neq 0$, и из (15) находим

$$R_{1212} \, = -\mathrm{tg}^2 \omega_0 \, g_{22} \, \left(\partial_2 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 \right). \tag{16}$$

Из (13) и (16) следует, что

$$R_{1212} \, = - \sin^2 \omega_0 \, g_{22} \, \left(\partial_1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 \right),$$

и тогда с учетом $\sqrt{g_{11}} \partial_1 \dfrac{\Gamma_{12}^2}{\sqrt{g_{11}}} = \partial_1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2$ получаем

$$R_{1212} \, = \, - \sin^2 \omega_0 \, g_{22} \, \left(\sqrt{g_{11}} \, \partial_1 \left(\frac{\Gamma_{12}^2}{\sqrt{g_{11}}} \right) \, + \, \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 \right). \tag{17}$$

Но $\Gamma_{12}^2 = -\dfrac{1}{l_0} \sqrt{g_{11}}$ в силу (7), поэтому (17) сводится к виду

$$R_{1212} = -\frac{\sin^2\omega_0}{l_0^2}\, g_{11}g_{22}.$$

Это означает, что гауссова кривизна поверхности F^2 равна $K = \dfrac{R_{1212}}{g_{11}g_{22}} \equiv -\dfrac{\sin^2\omega_0}{l_0^2}$, что и требовалось доказать.

Таким образом, вырожденное преобразование Бэклунда можно построить только для псевдосферических поверхностей в $\mathbb{R}^n$. Естественно, возникает вопрос о том, какие именно псевдосферические поверхности в $\mathbb{R}^n$ допускают вырожденное преобразование Бэклунда. Частичному ответу на этот вопрос и будет посвящена оставшаяся часть работы. Для простоты будем предполагать далее, что $l_0 = 1$. Это не уменьшает общности, поскольку при произвольном l_0 мы всегда можем использовать гомотетию с коэффициентом $\lambda = 1/l_0$. Условия (DB_1)–(DB_3) из определения 2, очевидно, инвариантны относительно таких преобразований в $\mathbb{R}^n$.

2. Обобщенные поверхности Бельтрами и вырожденное преобразование Бьянки. В работе [8] был введен в рассмотрение следующий класс псевдосферических поверхностей в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$.

Определение 3. *Обобщенной поверхностью Бельтрами в* $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, *называется двумерная поверхность, задаваемая радиусом-вектором*

$$r(u^1, u^2) = e^{-u^1}\rho(u^2) + \xi(u^1), \tag{18}$$

где $\rho(u^2) \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, *и* $\xi(u^1) \in \mathbb{R}^k$, $k \geq 1$, — *вектор-функции со значениями во взаимно ортогональных подпространствах в* $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^k$, *удовлетворяющие условиям*

$$\left|\frac{d\xi}{du^1}\right|^2 = 1 - e^{-2u^1}, \tag{19}$$

$$\left|\rho(u^2)\right| \equiv 1, \qquad \left|\frac{d\rho}{du^2}\right| \equiv 1. \tag{20}$$

В простейшем случае при $m = 2$, $k = 1$ получаем классическую поверхность Бельтрами в $\mathbb{R}^3$, задаваемую радиусом-вектором

$$r(u^1, u^2) = e^{-u^1}\left(\cos u^2, \sin u^2, 0\right) + \left(0, 0, \varsigma(u^1)\right),$$

где $\varsigma(u^1) = \displaystyle\int \sqrt{1 - e^{-2u^1}}\,du^1 = u^1 - \sqrt{1 - e^{-2u^1}} + \ln(1 + \sqrt{1 - e^{-2u^1}})$.

При других значениях $m \geq 2$, $k \geq 1$ возникает содержательный набор разнообразных поверхностей в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$. В работе [8] показано, что каждая из этих поверхностей, по аналогии с поверхностью Бельтрами, является псевдосферической, ее гауссова кривизна равна $K \equiv -1$, координаты $(u^1,\, u^2)$ являются орициклическими, т. е. метрика поверхности имеет вид $ds^2 = (du^1)^2 + e^{-2u^1}(du^2)^2$, а преобразование по формуле $\tilde{r} = r + \partial_1 r$ переводит поверхность в кривую с радиусом-вектором $\tilde{r} = \xi + \dfrac{d\xi}{du^1}$.

Оказывается, обобщенными поверхностями Бельтрами исчерпываются псевдосферические поверхности в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, допускающие вырожденное преобразование Бьянки в смысле расматриваемого в данной работе определения 2.

Теорема 2. *Пусть F^2 — обобщенная поверхность Бельтрами в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, заданная радиусом-вектором* (18), *удовлетворяющим* (19), (20). *Тогда преобразование $\tilde{r} = r + \partial_1 r$ удовлетворяет требованиям определения* 2 *при $l_0 = 1$, $\omega_0 = \pi/2$ и, таким образом, задает вырожденное преобразование Бьянки.*

Обратно, если регулярная поверхность в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, допускает вырожденное преобразование Бьянки с $l_0 = 1$, то эта поверхность представляет собой, с точностью до движения в $\mathbb{R}^n$, область на обобщенной поверхности Бельтрами, задаваемой радиусом-вектором (18), *удовлетворяющим* (19), (20), *а соответствующее вырожденное преобразование Бьянки задается формулой $\tilde{r} = r + \partial_1 r$.*

Доказательство. Пусть F^2 — обобщенная поверхность Бельтрами в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, заданная радиусом-вектором (18), удовлетворяющим (19), (20). Дифференцируя (18), находим

$$\partial_1 r \;=\; -e^{-u^1}\rho + \frac{d\xi}{du^1}, \qquad \partial_2 r \;=\; e^{-u^1}\,\frac{d\rho}{du^2}, \tag{21}$$

$$\partial_{12} r \;=\; -e^{-u^1}\,\frac{d\rho}{du^2}. \tag{22}$$

Из (21) с учетом (19), (20) следует, что метрика поверхности F^2 имеет вид $ds^2 = (du^1)^2 + e^{-2u^1}(du^2)^2$, и, как следствие, $\Gamma^2_{12} = -1$, $\Gamma^2_{11} = 0$. А из (22) вытекает, что $\partial_{12} r = -\partial_2 r$, и, значит, $L^\sigma_{12} = 0$, $1 \leq \sigma \leq n$. Поэтому если положить $l_0 = 1$, $\omega_0 = \pi/2$, то условия (6)–(8) будут выполнены, и следовательно, по лемме 1, преобразование поверхности F^2, задаваемое формулой $\tilde{r} = r + \partial_1 r$, будет вырожденным преобразованием Бьянки с $l_0 = 1$.

Обратно, предположим, что поверхность F^2 в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, допускает вырожденное преобразование Бьянки с $l_0 = 1$. Тогда, принимая во внимание лемму 1 и доказательство теоремы 1 при $\omega_0 = \pi/2$, получаем, что локально поверхность F^2 параметризуется орициклическими координатами (u^1, u^2), а ее вырожденное преобразование Бьянки задается формулой $\tilde{r} = r + \partial_1 r$. Псевдосферические поверхности в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, которые допускают параметризацию орициклическими координатами (u^1, u^2) так, что преобразование по формуле $\tilde{r} = r + \partial_1 r$ является вырожденным, т. е. переводит поверхность в кривую, были полностью описаны в [8], каждая из таких поверхностей, с точностью до движения в $\mathbb{R}^n$, является областью на обобщенной поверхности Бельтрами, что и требовалось доказать.

Из теоремы 2 и результатов работы [8] следует, что любая регулярная кривая в $\mathbb{R}^{n-2} \subset \mathbb{R}^n$ может быть локально получена как результат вырожденного преобразования Бьянки некоторой (области на) обобщенной поверхности Бельтрами в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$.

3. Обобщенные поверхности Дини. Рассмотрим еще один специальный класс поверхностей в многомерном евклидовом пространстве.

Определение 4. *Обобщенной поверхностью Дини в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, назовем двумерную поверхность, задаваемую радиусом-вектором*

$$r(u^1, u^2) \;=\; \frac{1}{\operatorname{ch}(u^1 + u^2 \operatorname{ctg}\omega_0)}\rho(u^2) + \bigl(u^1 - \operatorname{th}(u^1 + u^2 \operatorname{ctg}\omega_0)\bigr)\,\xi_0, \tag{23}$$

где $\rho(u^2)$ — вектор-функция со значениями в некотором $\mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая условиям

$$\bigl|\rho(u^2)\bigr| \;\equiv\; 1, \qquad \left|\frac{d\rho}{du^2}\right| \;\equiv\; 1, \tag{24}$$

ξ_0 — единичный направляющий вектор прямой $\mathbb{R}^1$ — ортогонального дополнения к $\mathbb{R}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$, т. е. $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \oplus \mathbb{R}^1$, а $\omega_0 \in (0, \pi/2)$ постоянная.

В простейшем случае, при $n = 3$ из (24) следует, что $\rho = (\cos u^2, \sin u^2, 0)$, а (23) описывает классическую поверхность Дини в $\mathbb{R}^3$, задаваемую радиусом-вектором

$$r(u^1, u^2) \;=\; \frac{1}{\mathrm{ch}\,(u^1 + u^2 \mathrm{ctg}\,\omega_0)} \big(\cos u^2, \sin u^2, 0\big) + \big(0, 0, u^1 - \mathrm{th}\,(u^1 + u^2 \mathrm{ctg}\,\omega_0)\big)\,. \qquad (25)$$

При других значениях $n \geq 4$ возникает содержательный набор разнообразных поверхностей в $\mathbb{R}^n$, во многом наследующих свойства классической поверхности Дини, что и объясняет используемую нами терминологию.

Теорема 3. *Пусть F^2 — обобщенная поверхность Дини в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, заданная радиусом-вектором* (23), *удовлетворяющим* (24). *Тогда:*

1) *поверхность F^2 является псевдосферической, гауссова кривизна равна $K \equiv -\sin^2 \omega_0$;*

2) *поверхность F^2 получается винтовым вращением трактрисы в $\mathbb{R}^n$;*

3) *метрика поверхности F^2 имеет вид*

$$ds^2 = \mathrm{th}^2(u^1 + u^2 \mathrm{ctg}\,\omega_0)(du^1)^2 + \frac{1}{\sin^2 \omega_0\, \mathrm{ch}^2(u^1 + u^2 \mathrm{ctg}\,\omega_0)}(du^2)^2, \qquad (26)$$

поверхность регулярна при $u^1 + u^2 \mathrm{ctg}\,\omega_0 \neq 0$, а ее сингулярная линия — ребро возврата $u^1 + u^2 \mathrm{ctg}\,\omega_0 = 0$ — представляет собой винтовую линию в $\mathbb{R}^n$;

4) *преобразование $\tilde{r} = r + \mathrm{cth}(u^1 + u^2 \mathrm{ctg}\,\omega_0)\, \partial_1 r$ удовлетворяет требованиям определения* 2 *при $l_0 = 1$ и, таким образом, задает вырожденное преобразование Бэклунда, при этом результирующая кривая представляет собой прямую $\mathbb{R}^1$ с направляющим вектором ξ_0.*

Доказательство. Дифференцируя (23), находим касательные векторы поверхности F^2:

$$\partial_1 r \;=\; -\frac{\mathrm{sh}(u^1 + u^2 \mathrm{ctg}\,\omega_0)}{\mathrm{ch}^2(u^1 + u^2 \mathrm{ctg}\,\omega_0)}\,\rho \;+\; \mathrm{th}^2(u^1 + u^2 \mathrm{ctg}\,\omega_0)\xi_0, \qquad (27)$$

$$\partial_2 r \;=\; -\mathrm{ctg}\,\omega_0\, \frac{\mathrm{sh}(u^1 + u^2 \mathrm{ctg}\,\omega_0)}{\mathrm{ch}^2(u^1 + u^2 \mathrm{ctg}\,\omega_0)}\,\rho \;+\; \frac{1}{\mathrm{ch}\,(u^1 + u^2 \mathrm{ctg}\,\omega_0)}\,\frac{d\rho}{du^2} \;-\; \frac{\mathrm{ctg}\,\omega_0}{\mathrm{ch}^2(u^1 + u^2 \mathrm{ctg}\,\omega_0)}\xi_0. \qquad (28)$$

Из (27), (28) с учетом (24) непосредственно следует, что метрика поверхности F^2 имеет указанный в формулировке вид. Вычисляя стандартным образом гауссову кривизну этой метрики, несложно убедиться, что $K \equiv -\sin^2 \omega_0$, т. е. рассматриваемая поверхность действительно является псевдосферической.

Поскольку детерминант матрицы коэффициентов первой квадратичной формы равен

$$\frac{\mathrm{th}^2(u^1 + u^2 \mathrm{ctg}\,\omega_0)}{\sin^2 \omega_0\; \mathrm{ch}^2(u^1 + u^2 \mathrm{ctg}\,\omega_0)},$$

параметризация поверхности F^2 координатами (u^1, u^2) является регулярной при $u^1 + u^2 \mathrm{ctg}\,\omega_0 \neq 0$, а при $u^1 + u^2 \mathrm{ctg}\,\omega_0 = 0$ получаем некоторую сингулярную кривую на F^2.

Если выполнить замену координат $\hat{u}^1 = u^1 + u^2 \mathrm{ctg}\,\omega_0$, $\hat{u}^2 = u^2$, то радиус-вектор (23) примет вид

$$r(\hat{u}^1, \hat{u}^2) \;=\; \frac{1}{\mathrm{ch}\,\hat{u}^1}\rho(\hat{u}^2) + \big(\hat{u}^1 - \mathrm{th}\,\hat{u}^1 - \hat{u}^2 \mathrm{ctg}\,\omega_0)\big)\,\xi_0. \qquad (29)$$

Отсюда несложно увидеть, что поверхность F^2 получается применением к плоской кривой $x^1 = \dfrac{1}{\operatorname{ch}\hat{u}^1}$, $x^2 = \ldots = x^{n-1} = 0$, $x^n = \hat{u}^1 - \operatorname{th}\hat{u}^1$ винтового вращения в $\mathbb{R}^n$, получаемого одновременным вращением в $\mathbb{R}^{n-1}$ вдоль натурально параметризованной сферической кривой с радиусом-вектором $\rho(\hat{u}^2)$ и параллельным переносом вдоль прямой $\mathbb{R}^1$. Очевидно, что указанная плоская кривая представляет собой в точности трактрису, ее особая точка $\hat{u}^1 = 0$ при упомянутом винтовом вращении описывает ребро возврата на F^2.

Наконец, применим к F^2 преобразование (3) с $l_0 = 1$. Рассмотрим сначала область $\Omega_+ \subset F^2$, определяемую условием $u^1 + u^2 \operatorname{ctg}\omega_0 > 0$. Подставляя (23) и (27) в (3), получаем

$$\tilde{r} = r + \operatorname{cth}(u^1 + u^2\operatorname{ctg}\omega_0)\partial_1 r \;=\; u^1\xi_0, \tag{30}$$

т. е. полученная в результате преобразования кривая γ представляет собой прямую $\mathbb{R}^1$ с направляющим вектором ξ_0.

Проверим выполнение условий (6) – (8), выполнение которых означает, что рассматриваемое преобразование является вырожденным преобразованием Бэклунда с $l_0 = 1$.

Вычисляя символы Кристоффеля поверхности F^2, находим

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{\operatorname{ch}(u^1 + u^2\operatorname{ctg}\omega_0)\operatorname{sh}(u^1 + u^2\operatorname{ctg}\omega_0)}, \qquad \Gamma^2_{11} = -\sin\omega_0\cos\omega_0 \operatorname{th}(u^1 + u^2\operatorname{ctg}\omega_0), \tag{31}$$

$$\Gamma^1_{12} = \frac{\operatorname{ctg}\omega_0}{\operatorname{ch}(u^1 + u^2\operatorname{ctg}\omega_0)\operatorname{sh}(u^1 + u^2\operatorname{ctg}\omega_0)}, \qquad \Gamma^2_{12} = -\operatorname{th}(u^1 + u^2\operatorname{ctg}\omega_0). \tag{32}$$

Подставляя (32) в (7), убеждаемся, что (7) будет выполнено.

Далее, дифференцируя (23) и подставляя (31), (32), находим

$$\sum_{\sigma=1}^{n-2} L^\sigma_{11} N_\sigma = \partial_{11} r - \Gamma^1_{11}\partial_1 r - \Gamma^2_{11}\partial_2 r = \sin^2\omega_0 \, \frac{\operatorname{sh}^2(u^1 + u^2\operatorname{ctg}\omega_0)}{\operatorname{ch}^3(u^1 + u^2\operatorname{ctg}\omega_0)}\,\rho +$$

$$+ \cos\omega_0 \, \sin\omega_0 \, \frac{\operatorname{sh}(u^1 + u^2\operatorname{ctg}\omega_0)}{\operatorname{ch}^2(u^1 + u^2\operatorname{ctg}\omega_0)}\,\frac{d\rho}{du^2} + \sin^2\omega_0 \, \frac{\operatorname{sh}(u^1 + u^2\operatorname{ctg}\omega_0)}{\operatorname{ch}^3(u^1 + u^2\operatorname{ctg}\omega_0)}\xi_0, \tag{33}$$

$$\sum_{\sigma=1}^{n-2} L^\sigma_{12} N_\sigma = \partial_{12} r - \Gamma^1_{12}\partial_1 r - \Gamma^2_{12}\partial_2 r = 0. \tag{34}$$

Из (34) непосредственно следует (6). Получая из (33) сумму

$$\sum_{\sigma=1}^{n-2} (L^\sigma_{11})^2 = \sin^2\omega_0 \, \frac{\operatorname{sh}^2(u^1 + u^2\operatorname{ctg}\omega_0)}{\operatorname{ch}^4(u^1 + u^2\operatorname{ctg}\omega_0)}$$

и подставляя ее вместе с (31) в (8), убеждаемся, что (8) также будет выполнено.

Таким образом, преобразование (30) удовлетворяет требованиям определения 2 и, следовательно, задает преобразование Бэклунда для области $\Omega_+ \subset F^2$.

Рассмотрим теперь $\Omega_- \subset F^2$, определяемую условием $u^1 + u^2\operatorname{ctg}\omega_0 < 0$. Несложно проверить, что преобразование (3), т. е.

$$\tilde{r} = r + |\mathrm{cth}(u^1 + u^2 \mathrm{ctg}\, \omega_0)| \partial_1 r = r - \mathrm{cth}(u^1 + u^2 \mathrm{ctg}\, \omega_0) \partial_1 r,$$

уже не будет представлять собой вырожденное преобразование Бэклунда, а преобразование

$$\tilde{r} = r - |\mathrm{cth}(u^1 + u^2 \mathrm{ctg}\, \omega_0)| \partial_1 r = r + \mathrm{cth}(u^1 + u^2 \mathrm{ctg}\, \omega_0) \partial_1 r$$

будет задавать преобразование Бэклунда для области $\Omega_- \subset F^2$, как и для области $\Omega_+ \subset F^2$. При этом оно может быть записано в виде (3), если выполнить замену координат $u \to -u$, $v \to -v$. Указанная замена позволяет свести все вычисления для Ω_- к проведенным выше вычислениям для Ω_+. Необходимость такой замены объясняется тем, что переход от области Ω_- к области Ω_+ на поверхности F^2 происходит вдоль ее особой линии, представляющей собой ребро возврата.

Теорема доказана.

Оказывается, что обобщенными поверхностями Дини исчерпываются все двумерные псевдосферические поверхности в многомерном евклидовом пространстве, допускающие вырожденное преобразование Бэклунда с $\omega_0 \neq \pi/2$, при котором результирующая кривая представляет собой прямолинейный отрезок.

Теорема 4. *Предположим, что регулярная поверхность F^2 в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, допускает вырожденное преобразование Бэклунда $\psi \colon F^2 \to \gamma$ с $l_0 = 1$ и $\omega_0 \neq \pi/2$, при котором кривая γ представляет собой интервал прямой в $\mathbb{R}^n$. Тогда, с точностью до движения в $\mathbb{R}^n$, поверхность F^2 представляет собой область на обобщенной поверхности Дини, задаваемой радиусом-вектором* (23), *удовлетворяющим* (24), *а соответствующее вырожденное преобразование Бэклунда задается формулой $\tilde{r} = r + \mathrm{cth}(u^1 + u^2 \mathrm{ctg}\; \omega_0)\, \partial_1 r$.*

Доказательство. Не уменьшая общности, будем считать, что отрезок γ лежит на прямой, проходящей через начало координат в $\mathbb{R}^n$. Обозначим эту прямую и ее ортогональное дополнение через $\mathbb{R}^1$ и $\mathbb{R}^{n-1}$, т. е. $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \oplus \mathbb{R}^n$, а единичный направляющий вектор прямой $\mathbb{R}^1$ через ξ_0.

Поскольку поверхность F^2 допускает вырожденное преобразование Бэклунда, по лемме 1 ее можно параметризовать локальными ортогональными координатами $(u^1,\, u^2)$ так, что выполнены условия (6) – (8), и при этом само вырожденное преобразование Бэклунда задается формулой (3).

Радиус-вектор поверхности F^2 представим в виде

$$r \;=\; \zeta(u^1, u^2) \;+\; z(u^1, u^2)\xi_0,$$

где $\zeta(u^1, u^2)$ — вектор-функция со значениями в $\mathbb{R}^{n-1}$, а $z(u^1, u^2)$ — скалярная функция. Подставляя $\partial_1 r = \partial_1 \zeta + \partial_1 z\, \xi_0$ и $g_{11} = |\partial_1 \zeta|^2 + (\partial_1 z)^2$ в (3), получаем

$$\tilde{r} \;=\; \zeta + \frac{1}{\sqrt{|\partial_1 \zeta|^2 + (\partial_1 z)^2}} \partial_1 \zeta \;+\; \left(z + \frac{\partial_1 z}{\sqrt{|\partial_1 \zeta|^2 + (\partial_1 z)^2}} \right) \xi_0.$$

По условию вектор-функция $\tilde{r}$ задает отрезок на прямой $\mathbb{R}^1$ с направляющим вектором ξ_0, поэтому

$$\zeta + \frac{1}{\sqrt{|\partial_1 \zeta|^2 + (\partial_1 z)^2}} \partial_1 \zeta \;=\; 0. \tag{35}$$

С локальной точки зрения возможны две ситуации: $\zeta \equiv 0$ и $\zeta \not\equiv 0$. Если бы $\zeta \equiv 0$, то поверхность F^2 вырождалась бы в прямую, что противоречит регулярности F^2. Поэтому будем предполагать, что $\zeta \neq 0$ и, не уменьшая общности, представим ζ в виде

$$\zeta = \frac{1}{\operatorname{ch}\varphi}\rho,$$

где $\rho(u^1, u^2)$ — единичная вектор-функция, $|\rho| \equiv 1$, а $\varphi(u^1, u^2)$ — скалярная функция. Тогда (35) примет вид

$$\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\varphi} + \frac{1}{\sqrt{\left|\partial_1\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\varphi}\rho\right)\right|^2 + (\partial_1 z)^2}}\partial_1\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\varphi}\right)\right)\rho + \frac{1}{\sqrt{\left|\partial_1\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\varphi}\rho\right)\right|^2 + (\partial_1 z)^2}}\frac{1}{\operatorname{ch}\varphi}\partial_1\rho \,=\, 0. \tag{36}$$

Поскольку $|\rho| \equiv 1$, то $\langle\rho, \partial_1\rho\rangle \equiv 0$. Поэтому, домножая (36) скалярно на $\partial_1\rho$, получаем $\partial_1\rho \equiv 0$, т. е. $\rho = \rho(u^2)$. Само равенство принимает вид

$$\frac{1}{\operatorname{ch}\varphi} + \frac{1}{\sqrt{\left|\partial_1\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\varphi}\rho\right)\right|^2 + (\partial_1 z)^2}}\partial_1\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\varphi}\right) \,=\, 0. \tag{37}$$

Запишем теперь условие ортогональности координат (u^1, u^2) на поверхности F^2. Поскольку радиус-вектор F^2 представлен в виде

$$r = \frac{1}{\operatorname{ch}\varphi}\rho + z\xi_0, \tag{38}$$

базисные касательные векторы поверхности F^2,

$$\partial_1 r = \partial_1\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\varphi}\right)\rho + \partial_1 z\ \xi_0, \qquad \partial_2 r = \partial_2\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\varphi}\right)\rho + \frac{1}{\operatorname{ch}\varphi}\frac{d\rho}{du^2} + \partial_2 z\ \xi_0,$$

будут ортогональны тогда и только тогда, когда

$$\partial_1\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\varphi}\right)\partial_2\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\varphi}\right) + \partial_1 z\ \partial_2 z \,=\, 0. \tag{39}$$

Разрешая (37) и (39) относительно первых производных функции $z(u^1, u^2)$, получаем

$$\partial_1 z \,=\, \operatorname{th}^2\varphi\,\partial_1\varphi, \tag{40}$$

$$\partial_2 z \,=\, -\frac{1}{\operatorname{ch}^2\varphi}\,\partial_2\varphi \tag{41}$$

с точностью до замены $z \to -z$, соответствующей преобразованию симметрии в $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \oplus \oplus\, \mathbb{R}^1$ относительно горизонтальной гиперплоскости $\mathbb{R}^{n-1}$.

Совместность системы соотношений (40), (41), т. е. $\partial_{12}z = \partial_{21}z$, приводит к условию

$$\partial_{12}\varphi = 0, \tag{42}$$

которому должна удовлетворять функция $\varphi(u^1, u^2)$. Но это означает, что $\varphi = au^1 + bu^2 + c$, где a, b, c — константы. Решение системы (40), (41) при этом имеет вид $z = au^1 + c - \mathrm{th}\,(au^1 + bu^2 + c)$ с точностью до аддитивной константы, соответствующей параллельному переносу в $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \oplus \mathbb{R}^1$ вдоль вертикальной прямой $\mathbb{R}^1$. Заметим, что $a \neq 0$, $b \neq 0$ в силу регулярности поверхности F^2.

Воспользуемся теперь условием (8). Как и при доказательстве предыдущих утверждений, вычисляя производные радиуса-вектора поверхности F^2, коэффициенты первой фундаментальной формы и символы Кристоффеля, а затем находя вектор

$$\sum_{\sigma=1}^{n-2} L_{11}^{\sigma} N_{\sigma} = \partial_{11}r - \Gamma_{11}^{1}\partial_1 r - \Gamma_{11}^{2}\partial_2 r$$

и с его помощью вычисляя $\sum_{\sigma=1}^{n-2} \left(L_{11}^{\sigma}\right)^2$, после подстановки соответствующих величин в (8) получаем

$$\left|\frac{d\rho}{du^2}\right|^2 = \mathrm{tg}^2\omega_0\, b^2. \tag{43}$$

Правая часть не равна нулю, поэтому $\dfrac{d\rho}{du^2} \neq 0$, а значит, вектор-функция $\rho(u^2)$ задает регулярную кривую на единичной сфере $S^{n-2} \subset \mathbb{R}^{n-1}$, причем u^2 представляет собой аффинный параметр на этой кривой. Не уменьшая общности можно считать, что u^2 — натуральный параметр, т. е. $\left|\dfrac{d\rho}{du^2}\right| \equiv 1$. Этого всегда можно добиться шкалирующей заменой $\hat{u}^2 = \displaystyle\int \left|\frac{d\rho}{du^2}\right| du^2$. В этом случае из (43), применив при необходимости замену $u^2 \to -u^2$, получим $b = \mathrm{ctg}\,\omega_0$.

Таким образом, с точностью до движения в $\mathbb{R}^n$ рассматриваемая поверхность F^2 локально задается радиусом-вектором (38), где вектор-функция $\rho(u^2)$ удовлетворяет (24), а $\varphi = au^1 + c + \mathrm{ctg}\,\omega_0 u^2$, $z = au^1 + c - \mathrm{th}\,(au^1 + \mathrm{ctg}\,\omega_0 u^2 + c)$. Применяя шкалирующую замену $\hat{u}^1 = au^1 + c$, можем положить $a = 1$, $c = 0$. Как результат, получаем, что радиус-вектор поверхности F^2 имеет вид (23), т. е. F^2 представляет собой область на обобщенной поверхности Дини, а ее вырожденное преобразование Бэклунда по формуле (3) с $l_0 = 1$ записывается в виде $\tilde{r} = r + \mathrm{cth}(u^1 + u^2\mathrm{ctg}\,\omega_0)\,\partial_1 r$, что и требовалось доказать.

Замечание. Если в определении 4 допустить $\omega_0 = \pi/2$, то задаваемая радиусом-вектором (23) поверхность F^2 в $\mathbb{R}^n$ будет представлять собой обобщенную поверхность Бельтрами.

Таким образом, мы полностью описали двумерные поверхности в $\mathbb{R}^n$, допускающие вырожденное преобразование Бэклунда с $\omega_0 \neq \pi/2$, при котором результирующая кривая представляет собой прямолинейный отрезок. Безусловный интерес вызывает вопрос о том, существуют ли двумерные поверхности в $\mathbb{R}^n$, допускающие вырожденное преобразование Бэклунда с $\omega_0 \neq \pi/2$, при котором результирующая кривая γ отлична от (интервала) прямой линии, т. е. имеет ненулевую кривизну. Если такие поверхности существуют, то как выглядит их радиус-вектор и насколько произвольной при этом может быть результирующая кривая γ? Возможный метод нахождения ответов на эти вопросы состоит в анализе разрешимости системы уравнений Гаусса – Кодацци – Риччи для поверхностей в $\mathbb{R}^n$, дополненной условиями (2) и (6) – (8)

на коэффициенты фундаментальных форм, с последующим интегрированием деривационных формул Вейнгартена.

Литература

1. *Aminov Yu. A., Sym A.* On Bianchi and Backlund transformations of two-dimensional surfaces in E^4 // Math. Phys., Anal., Geom. – 2000. – **3**. – P. 75 – 89.
2. *Aminov Yu. A., Sym A.* On Bianchi and Backlund transformations of two dimensional surfaces in four dimensional Euclidean space // Backlund and Darboux Transformations. The Geometry of Solitons. AARMS-CRM Workshop, Halifax, NS, 1999, Canada, June 4-9. – 2001. – P. 91 – 93.
3. *Аминов Ю. А.* Геометрия подмногообразий. – Киев: Наук. думка, 2002. – 468 с.
4. *Борисенко А. А., Николаевский Ю. А.* Многообразия Грассмана и грассманов образ подмногообразий // Успехи мат. наук. – 1991. – **46**, № 2. – С. 41 – 83.
5. *Gorkavyy V.* On pseudo-spherical congruencies in E^4 // Мат. физика, анализ, геометрия. – 2003. – **10**, № 4. – С. 498 – 504.
6. *Горькавый В. А.* Конгруэнции Бианки двумерных поверхностей в E^4 // Мат. сб. – 2005. – **196**, № 10. – С. 79 – 102.
7. *Gorkavyy V. O., Nevmerzhytska O. M.* Ruled surfaces as pseudo-spherical congruencies // Журн. мат. физики, анализа, геометрии. – 2009. – **5**, № 3. – С. 359 – 374.
8. *Горькавый В. А., Невмержицкая Е. Н.* О двумерных псевдосферических поверхностях с вырожденным преобразованием Бианки // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 11. – С. 1460 – 1468.
9. *Gorkavyy V.* An example of Bianchi transformation in E^4 // Журн. мат. физики, анализа, геометрии. – 2012. – **8**, № 3. – С. 240 – 247.
10. *Горькавый В. А.* Обобщение преобразования Бианки – Беклунда псевдосферических поверхностей // Итоги науки и техники. Совр. математика и ее приложения. Тематические обзоры. – 2014. – **126**. – С. 191 – 218.
11. *Позняк Э. Г.* Геометрическая интерпретация регулярных решений уравнения $Z_{xy} = \sin Z$ // Дифференц. уравнения. – 1979. – **15**, № 7. – С. 1332 – 1336.
12. *Позняк Э. Г., Попов А. Г.* Геометрия уравнения sin-Гордона // Итоги науки и техники. Геометрия. – 1991. – **23**. – С. 99 – 130.
13. *Попов А. Г.* Геометрия Лобачевского и математическая физика. – М.: Моск. гос. ун-т, 2012. – 320 с.
14. *Tenenblat K.* Transformations of manifolds and applications to differential equations // Pitman Monogr. and Surv. in Pure and Appl. Math. – London: Longman, 1998. – **93**. – 209 p.

Получено 17.03.15