УДК 517.9

В. Д. Кошманенко, С. М. Петренко (Ін-т математики НАН України, Київ)

РОЗКЛАД ГАНА – ЖОРДАНА ЯК РІВНОВАЖНИЙ СТАН СИСТЕМИ КОНФЛІКТУ

The notion of conflict system is introduced in terms of couples of probability measures. We construct several models of conflict systems and show that every trajectory with initial state given by a couple of measures μ, ν converges to an equilibrium state specified by the normalized components μ_+, ν_+ of the classical Hahn – Jordan decomposition of the signed measure $\omega = \mu - \nu$.

Введено понятие системы конфликта в терминах пар вероятностных мер. Построено несколько моделей систем конфликта и показано, что каждая траектория с начальным состоянием, заданным парой мер μ, ν, сходится к равновесному состоянию, которое фиксируется нормированными компонентами μ_+, ν_+ классического разложения Хана – Жордана заряда $\omega = \mu - \nu$.

1. Вступ. Сучасна математична теорія конфлікту ґрунтується на рівняннях Лотки – Вольтерра

$$\dot{x}_1 = x_1(r_1 - a_{11}x_1 + a_{12}x_2), \quad \dot{x}_2 = x_2(r_2 + a_{21}x_1 - a_{22}x_2) \tag{1.1}$$

та їх спеціалізованих версіях, відомих як рівняння Ланчестера та рівняння Ріхардсона (див. [1]). В (1.1) функції $x_i(t)$ позначають кількість біологічного виду в момент часу t, а дійсні коефіцієнти r_i, a_{ik} є параметрами задачі.

Система рівнянь (1.1) з початку виникнення призначалася для опису динаміки кількісних змін двох біологічних видів у результаті їх природної популяції, конфліктної боротьби та ефектів самознищення внаслідок перенасичення. Багато таких прикладів, зокрема ряд моделей поширення епідемій, розглянуто в монографії [2] (див. також [3]). Згодом виявилося, що ці рівняння в певному сенсі є універсальними. Вони придатні не лише в математичній біології, а і для побудови моделей конфлікту та опису динамічної поведінки складних систем різної природи в екології, соціальних науках, процесах взаємодії різних мов, релігійних, політичних і навіть військових конфліктах (див. дискусію на ці теми в лекціях Й. Епштейна [1]).

Важливо зауважити, що рівняння (1.1) описують динаміку кількісних змін опонентів. В застосуваннях саме кількісні характеристики конфліктуючих сторін мають вирішальне значення. Ідеологія теорії конфліктів на основі рівнянь Лотки – Вольтерра спрямована на здобуття переваги та перемоги для однієї із сторін та мінімізацію втрат, або, щонайменше, на порятунок для сторони, яка програє. Про встановлення компромісу між опонентами не йдеться.

Більш глибоке дослідження явища конфлікту та створення досконалішої теорії потребує статистичного аналізу величезної кількості актів конфліктної боротьби, які повторюються незліченну кількість разів. Такий аналіз можливий лише в термінах теорії ймовірностей, коли стан системи конфлікту задається розподілами випадкових величин, пов'язаних з опонентами у просторі їхнього існування. Перехід від рівнянь Лотки – Вольтерра до рівнянь у термінах імовірнісних розподілів аналогічний переходу від класичної фізики до квантової в термінах рівнянь.

У цій статті під системою конфлікту будемо розуміти складну фізичну систему, яка описує конфліктну взаємодію двох альтернативних сторін у термінах імовірнісних розподілів на спільному просторі існування. Наведемо математичне означення.

Нехай Ω позначає компакт з деякого метричного простору, на якому задано σ-алгебру підмножин $\mathcal{R}$. Позначимо через $\mathcal{M}^+(\Omega)$ сім'ю всіх σ-адитивних додатних мір на $\mathcal{R}$. Підклас імовірнісних мір позначимо через $\mathcal{M}_1^+(\Omega)$.

Кожну пару мір $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1^+(\Omega)$ називаємо станом системи конфлікту між парою опонентів, розподіли яких на Ω задано цими мірами. Довільне відображення

$$\left\{ \begin{array}{c} \mu \\ \nu \end{array} \right\} \xrightarrow{*} \left\{ \begin{array}{c} \mu' \\ \nu' \end{array} \right\}, \quad \mu, \nu, \mu', \nu' \in \mathcal{M}_1^+(\Omega), \tag{1.2}$$

називаємо композицією конфлікту, а трійку $(\Omega, \mathcal{M}_1^+(\Omega), *)$ — системою конфлікту.

Звичайно, відображення $*$ задається нелінійними рівняннями в дискретному чи неперервному часі (див. нижче) і має додаткові властивості. Рівняння описують еволюцію змін розподілів, заданих мірами ω, ν на просторі Ω, внаслідок конфліктної взаємодії протидіючих сторін. Замість наведених вище рівнянь Лотки – Вольтерра ми розглядаємо рівняння вигляду

$$\mu^{N+1} = \mu^N(\theta^N + 1 - \nu^N), \quad \nu^{N+1} = \nu^N(\theta^N + 1 - \mu^N), \tag{1.3}$$

$$\mu^{N+1} = \mu^N(\theta^N + 1) - \tau^N, \quad \nu^{N+1} = \nu^N(\theta^N + 1) - \tau^N \tag{1.4}$$

для дискретного часу $N = 0, 1, \ldots$ та

$$\dot{\mu} = \mu(\theta - \nu), \quad \dot{\nu} = \nu(\theta - \mu), \tag{1.5}$$

$$\dot{\mu} = \frac{\mu\theta - \nu}{z}, \quad \dot{\nu} = \frac{\nu\theta - \mu}{z} \tag{1.6}$$

для неперервного часу $t \geq 0$. Тут $\theta = \theta(\mu, \nu)$ — скалярна функція, яка називається показником (глобальної) конфліктності між опонентами, математично задається як квадратична форма від мір μ, ν, її явний вигляд визначається конкретною моделлю. Функція $\tau = \tau(\mu, \nu)$ називається показником локальної конфронтації (або окупації) і є квадратичною формою на просторі мір $\mathcal{M}_1^+(\Omega)$. Знаменник z у рівняннях (1.4) необхідний для нормування мір на одиницю.

Рівноважним станом системи конфлікту називається пара мір $\mu^\infty, \nu^\infty \in \mathcal{M}_1^+(\Omega)$, для якої права частина рівнянь в одній із систем (1.3) – (1.6) тотожно дорівнює нулю.

У цій роботі ми докладно розглянемо кілька моделей систем конфлікту лише з дискретним часом, хоча основний результат є справедливим і для неперервного часу.

Візьмемо довільну пару $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1^+(\Omega)$, $\mu \neq \nu$. Згідно з класичним результатом з теорії міри (див., наприклад, [4 – 6]) для заряду $\omega = \mu - \nu$ існує розклад Гана множини Ω на дві частини

$$\Omega = \Omega_+ \cup \Omega_-, \quad \Omega_+ \cap \Omega_- = \varnothing \tag{1.7}$$

такий, що для ω має місце розклад Жордана

$$\omega = \omega_+ - \omega_-, \quad \omega_+(\Omega_-) = 0 = \omega_-(\Omega_+), \tag{1.8}$$

де компоненти $\omega_+, \omega_- \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ визначаються умовами

$$\omega_+(A) = \omega_+(A_+) = \sup_{B \subseteq A} \omega(B), \quad A_+ = A \cap \Omega_+, \quad A, B \in \mathcal{R},$$

$$\omega_-(A) = \omega_-(A_-) = \sup_{B \subseteq A} -\omega(B), \quad A_- = A \cap \Omega_-.$$

Звичайно, розклад Гана (1.7) не єдиний, але додатні міри ω_+, ω_- в (1.8) фіксуються зарядом ω однозначно. Нормуючи їх на одиницю, одержуємо дві ймовірнісні міри з $\mathcal{M}_1^+(\Omega)$:

$$\mu_+ := \frac{\omega_+}{\omega_+(\Omega)}, \quad \nu_- := \frac{\omega_-}{\omega_-(\Omega)}. \tag{1.9}$$

Таким чином, справедливою є наступна теорема.

Теорема 1.1. *Кожна траєкторія системи конфлікту, задана однією з систем рівнянь* (1.3) – (1.6) *з початковим станом* $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1^+(\Omega)$, *збігається до рівноважного стану* $\mu^\infty, \nu^\infty \in \in \mathcal{M}_1^+(\Omega)$. *При цьому виконуються рівності*

$$\mu^\infty = \mu_+, \quad \nu^\infty = \nu_-, \tag{1.10}$$

де μ_+, ν_- *визначено в* (1.9).

Ми доведемо цю теорему для кількох фіксованих моделей: коли μ, ν — дискретні міри, кусково-рівномірно розподілені, абсолютно неперервні на відрізку $[0, 1]$ та абстрактні на компактній множині. Доведення для загального випадку буде опубліковано пізніше.

Зауважимо, що в роботах [7, 8] вже досліджувались системи конфлікту у випадку дискретних мір. У термінах стохастичних векторів такі системи вивчалися також у [9 – 11]. Зокрема, в цих роботах доведено існування нерухомих граничних точок (рівноважних станів). Застосування теорії систем конфлікту до моделювання природних процесів наведено в роботах [12, 13]. Зазначимо також, що опис множини граничних точок у роботах [7 – 11] по суті збігається із рівноважними станами з цієї роботи, але в [7 – 11] цей результат не було явно сформульовано і доведено.

Мета цієї роботи — узагальнити і довести встановлений зв'язок між розкладом Гана – Жордана для зарядів та рівноважними станами систем конфлікту в термінах широкого класу мір.

2. Системи конфлікту в термінах дискретних мір. Нехай простір Ω — скінченний набір точок, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, $2 \leq n < \infty$, а σ-алгебра $\mathcal{R}$ складається з усіх упорядкованих підмножин з Ω включно з Ω та $\varnothing$. Тоді кожну міру $\mu \in \mathcal{M}_1^+(\Omega)$ можна ототожнити з вектором $p = (p_1, \ldots, p_n)$, якщо покласти $p_i = \mu(\omega_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Такий вектор буде стохастичним, оскільки $p_i \geq 0$ та $p_1 + \ldots + p_n = 1$. Множину всіх стохастичних векторів розмірності $n \geq 2$ позначаємо через $\mathbb{R}^n_{+,1}$. Отже, далі замість пар мір μ, $\nu \in \mathcal{M}_1^+(\Omega)$ розглядаємо пари стохастичних векторів $p, r \in \mathbb{R}^n_{+,1}$, $\|p\|_1 = \|r\|_1 = 1$. У просторі таких пар вводимо композицію конфлікту $\divideontimes$, яка в термінах координат визначається формулами

$$p_i' = p_i(\theta + 1 - r_i), \quad r_i' = r_i(\theta + 1 - p_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

де $\theta = \sum_{i=1}^n p_i r_i = (p, r)$ — скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$. Легко перевірити, що $p', r' \in \mathbb{R}^n_{+,1}$, тобто є стохастичними, $\|p'\|_1 = \|r'\|_1 = 1$. Таким чином, ми побудували модель системи конфлікту $(\Omega, \mathbb{R}^n_{+,1}, \divideontimes)$. Траєкторії такої системи

$$\{p^N, r^N\} \xrightarrow{\divideontimes} \{p^{N+1}, r^{N+1}\}, \quad N = 0, 1, \ldots, \tag{2.1}$$

з довільними початковими станами $\{p, r\}$, $p, r \in \mathbb{R}^n_{+,1}$, визначаються рівняннями вигляду (1.3) в термінах координат

$$p_i^{N+1} = p_i^N \left(\theta^N + 1 - r_i^N\right), \quad r_i^{N+1} = r_i^N \left(\theta^N + 1 - p_i^N\right), \quad N = 1, 2, \ldots, \tag{2.2}$$

де $p^0 = p$, $r^0 = r$ та $\theta^N = (p^N, r^N)$.

Теорема 2.1. *Кожна траєкторія* (2.1) *системи конфлікту* $(\Omega, \mathbb{R}^n_{+,1}, \divideontimes)$ *з початковим станом* $\{p, r\}$, $p, r \in \mathbb{R}^n_{+,1}$, *збігається до рівноважного стану* $\{p^\infty, r^\infty\}$ *при* $N \to \infty$, *тобто існують граничні вектори*

$$p^\infty = \lim_{N\to\infty} p^N, \quad r^\infty = \lim_{N\to\infty} r^N \tag{2.3}$$

і вони є нерухомими відносно перетворення координат, заданого рівняннями (2.2).

Доведення. Нехай $p \neq r$ та $p_i > r_i > 0$ для деякого $i \in \overline{1,n}$. Тоді з (2.2) випливає, що послідовність $d_i^N := p_i^N - r_i^N$ монотонно зростає при $N \to \infty$. Оскільки очевидно, що вона є обмеженою, $d_i^N \leq 1$, то існує границя

$$0 < d_i^\infty = \lim_{N\to\infty} d_i^N \leq 1.$$

Далі, за цієї ж умови, $p_i > r_i > 0$, послідовність відношень координат $R_i^N = p_i^N / r_i^N$ розбігається до $+\infty$, оскільки з (2.2), як легко переконатися, випливає, що $R_i^N = R_i^{N-1} k_i^{N-1}$, $k_i^N > k_i^{N-1} > 1$, для всіх $N \geq 1$. Це означає, що $r_i^N \to 0$, а $p_i^N \to p_i^\infty = d_i^\infty > 0$, $N \to \infty$. Тому для граничних значень маємо $p_i^\infty = p_i^\infty(\theta^\infty + 1)$. Це можливо, лише якщо скалярний добуток $(p^N, r^N) \to 0$ (докладніше див. [7, 8]). Отже, $\theta^\infty = 0$. Аналогічно, якщо для якогось іншого індексу $k \in \overline{1,n}$ виконується протилежна умова $r_k > p_k > 0$, то $p_k^N \to 0$, а $r_k^N \to -d_k^\infty > 0$ при $N \to \infty$. У випадку, коли $p_l = r_l$, неважко зрозуміти, що $p_l^\infty = r_l^\infty = 0$. Таким чином, у випадку $p \neq r$ доведено існування граничних векторів p^∞, r^∞. Нерухомість стану $\{p^\infty, r^\infty\}$ відносно перетворення $\divideontimes$ перевіряється безпосередньо з урахуванням того, що для кожної пари координат p_i^∞, r_i^∞ хоча б одна з них дорівнює нулю. Якщо початковий стан задано рівними векторами, $p = r$, з додатними координатами, то граничні вектори p^∞, r^∞ також існують і утворюють рівноважний стан (див. [7, 8]). Усі координати цих векторів дорівнюють $1/n$.

Теорему 2.1 доведено.

Для простору $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ і початкової пари стохастичних векторів $p, r \in \mathbb{R}^n_{+,1}$ розклад Гана $\Omega = \Omega_+ \cup \Omega_-$ визначається так:

$$\omega_i \subseteq \Omega_+, \quad \text{якщо} \quad p_i \geq r_i, \quad \text{і} \quad \omega_k \subseteq \Omega_-, \quad \text{якщо} \quad p_k < r_k.$$

Далі пишемо $i \in \mathbb{N}_+$, якщо $\omega_i \subseteq \Omega_+$, та $k \in \mathbb{N}_-$, якщо $\omega_k \subseteq \Omega_-$. Розклад Жордана для заряду $p - r$ має вигляд

$$p - r = d^+ - d^-,$$

де координати векторів d^+, $d^- \in \mathbb{R}^n_+$ є такими:

$$d_i^+ = \begin{cases} p_i - r_i & \text{при} \;\; i \in \mathbb{N}_+, \\ 0 \; - \; \text{в протилежному випадку}, \end{cases} \qquad d_k^- = \begin{cases} r_k - p_k & \text{при} \;\; k \in \mathbb{N}_-, \\ 0 \; - \; \text{в протилежному випадку}. \end{cases}$$

Вектори d^+, d^-, перенормовані на одиницю, позначимо через p^+, r^-:

$$p^+ = \frac{d^+}{D}, \quad r^- = \frac{d^-}{D}, \tag{2.4}$$

де

$$D = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} |d_j|, \quad d_j = p_j - r_j. \tag{2.5}$$

Далі стверджується, що вектори з рівноважного стану $\{p^\infty, r^\infty\}$ в теоремі 2.1 збігаються з векторами p^+, r^-, визначеними в (2.4) згідно з розкладом Жордана.

Теорема 2.2. *Якщо початковий стан $\{p, r\}$ системи конфлікту $(\Omega, \mathbb{R}^n_{+,1}, \circledast)$ задано різними стохастичними векторами, $p \neq r$, то для граничних векторів p^∞, r^∞ з* (2.3) *справджуються рівності*

$$p^\infty = p^+, \quad r^\infty = r^-,$$

де p^+, r^- визначено в (2.4).

Доведення. Встановимо справедливість зображення векторів p^∞, r^∞ правими частинами формул (2.4) в термінах координат. Розглянемо спочатку найпростіший випадок, коли нерівності $p_i > r_i$, $p_k < r_k$ виконуються лише для двох індексів, а для всіх інших $p_j = r_j$, $j \neq i, k$. Тоді легко бачити, що $p_j^\infty = r_j^\infty = 0$, а $p_i^\infty = 1 = r_k^\infty$, $p_k^\infty = 0 = r_i^\infty$. В цьому випадку $D = d_i = -d_k$ і зображення для p^∞, r^∞ формулами (2.4), очевидно, є правильними.

Далі, нехай існує хоча б пара індексів i_1, i_2 таких, що $p_{i_1} > r_{i_1}$, $p_{i_2} > r_{i_2}$. Тоді з (2.2) одержуємо

$$\frac{d_{i_1}}{d_{i_2}} = \frac{d^1_{i_1}}{d^1_{i_2}} = \frac{d^N_{i_1}}{d^N_{i_2}} = \frac{d^\infty_{i_1}}{d^\infty_{i_2}} = \frac{p^\infty_{i_1}}{p^\infty_{i_2}}.$$

Тому $p^\infty_{i_1} = kd_{i_1}$, $p^\infty_{i_2} = kd_{i_2}$, $k > 0$. Легко зрозуміти, що $k = 1/D$, оскільки $\sum_i p_i^\infty = 1$. Цим доведено, що

$$p_i^\infty = \frac{d_i}{D} = \frac{d_i^+}{D} = p_i^+, \quad i \in \mathbb{N}_+.$$

Аналогічним чином встановлюємо, що

$$r_k^\infty = \frac{-d_k}{D} = \frac{d_k^-}{D} = r_k^-, \quad k \in \mathbb{N}_-.$$

Насамкінець зауважимо, що у випадку, коли існує лише один індекс k такий, що $p_k < r_k$, легко зрозуміти, що $r_l^\infty = 0$ для всіх $l \neq k$, а $r_k^\infty = 1$. При цьому $D = r_k - p_k$ і виконується формула $r_k^\infty = -d_k/D = r_k^- = 1$.

Теорему 2.2 доведено.

3. Динаміка у просторі кусково-рівномірно розподілених мір. Нехай $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{R}$ — борелівська σ-алгебра, а $\mu, \nu \in \mathcal{M}_{\mathrm{kpp}}(\Omega)$, де $\mathcal{M}_{\mathrm{kpp}}(\Omega)$ позначає клас імовірнісних кусково-рівномірно розподілених мір на $[0, 1]$.

Для фіксованої пари мір $\mu, \nu \in \mathcal{M}_{\mathrm{kpp}}(\Omega)$ позначимо через $\{h_1, h_2, \ldots, l_1, l_2, \ldots\}$ точки розриву функцій щільності цих мір. Впорядковану послідовність різних точок із набору $\{0, h_1, h_2, \ldots, l_1, l_2, \ldots, 1\}$ перепозначимо через $\{s_1, s_2, \ldots, s_{k+1}\}$. Ця послідовність точок утворює деяке скінченне розбиття відрізка $[0, 1]$:

$$[0, 1] = \bigcup_{i=1}^{k} [s_i, s_{i+1}], \tag{3.1}$$

де кожен відрізок $[s_i, s_{i+1}]$ має довжину $0 < q_i = s_{i+1} - s_i < 1$. Очевидно, що міри μ, ν є рівномірно розподіленими на кожному відрізку $[s_i, s_{i+1}]$.

Використовуючи розбиття (3.1), поставимо у відповідність фіксованим вище мірам $\mu, \nu \in \mathcal{M}_{\text{kpp}}(\Omega)$ пару векторів $p, r \in \mathbb{R}^k_{+,1}$, $p = (p_1, \ldots, p_k)$, $r = (r_1, \ldots, r_k)$ з невід'ємними координатами:

$$p_i := \mu([s_i, s_{i+1}]), \quad r_i := \nu([s_i, s_{i+1}]), \quad i = 1, \ldots, k. \tag{3.2}$$

Зрозуміло, що

$$\sum_{i=1}^{k} p_i = \mu([0,1]) = 1 = \sum_{i=1}^{k} r_i = \nu([0,1]).$$

Важливо, що ця відповідність між мірами та векторами є бієктивною. При фіксованому розбитті (3.1) кожній парі векторів $p, r \in \mathbb{R}^k_{+,1}$ однозначно відповідає, згідно з (3.2), пара кусково-рівномірно розподілених мір $\mu, \nu \in \mathcal{M}_{\text{kpp}}(\Omega)$. Для відновлення цих мір спочатку покладаємо $\mu[s_i, s_{i+1}]) = p_i$, $\nu([s_i, s_{i+1}]) = r_i$, а для довільної борелівської підмножини $A \subseteq [0,1]$ визначаємо

$$\mu(A) = \sum_i p_i \frac{|A_i|}{q_i}, \quad \nu(A) = \sum_i r_i \frac{|A_i|}{q_i}, \quad A_i = A \cap [s_i, s_{i+1}], \tag{3.3}$$

де $\mid A_i \mid$ позначає міру Лебега множини A_i. Таким чином, розбиття (3.1) задає взаємно однозначну відповідність між стохастичними векторами з $\mathbb{R}^k_+$ та мірами з $\mathcal{M}_{\text{kpp}}(\Omega)$, які рівномірно розподілені на кожному проміжку $[s_i, s_{i+1}]$.

Введемо у просторі пар кусково-рівномірно розподілених мір композицію конфлікту за допомогою відображення

$$\{\mu^0, \nu^0\} \xrightarrow{\circledast} \{\mu^1, \nu^1\}, \tag{3.4}$$

де нова пара мір μ^1, ν^1 визначається по $\mu^0 = \mu$ і $\nu^0 = \nu$ за таким правилом. Кожна з мір μ^1, ν^1 є кусково-рівномірно розподіленою на відрізках $[s_i, s_{i+1}]$ з розбиття (3.1) і має такі значення:

$$\mu^1([s_i, s_{i+1}]) := p^1_i, \quad \nu^1([s_i, s_{i+1}]) := r^1_i, \quad i = 1, \ldots, k, \tag{3.5}$$

де координати векторів $p^1 = \{p^1_i\}_{i=1}^k$, $r^1 = \{r^1_i\}_{i=1}^k$ визначено згідно з формулами (2.2). Для довільної борелевої множини $A \in \mathcal{R}$ значення мір μ^1, ν^1 визначаються формулами, аналогічними (3.3):

$$\mu^1(A) = \sum_{i=1}^{k} \mu^1(A_i) = \sum_{i=1}^{k} p^1_i |A_i|/q_i, \quad \nu^1(A) = \sum_{i=1}^{k} \nu^1(A_i) = \sum_{i=1}^{k} r^1_i |A_i|/q_i.$$

Таким чином, ми побудували нову модель системи конфлікту $(\Omega, \mathcal{M}_{\text{kpp}}(\Omega), \circledast)$, де $\Omega = [0,1]$, а відображення $\circledast$ визначено в (3.4). Ітерація цього відображення задає деяку траєкторію системи конфлікту в просторі $\mathcal{M}_{\text{kpp}}(\Omega) \times \mathcal{M}_{\text{kpp}}(\Omega)$:

$$\{\mu^0, \nu^0\} \xrightarrow{\circledast} \{\mu^1, \nu^1\} \xrightarrow{\circledast} \ldots \xrightarrow{\circledast} \{\mu^N, \nu^N\} \xrightarrow{\circledast} \ldots, \quad N = 1, 2, \ldots. \tag{3.6}$$

Наступна теорема є варіантом загальної теореми 1.1 у випадку кусково-рівномірно розподілених мір на відрізку $[0,1]$.

Теорема 3.1. *Кожна траєкторія* (3.6) *системи конфлікту* $(\Omega, \mathcal{M}_{\text{kpp}}(\Omega), \divideontimes)$ *з початковим станом* $\{\mu^0, \nu^0\}$, $\mu^0 = \mu$, $\nu^0 = \nu$, $\mu \neq \nu$, $\mu, \nu \in \mathcal{M}_{\text{kpp}}(\Omega)$, *збігається до рівноважного стану* $\{\mu^\infty, \nu^\infty\}$ *при* $N \to \infty$. *При цьому*

$$\mu^\infty = \mu_+, \quad \nu^\infty = \nu_-, \tag{3.7}$$

де μ_+, ν_- *— нормовані компоненти розкладу Гана – Жордана заряду* $\omega = \mu - \nu$.

Доведення. Зазначимо, що за побудовою як початкова, так і гранична пара мір відповідають одному і тому ж розкладу (3.1). Тому переходом до стохастичних векторів доведення цієї теореми зводиться до застосування теорем 2.1, 2.2. Дійсно, для кожної пари стохастичних векторів $p^0, r^0 \in \mathbb{R}^k_{+,1}$ за теоремою 2.1 існують граничні вектори $p^\infty, r^\infty \in \mathbb{R}^k_{+,1}$, інваріантні відносно композиції конфлікту. Векторам p^∞, r^∞, які інваріантні відносно перетворення $\divideontimes$, відповідає пара кусково-рівномірно розподілених мір μ^∞, ν^∞ із простору $\mathcal{M}_{\text{kpp}}(\Omega)$. Рівності (3.7) встановлюються також переходом до стохастичних векторів із використанням (2.4) та аргументації з доведення теореми 2.2.

Теорему 3.1 доведено.

***Зауваження* 3.1.** Теорема 3.1 легко узагальнюється на випадок зліченного розбиття відрізка $[0, 1]$, коли вектори p, r з координатами, заданими в (3.2), належать l_2.

4. Випадок абсолютно неперервних мір. Нехай $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{R}$ — борелівська σ-алгебра, а μ, ν — пара абсолютно неперервних імовірнісних мір, $\mu, \nu \in \mathcal{M}_{ac}([0, 1])$, $\mu \neq \nu$, щільності яких — неперервні функції:

$$\mu(A) = \int\limits_A \rho(x)dx, \quad \nu(A) = \int\limits_A \sigma(x)dx, \quad A \in \mathcal{R}, \quad \rho, \sigma \in C([0, 1]). \tag{4.1}$$

Завдяки неперервності функція $h(x) = \rho(x) - \sigma(x)$ змінює свій знак на відрізку $[0, 1]$ не більш ніж зліченну кількість разів. Це означає, що існує не більш ніж зліченне розбиття відрізка $[0, 1]$ на зв'язні підмножини з $\mathcal{R}$:

$$[0, 1] = \bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i, \quad n \leq \infty, \tag{4.2}$$

такі, що $\Delta_i \in \Omega_+ \vee \Omega_-$, $i \in \overline{1, n}$, де Ω_+, Ω_- відповідають розкладу Гана для заряду $\omega = \mu - \nu$.

Використавши розбиття (4.2), співставимо мірам μ, ν пару кусково-рівномірно розподілених мір $\widetilde{\mu}$, $\widetilde{\nu}$ за правилом

$$\widetilde{\mu}(A) = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\mu}_i(A), \quad \widetilde{\nu}(A) = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\nu}_{i(}A), \quad A \in \mathcal{R}, \tag{4.3}$$

де

$$\widetilde{\mu}_i(A) = p_i \frac{|A_i|}{|\Delta_i|}, \quad p_i = \mu(\Delta_i), \quad \widetilde{\nu}_j(A) = r_j \frac{|A_j|}{|\Delta_j|}, \quad r_j = \nu(\Delta_j), \quad A_i = A \cap \Delta_i.$$

Лема 4.1. *Нехай для* $\mu, \nu \in \mathcal{M}_{ac}[0, 1]$, $\mu \neq \nu$, *виконуються умови* (4.1). *Тоді траєкторія системи конфлікту вигляду* (3.6) *з початковим станом* $\{\widetilde{\mu}, \widetilde{\nu}\}$, *де* $\widetilde{\mu}, \widetilde{\nu}$ *— пара кусково-рівномірно розподілених мір, побудованих згідно з* (4.3), *збігається до рівноважного стану* $\{\widetilde{\mu}^\infty, \widetilde{\nu}^\infty\}$, *заданого мірами*

$$\widetilde{\mu}^{\infty} = \lim_{N\to\infty} \widetilde{\mu}^{N}, \quad \widetilde{\nu}^{\infty} = \lim_{N\to\infty} \widetilde{\nu}^{N}. \tag{4.4}$$

При цьому

$$\widetilde{\mu}^{\infty}(\Delta_i) = \mu_+(\Delta_i), \quad \widetilde{\nu}^{\infty}(\Delta_i) = \nu_-(\Delta_i), \quad i \in \overline{1,n}, \tag{4.5}$$

де μ_+, ν_- *— нормовані компоненти розкладу Гана – Жордана для заряду* $\omega = \mu - \nu$.

Доведення. Існування границь (4.4), які задають рівноважний стан, випливає з теореми 3.1. Доведемо рівності (4.5). Розглянемо на $[0,1]$ заряд $\widetilde{\omega} = \widetilde{\mu} - \widetilde{\nu}$. Згідно з (4.3)

$$\widetilde{\omega}_i(\Delta_i) = \widetilde{\mu}_i(\Delta_i) - \widetilde{\nu}_i(\Delta_i) = p_i - r_i \quad \text{для всіх} \quad i \in \overline{1,n}.$$

На N-му кроці траєкторія системи конфлікту вигляду (3.6) приводить до

$$\widetilde{\omega}_i^N := \widetilde{\omega}^N \restriction \Delta_i, \quad \widetilde{\omega}_i^N(\Delta_i) = \widetilde{\mu}_i^N(\Delta_i) - \widetilde{\nu}_i^N(\Delta_i) = p_i^N - r_i^N, \quad i \in \overline{1,n},$$

де p_i^N, r_i^N визначено рівняннями (2.2) та $\widetilde{\mu}_i^0(\Delta_i) = p_i$, $\widetilde{\nu}_i^0(\Delta_i) = r_i$, $N \in \mathbb{N}$, $i \in \overline{1,n}$. Якщо $\widetilde{\omega}(\Delta_i) > 0$ для $\Delta_i \subseteq \Omega_+$, то $p_i > r_i$. Тоді за теоремою 2.2

$$p_i^{\infty} = \lim_{N\to\infty} p_i^N = \frac{d_i^+}{D}, \quad r_i^{\infty} = \lim_{N\to\infty} r_i^N = 0.$$

Звідси в термінах зарядів маємо

$$\widetilde{\omega}_i^{\infty}(A) = \lim_{N\to\infty} \widetilde{\omega}_i^N(A) = \frac{|A \cap \Delta_i|}{|\Delta_i|} p_i^{\infty} = \frac{|A_i|}{|\Delta_i|} \frac{d_i^+}{D}, \quad A \in \mathcal{R}.$$

Покажемо, що $\mu_+(\Delta_i) = \widetilde{\omega}_i^{\infty}(\Delta_i) = \widetilde{\mu}^{\infty}(\Delta_i) = d_i^+/D$. Дійсно,

$$\mu_+(\Delta_i) := \frac{\omega_+(\Delta_i)}{\omega_+([0,1])} = \frac{\omega(\Delta_i)}{\omega(\Omega_+)} = \frac{\mu(\Delta_i) - \nu(\Delta_i)}{\mu(\Omega_+) - \nu(\Omega_+)} = \frac{p_i - r_i}{D} = \frac{d_i^+}{D}.$$

Зрозуміло, що для $\Delta_k \subseteq \Omega_-$ значення $\mu_+(\Delta_k) = \widetilde{\mu}^{\infty}(\Delta_k) = 0$. Це доводить першу з рівностей (4.5). Аналогічним чином доводимо другу рівність, починаючи з $\widetilde{\omega}(\Delta_i) < 0$ для $\Delta_i \subseteq \Omega_-$.

Якщо для якоїсь множини $\Delta_j \subseteq \Omega$ виявиться, що $\widetilde{\omega}(\Delta_j) = 0$, то за теоремою 2.2 $p_j^{\infty} = r_j^{\infty} = 0$, тому

$$\mu_+(\Delta_j) = \widetilde{\mu}^{\infty}(\Delta_j) = \widetilde{\nu}^{\infty}(\Delta_j) = \nu_-(\Delta_j) = 0.$$

Лему 4.1 доведено.

Зазначимо, що згідно з (4.5) значення мір $\widetilde{\mu}^{\infty}$, μ_+ (та $\widetilde{\nu}^{\infty}$, ν_-) рівні між собою лише на відрізках Δ_i з розбиття (4.2). Для довільних $A \in \mathcal{R}$ взагалі $\widetilde{\mu}^{\infty}(A) \neq \mu_+(A)$ та $\widetilde{\nu}^{\infty}(A) \neq \nu_-(A)$. Але, вдосконалюючи спосіб подрібнення відрізка $[0,1]$, можна досягти того, що відмінність між мірами $\widetilde{\mu}^{\infty}$, μ_+ та $\widetilde{\nu}^{\infty}$, ν_- стане як завгодно малою. Для цього проведемо додаткове розбиття кожної множини Δ_i з (4.2):

$$[0,1] = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{k=1}^{m_i} \Delta_{i_k}, \quad n \leq \infty, \quad m_i < \infty, \tag{4.6}$$

таким чином, щоб для довільного наперед фіксованого $\varepsilon > 0$ виконувалась умова **(C)**:

$$\sup_{\Delta_{i_k}} |M_{i_k} - m_{i_k}| < \varepsilon,$$

де $m_{i_k} := \inf_{x\in\Delta_{i_k}} h(x)/D$, $M_{i_k} := \sup_{x\in\Delta_{i_k}} h(x)/D$, $h(x) = \rho(x) - \sigma(x)$, $D = \displaystyle\int_0^1 |h(x)|dx$.

Наступна теорема стверджує, що нормовані компоненти розкладу Гана – Жордана μ_+, ν_+ заряду $\omega = \mu - \nu$ можна як завгодно точно наблизити мірами з послідовності рівноважних станів системи конфлікту, побудованих за кусково-рівномірно розподіленими мірами згідно з п. 3.

Теорема 4.1. *Нехай для* $\mu, \nu \in \mathcal{M}_{ac}[0,1]$, $\mu \neq \nu$, *виконується умова* (4.1). *Зафіксуємо* $\varepsilon > 0$ *і позначимо через* $\widetilde{\mu}^\varepsilon$, $\widetilde{\nu}^\varepsilon$ *пару кусково-рівномірно розподілених мір, побудованих по* μ, ν *за допомогою розбиття* (4.6), *для якого виконується умова* **(C)**. *Тоді для траєкторії системи конфлікту вигляду* (3.6) *з початковим станом* $\{\widetilde{\mu}^\varepsilon, \widetilde{\nu}^\varepsilon\}$ *існує рівноважний стан, заданий мірами* $\widetilde{\mu}^{\varepsilon,\infty}, \widetilde{\nu}^{\varepsilon,\infty}$, *для яких виконуються нерівності*

$$|\widetilde{\mu}^{\varepsilon,\infty}(A) - \mu_+(A)| < \varepsilon, \quad |\widetilde{\nu}^{\varepsilon,\infty}(A) - \nu_-(A)| < \varepsilon, \quad A \in \mathcal{R}. \tag{4.7}$$

Доведення. Зафіксуємо $\Delta_i \subseteq \Omega_+$ і встановимо нерівності (4.7) для $A \subseteq \Delta_i$. Почнемо з нерівності

$$|\widetilde{\mu}_i^{\varepsilon,\infty}(A) - \mu_+(A)| < \varepsilon, \quad A \subseteq \Delta_i. \tag{4.8}$$

Нехай c та d позначають граничні точки множини Δ_i. Тоді додаткове подрібнення Δ_i з умовою **(C)** при фіксованому ε можна задати послідовністю точок

$$c = x_1 < x_2 < \ldots < x_{m_i+1} = d, \quad \Delta_{i_k} = [x_k, x_{k+1}].$$

Кусково-рівномірно розподілені міри $\widetilde{\mu}^\varepsilon, \widetilde{\nu}^\varepsilon$ визначаються описаним вище способом за своїми компонентами:

$$\widetilde{\mu}_{i_k}^\varepsilon(A) := \frac{|A \cap \Delta_{i_k}|}{|\Delta_{i_k}|}\mu(\Delta_{i_k}) = \frac{|A_{i_k}|}{|\Delta_{i_k}|}\,p_{i_k}, \quad \widetilde{\nu}_{i_k}^\varepsilon(A) := \frac{|A \cap \Delta_{i_k}|}{|\Delta_{i_k}|}\,\nu(\Delta_{i_k}) = \frac{|A_{i_k}|}{|\Delta_{i_k}|}\,r_{i_k}.$$

Тепер, використовуючи теорему 2.2, легко встановити, що

$$\lim_{N\to\infty} p_i^N = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{m_i} p_{i_k}^N.$$

Тому

$$\sum_{k=1}^{m_i} p_{i_k}^\infty = \sum_{k=1}^{m_i} \frac{p_{i_k} - r_{i_k}}{D} = \frac{1}{D}\left(\sum_{k=1}^{m_i} p_{i_k} - \sum_{k=1}^{m_i} r_{i_k}\right) = \frac{p_i - r_i}{D} = \frac{d_i^+}{D},$$

а завдяки лемі 4.1 маємо

$$\widetilde{\mu}_{i_k}^{\varepsilon,\infty}(A) = \frac{|A \cap \Delta_{i_k}|}{|\Delta_{i_k}|}\,p_{i_k}^\infty, \quad \widetilde{\nu}_{i_k}^\infty(A) = 0, \quad A \in \mathcal{R}, \quad k \in \overline{1, m_i}.$$

Зокрема, $\widetilde{\mu}_{i_k}^{\varepsilon,\infty}(\Delta_{i_k}) = \mu_+(\Delta_{i_k}) = d_{i_k}^+/D$. Як наслідок, одержуємо рівність

$$\widetilde{\mu}_i^{\varepsilon,\infty} = \sum_{k=1}^{m_i} \widetilde{\mu}_{i_k}^{\varepsilon,\infty}.$$

Далі, для $A_{i_k} := A \cap \Delta_{i_k}$ знаходимо

$$|\mu_+(A_{i_k}) - \widetilde{\mu}_i^{\varepsilon,\infty}(A_{i_k})| = \left|\mu_+(A_{i_k}) - \frac{|A_{i_k}|}{|\Delta_{i_k}|}\,\widetilde{\mu}_{i_k}^{\varepsilon,\infty}(\Delta_{i_k})\right| = \left|\mu_+(A_{i_k}) - \frac{|A_{i_k}|}{|\Delta_{i_k}|}\,\mu_+(\Delta_{i_k})\right| \leq$$

$$\leq \left|M_{i_k}|A_{i_k}| - m_{i_k}|\Delta_{i_k}|\frac{|A_{i_k}|}{|\Delta_{i_k}|}\right| = |M_{i_k} - m_{i_k}||A_{i_k}| \leq \varepsilon|A_{i_k}|,$$

де перша нерівність випливає з того, що

$$\mu_+(A_{i_k}) = \frac{\mu(A_{i_k})}{D} - \frac{\nu(A_{i_k})}{D} = \int\limits_{A_{i_k}} \frac{\rho(x)}{D}\,dx - \int\limits_{A_{i_k}} \frac{\sigma(x)}{D}\,dx = \int\limits_{A_{i_k}} \frac{h(x)}{D}\,dx,$$

$$\mu_+((A_{i_k})) = \int\limits_{A_{i_k}} \frac{h(x)}{D}\,dx \leq M_{i_k}|A_{i_k}|,$$

$$\mu_+((\Delta_{i_k})) = \int\limits_{\Delta_{i_k}} \frac{h(x)}{D}\,dx \geq m_{i_k}|\Delta_{i_k}|,$$

а друга нерівність виконується завдяки умові $(\mathbf{C})$. Більш того, з цих же міркувань випливає нерівність

$$|\mu_+(A_i) - \widetilde{\mu}_i^{\varepsilon,\infty}(A_i)| < \varepsilon|A_i| \leq \varepsilon, \quad A_i = A \cap \Delta_i,$$

яка і доводить (4.8). Тепер для будь-якого $A \in \mathcal{R}$ маємо

$$|\widetilde{\mu}^{\varepsilon,\infty}(A) - \mu_+(A)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \widetilde{\mu}_i^{\varepsilon,\infty}(A \cap \Delta_i) - \sum_{i=1}^{n} \mu_+(A \cap \Delta_i)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |\widetilde{\mu}_i^{\varepsilon,\infty}(A_i) - \mu_+(A_i)| \leq \varepsilon \sum_{i=1}^{n} |A_i| \leq \varepsilon.$$

Таким же способом встановлюємо аналогічну нерівність для міри $\widetilde{\nu}^{\varepsilon,\infty}$, тобто другу нерівність з (4.7).

Теорему 4.1 доведено.

Зауважимо, що це доведення можна дещо спростити, якщо умову **(C)** замінити на таку: для кожного Δ_{i_k} з розбиття (4.6)

$$|\mu(A_{i_k}) - \mu(\Delta_{i_k})|\,|A_{i_k}|/|\Delta_{i_k}| < \varepsilon|\Delta_{i_k}|, \quad |\nu(A_{i_k}) - \nu(\Delta_{i_k})|\,|A_{i_k}|/|\Delta_{i_k}| < \varepsilon|\Delta_{i_k}|,\ A_{i_k} = A \cap \Delta_{i_k}.$$

5. Рівноважні стани систем конфлікту в термінах абстрактних мір. Нехай Ω — компакт абстрактного метричного простору, в якому зафіксовано σ-алгебру підмножин $\mathcal{R}$. Як і вище, $\mathcal{M}_1^+(\Omega)$ позначає множину всіх σ-адитивних імовірнісних мір на $\mathcal{R}$.

Розглянемо заряд $\omega = \mu - \nu$, побудований за парою мір $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1^+(\Omega)$, $\mu \neq \nu$, та відповідний йому розклад Гана – Жордана:

$$\Omega = \Omega_+ \cup \Omega_-, \quad \Omega_+ \cap \Omega_- = \varnothing, \quad \omega = \omega_+ - \omega_-,$$

$$\omega_+(A) := \omega(A_+), \quad \omega_-(A) := \omega(A_-), \quad A_+ = A \cap \Omega_+, \quad A_- = A \cap \Omega_-, \quad A \in \mathcal{R}.$$

Зазначимо, що підмножини Ω_+, Ω_- визначено своїми властивостями:

$$\omega(A_+) \geq 0 \quad \forall A_+ = A \cap \Omega_+, \quad \omega(A_-) \leq 0 \quad \forall A_- = A \cap \Omega_-, \quad A \in \mathcal{R},$$

і зафіксовано з точністю до $A_0 \in \mathcal{R}$ таких, що $\omega(A_0) = 0$.

Далі через μ_+, ν_- позначаємо міри, отримані з ω_+, ω_- процедурою перенормування на одиницю, тобто

$$\mu_+ = \frac{\omega_+}{\omega_+(\Omega)}, \quad \nu_- = \frac{\omega_-}{\omega_-(\Omega)}, \quad A \in \mathcal{R}. \tag{5.1}$$

Введемо між мірами μ, $\nu \in \mathcal{M}_1^+(\Omega)$ некомутативну композицію конфлікту $\divideontimes$,

$$\mu^1 = \mu \divideontimes \nu, \quad \nu^1 = \nu \divideontimes \mu,$$

згідно з рівняннями (1.4):

$$\mu^1(A) = \mu(A)(\theta + 1) - \tau(A), \quad \nu^1(A) = \nu(A)(\theta + 1) - \tau(A), \quad A \in \mathcal{R}, \tag{5.2}$$

де

$$\theta = \theta(\mu, \nu) = \mu(\Omega_-) + \nu(\Omega_+),$$

а

$$\tau(A) = \nu(A_+) + \mu(A_-), \quad A_+ = A \cap \Omega_+, \quad A_- = A \cap \Omega_-, \quad \theta = \theta(\Omega).$$

Неважко переконатися, що μ^1, ν^1 — ймовірнісні міри, тобто $\mu^1, \nu^1 \in \mathcal{M}_1^+(\Omega)$.

Ітерація композиції $\divideontimes$ породжує траєкторію системи конфлікту $(\Omega, \mathcal{M}_1^+(\Omega), \divideontimes)$ в термінах абстрактних мір:

$$\{\mu^N, \nu^N\} \xrightarrow{\divideontimes} \{\mu^{N+1}, \nu^{N+1}\}, \quad N = 0, 1, \ldots, \tag{5.3}$$

де згідно з (5.2)

$$\begin{gathered} \mu^{N+1}(A) = \mu^N(A)(\theta^N + 1) - \tau^N(A), \\ \nu^{N+1}(A) = \nu^N(A)(\theta^N + 1) - \tau^N(A), \quad A \in \mathcal{R}. \end{gathered} \tag{5.4}$$

Тут $\mu^0 = \mu$, $\nu^0 = \nu$, $\tau^N(A) = \nu^N(A_+) + \mu^N(A_-)$, $\theta^N = \tau^N(\Omega)$.

Теорема 5.1. *Для кожної пари ймовірнісних мір $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1^+(\Omega)$, $\mu \neq \nu$, траєкторія системи конфлікту* (5.3) *збігається до рівноважного стану $\{\mu^\infty, \nu^\infty\}$ такого, що*

$$\mu^\infty(A) = \mu_+(A), \quad \nu^\infty(A) = \nu_-(A) \quad \text{для всіх} \quad A \in \mathcal{R},$$

де міри μ_+, ν_- визначено в (5.1).

Доведення. Для множин $A_0 \in \mathcal{R}$, на яких $\mu(A_0) = \nu(A_0)$, з (5.4) одержуємо $\mu^{N+1}(A_0) = \mu^N(A_0)\theta^N$. Завдяки $\theta^N < 1$ це означає, що $\mu^N(A_0) \to 0$ та $\nu^N(A_0) \to 0$ одночасно при $N \to 0$.

Нехай $A \subseteq \Omega_+ \vee \Omega_-$. У загальному випадку множину A розкладаємо на $A_+ = A \cap \Omega_+$ та $A_- = A \cap \Omega_-$ і завдяки адитивності можемо розглядати поведінку мір окремо на A_+ та A_-. Почнемо з $A_+ \subseteq \Omega_+$. Тоді $\mu(A_+) \geq \nu(A_+)$ завдяки властивостям розкладу Гана – Жордана. Нехай $\mu(A_+) > \nu(A_+) > 0$. Тоді з (5.2) випливає, що

$$d^{N+1}(A_+) := \mu^{N+1}(A_+) - \nu^{N+1}(A_+) = d^N(A_+)(\theta^N + 1) > d^N(A_+), \quad N \geq 1,$$

оскільки завжди $\theta^N + 1 > 1$. Це означає, що послідовність $d^N(A_+)$ монотонно зростає при $N \to \infty$. Оскільки очевидно, що $d^N(A_+) = \mu^N(A_+) - \nu^N(A_+) < 1$, то існує границя

$$d^\infty(A_+) = \lim_{N\to\infty} d^N(A_+). \tag{5.5}$$

Крім того, з умови $\mu(A_+) > \nu(A_+)$ випливає, що відношення $R^N(A_+) = \mu^N(A_+)/\nu^N(A_+)$ утворює послідовність, яка також є монотонно зростаючою. Дійсно, беручи до уваги, що зараз $\tau^N(A_+) = \nu^N(A_+)$, маємо

$$R^{N+1}(A_+) = \frac{\mu^{N+1}(A_+)}{\nu^{N+1}(A_+)} = \frac{\mu^N(A_+)(\theta^N+1) - \nu^N(A_+)}{\nu^N(A_+)(\theta^N+1) - \nu^N(A_+)} =$$

$$= R^N(A_+)k^N = R^0k^0k^1\ldots k^N, \tag{5.6}$$

де

$$k^N = \frac{1 + \theta^N - \nu^N(A_+)/\mu^N(A_+)}{\theta^N} > 1, \quad N \geq 0,$$

оскільки $\nu^N(A_+)/\mu^N(A_+) < 1$. Отже, $R^{N+1}(A_+) > R^N(A_+)$ Більш того, покажемо, що

$$1 < k^0 < k^1 < \ldots < k^N < \ldots. \tag{5.7}$$

Нерівність $1 < k^0$ випливає з $\mu(A_+) > \nu(A_+) > 0$. З цієї ж нерівності одержуємо $k^0 < k^1$:

$$k^1 = 1 + \frac{1}{\theta^1}\left(1 - \frac{\nu^1(A_+)}{\mu^1(A_+)}\right) = 1 + \frac{1}{\theta^1}\left(1 - \frac{\nu(A_+)(1+\theta) - \nu(A_+)}{\mu(A_+)(1+\theta) - \nu(A_+)}\right) >$$

$$> 1 + \frac{1}{\theta^1}\left(1 - \frac{\nu(A_+)\theta}{\mu(A_+)(1+\theta) - \mu(A_+)}\right) = 1 + \frac{1}{\theta^1}\left(1 - \frac{\nu(A_+)}{\mu(A_+)}\right) >$$

$$> 1 + \frac{1}{\theta}\left(1 - \frac{\nu(A_+)}{\mu(A_+)}\right) = k^0,$$

де ми додатково скористалися нерівністю $\theta^1 < \theta$, виконання якої випливає з формул

$$\theta^1 = \nu^1(\Omega_+) + \mu^1(\Omega_-) = \nu(\Omega_+)(1+\theta) - \theta(\Omega_+) + \mu(\Omega_-)(1+\theta) - \theta(\Omega_-) = (1+\theta)\theta - \theta = (\theta)^2 < \theta,$$

оскільки $\theta < 1$. Тепер (5.7) отримуємо за індукцією. З (5.6) та (5.7) видно, що

$$R^N(A_+) \to \infty \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Як наслідок, $\nu^N(A_+) \to 0$ при $N \to 0$, оскільки $\mu^N(A_+) \leq 1$. Тому $\nu^\infty(A_+) = 0$, і завдяки (5.5) можемо зробимо висновок, що $\mu^N(A_+)$ збігається до границі, яка не перевищує одиницю:

$$1 \geq \mu^\infty(A_+) = \lim_{N\to\infty} \mu^N(A_+) = d^\infty(A_+) > 0. \tag{5.8}$$

Попередні міркування є правильними для всіх $A_+ \subseteq \Omega_+$ з $\mu(A_+) > 0$, оскільки завжди виконується умова $\mu(A_+) \geq \nu(A_+)$, зокрема і для випадку, коли $\nu(A_+) = 0$.

Якщо $A = A_- \subseteq \Omega_-$, то виконується нерівність $\mu(A_-) \leq \nu(A_-)$. Тому, аналогічно до попереднього, доводимо існування границь $\nu^\infty(A_-) = -d^\infty(A_-) \geq 0$ та $\mu^\infty(A_-) = 0$.

Таким чином, ми довели існування границь

$$\mu^\infty(A) = \lim_{N\to\infty} \mu^N(A_+), \quad \nu^\infty(A) = \lim_{N\to\infty} \nu^N(A_-), \quad A \in \mathcal{R},$$

де враховано властивість адитивності, $\mu^N(A) = \mu^N(A_+) + \mu^N(A_-)$, $\nu^N(A) = \nu^N(A_+) + \nu^N(A_-)$ і те, що

$$\lim_{N\to\infty} \mu^N(A_-) = \mu^\infty(A_-) = 0 \;\; \forall A_- \subseteq \Omega_-, \quad \lim_{N\to\infty} \nu^N(A_+) = \nu^\infty(A_+) = 0 \;\; \forall A_+ \subseteq \Omega_+. \tag{5.9}$$

З (5.9) випливає рівність $\theta^\infty = 0$, і тому граничний стан $\{\mu^\infty, \nu^\infty\}$ є нерухомим відносно композиції конфлікту $\circledast$. Це означає, що цей стан є рівноважним для траєкторії (5.3) системи конфлікту $(\Omega, \mathcal{M}_1^+(\Omega), \circledast)$.

Доведемо другу частину теореми, а саме, покажемо, що побудований граничний рівноважний стан визначається нормованими компонентами розкладу Гана – Жордана початкового заряду $\omega = \mu - \nu$.

Нехай A_1, $A_2 \subseteq \Omega_+$ — довільні фіксовані множини і такі, що $\omega(A_1), \omega(A_2) > 0$. З (5.4) видно, що відношення $d^N(A_1)/d^N(A_2)$ не залежить від N:

$$\frac{d^1(A_1)}{d^1(A_2)} = \frac{(\mu(A_1) - \nu(A_1))(\theta + 1)}{(\mu(A_2) - \nu(A_2))(\theta + 1)} = \frac{d^N(A_1)}{d^N(A_2)} = \frac{d(A_1)}{d(A_2)}.$$

Ця властивість, очевидно, виконується і при граничному переході $N \longrightarrow \infty$, тому

$$\frac{d(A_1)}{d(A_2)} = \frac{d^\infty(A_1)}{d^\infty(A_2)}.$$

Далі, згідно з (5.8) $\mu^\infty(A_+) = d^\infty(A_+)$, тому

$$\frac{\mu^\infty(A_1)}{\mu^\infty(A_2)} = \frac{d(A_1)}{d(A_2)}. \tag{5.10}$$

З (5.10) робимо висновок, що для $A_+ \subseteq \Omega_+$ значення $\mu^\infty(A_+)$ пропорційні до $d(A_+)$, тобто $\mu^\infty(A_+) = k_\mu d(A_+)$, де коефіцієнт k_μ, очевидно, є не залежним від A_+. Звідси, використовуючи те, що $\mu^\infty(\Omega_+) = 1$, знаходимо

$$k_\mu = \frac{1}{d(\Omega_+)} = \frac{1}{\omega(\Omega_+)} = \frac{1}{\omega_+(\Omega)}.$$

Отже,

$$\mu^{\infty}(A_+) = \frac{\mu(A_+) - \nu(A_+)}{\omega_+(\Omega)} = \mu_+(A_+), \quad A_+ \in \Omega_+,$$

і тому $\mu^{\infty} = \mu_+$, оскільки на Ω_- міри μ^{∞}, μ_+ дорівнюють нулю.

Аналогічно доводимо, що

$$\frac{\nu^{\infty}(B_1)}{\nu^{\infty}(B_2)} = \frac{d(B_1)}{d(B_2)}, \quad B_1, B_2 \subseteq \Omega_-.$$

Це означає, що справжується рівність $\nu^{\infty}(B_-) = k_{\nu} d(B_-)$, де коефіцієнт k_{ν} є не залежним від $B_- \subseteq \Omega_-$ і легко знаходиться:

$$k_{\nu} = -\frac{1}{d(\Omega_-)} = -\frac{1}{\omega_-(\Omega)}.$$

Тому

$$\nu^{\infty}(B_-) = \frac{\nu(B_-) - \mu(B_-)}{\omega_-(\Omega)} = \nu_-(B_-), \quad B_- \in \Omega_-.$$

Отже, $\nu^{\infty} = \nu_+$, оскільки на Ω_+ міри ν^{∞}, ν_+ дорівнюють нулю.

Теорему 5.1 доведено.

Література

1. *Epstein J. M.* Nonlinear dynamics, mathematical biology, and social science. – Addison-Wesley Publ. Co., 1997.
2. *Murray J. D.* Mathematical biology I: An Introduction. – Springer, 2002.
3. *Bandyopadhyay M., Chattopadhyay J.* Ratio-dependent predator-prey model: effect of environmental fluctuation and stability // Nonlinearity. – 2005. – **18**. – P. 913 – 936.
4. *Шилов Г. Е., Гуревич Б. Л.* Интеграл, мера и производная. – М.: Наука, 1964. – 211 с.
5. *Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г.* Функциональный анализ. – Киев: Вища шк., 1990. – 600 с.
6. *Danford N., Schwartz J. T.* Linear operators. – New York; London, 1958. – Pt. 1.
7. *Кошманенко В. Д.* Теорема про конфлікт для пари стохастичних векторів // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 4. – С. 555 – 560.
8. *Koshmanenko V. D.* Theorem of conflicts for a pair of probability measures // Math. Meth. Oper. Res. – 2004. – **59**, № 2. – P. 303 – 313.
9. *Bodnarchuk M., Koshmanenko V., Kharchenko N.* The properties of the limiting states of the conflict dynamical systems // Nonlinear Oscillations. – 2004. – **7**, № 4. – P. 446 – 461.
10. *Koshmanenko V. D., Kharchenko N. V.* Invariant points of a dynamical system of conflict in the space of piecewise-uniformly distributed measures // Ukr. Math. J. – 2004. – **56**, № 7. – P. 927 – 938.
11. *Albeverio S., Bodnarchyk M., Koshmanenko V.* Dynamics of discrete conflict interactions between non-annihilating opponent // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2005. – **11**, № 4. – P. 309 – 319.
12. *Albeverio S., Koshmanenko V., Samoilenko I.* The conflict interaction between two complex systems: cyclic migration // J. Interdiscipl. Math. – 2008. – **11**, № 2. – P. 163 – 185.
13. *Koshmanenko V., Samoilenko I.* The conflict triad dynamical system // Commun Nonlinear Sci. Numer Simulat. – 2011. – **16**. – P. 2917 – 2935.

Одержано 04.07.14