УДК 517.55

А. О. Куриляк, О. Б. Скасків, Л. О. Шаповаловська (Львів. нац. ун-т ім. І. Франка)

НЕРІВНІСТЬ ТИПУ ВІМАНА ДЛЯ АНАЛІТИЧНИХ У ПОЛІКРУЗІ ФУНКЦІЙ

We prove an analog of Wiman-type inequality for analytic functions in a polydisc $\mathbb{D}^p = \{z \in \mathbb{C}^p : |z_j| < 1, \ j \in \in \{1,\ldots,p\}\}$, $p \in \mathbb{N}$. The obtained inequality is sharp.

Доказан аналог неравенства Вимана для функций, аналитических в полидиске $\mathbb{D}^p = \{z \in \mathbb{C}^p : |z_j| < 1, \ j \in \in \{1,\ldots,p\}\}$, $p \in \mathbb{N}$. Полученное неравенство является точным.

1. Вступ. За теоремою Вімана – Валірона (див. [1 – 8]) для кожної відмінної від тотожно сталої цілої функції

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \tag{1}$$

і довільного $\varepsilon > 0$ існує така множина $E \subset [1;+\infty)$ скінченної логарифмічної міри (тобто $\int_E \frac{dr}{r} < +\infty$), що для всіх $r \in [1;+\infty) \setminus E$ виконується нерівність Вімана

$$M_f(r) \le \mu_f(r) \ln^{1/2+\varepsilon} \mu_f(r),$$

де $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, $\mu_f(r) = \max\{|a_n| r^n : n \ge 0\}$.

Якщо f — аналітична функція в одиничному крузі $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ вигляду (1), то для кожного $\delta > 0$ існує така множина $E = E_f(\delta) \subset (0,1)$ скінченної логарифмічної міри на $(0,1)$, тобто $\int_{E_f(\delta)} \frac{dr}{1-r} < +\infty$, що для всіх $r \in (0,1) \setminus E_f(\delta)$ виконується нерівність (див., наприклад, [9 – 12])

$$M_f(r) \le \frac{\mu_f(r)}{(1-r)^{1+\delta}} \ln^{1/2+\delta} \frac{\mu_f(r)}{1-r}.$$

У статті [10] вказано, що для функції $g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \exp\{n^{\varepsilon}\} z^n$ і деякого $\varepsilon \in (0,1)$ виконується

$$\varliminf_{r \to 1-0} \frac{M_g(r)}{\dfrac{\mu_g(r)}{1-r} \ln^{1/2} \dfrac{\mu_g(r)}{1-r}} \ge C > 0.$$

У статті [13] нерівність типу Вімана доведено для аналітичних функцій, заданих степеневими рядами вигляду

$$f(z) = f(z_1, z_2) = \sum_{n+m=0}^{+\infty} a_{nm} z_1^n z_2^m$$

з областю збіжності $\{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| < 1, z_2 \in \mathbb{C}\}$.

Мета даної статті — довести один аналог нерівності типу Вімана для аналітичних функцій у полікрузі $\mathbb{D}^p = \{z = (z_1, \ldots, z_p) \in \mathbb{C}^p : |z_j| < 1, j \in \{1, \ldots, p\}\}$,

$$f(z) = f(z_1, \ldots, z_p) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n z^n, \tag{2}$$

де $z^n = z_1^{n_1} \ldots z_p^{n_p}$, $p \in \mathbb{N}$, $n = (n_1, \ldots, n_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $\|n\| = \sum_{j=1}^{p} n_j$.

Позначимо через $\mathcal{A}^p$ клас таких аналітичних функцій.

2. Нерівність типу Вімана для аналітичних функцій у полікрузі. Для функцій $f \in \mathcal{A}^p$ і $r = (r_1, \ldots, r_p) \in [0,1)^p$ позначимо

$$\Delta_r = \{t = (t_1, \ldots, t_p) \in [0,1)^p : t_j \geq r_j,\ j \in \{1, \ldots, p\}\}, \quad \mathfrak{M}_f(r) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} |a_n| r^n,$$

$$M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z_j| \leq r_j,\ j \in \{1, \ldots, p\}\}, \quad \mu_f(r) = \max\{|a_n| r^n : n \in \mathbb{Z}_+^p\}.$$

Нехай $D_f(r) = (D_{ij})$ — $(p \times p)$-матриця з елементами

$$D_{ij} := r_i \frac{\partial}{\partial r_i}\left(r_j \frac{\partial}{\partial r_j} \ln \mathfrak{M}_f(r)\right) = \partial_i \partial_j \ln \mathfrak{M}_f(r), \quad \partial_i := r_i \frac{\partial}{\partial r_i}, \quad i, j \in \{1, \ldots, p\}.$$

Наступне твердження доводиться майже дослівним повторенням доведення теореми 3.1 з [14] (див. також [13]).

Теорема 1. *Нехай $f \in \mathcal{A}^p$. Тоді існує така абсолютна стала C_0, що*

$$(\forall r \in [0,1)^p) : \mathfrak{M}_f(r) \leq C_0 \mu_f(r) (\det(D_f(r) + I))^{1/2},$$

де I — одинична $(p \times p)$-матриця.

Множину $E \subset [0,1)^p$ називатимемо *множиною асимптотично скінченної логарифмічної міри на* $[0,1)^p$, якщо існує таке $r_0 \in [0,1)^p$, що

$$\nu_{\ln}(E \cap \Delta_{r_0}) := \int \cdots \int\limits_{E \cap \Delta_{r_0}} \prod_{i=1}^{p} \frac{dr_i}{1 - r_i} < +\infty,$$

тобто множина $E \cap \Delta_{r_0}$ є множиною скінченної логарифмічної міри на $[0,1)^p$, і $E \subset [0,1)^p$ — *множина асимптотично нескінченної логарифмічної міри на* $[0,1)^p$, якщо існує таке $r_0 \in \in [0,1)^p$, що $\nu_{\ln}(E \cap \Delta_r) = +\infty$ для всіх $r \geq r_0$ $\Big($тобто $r_j \geq r_j^{(0)}$ $(\forall j \in \{1, \ldots, p\})$, де $r = (r_1, \ldots, r_p)$, $r_0 = (r_1^{(0)}, \ldots, r_p^{(0)})\Big)$.

Лема 1. *Нехай $\delta > 0$, $h : \mathbb{R}_+^p \to \mathbb{R}_+$ — така зростаюча за кожною змінною функція, що*

$$\int\limits_1^{+\infty} \cdots \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{h(u)} \prod_{j=1}^{p} du_j < +\infty.$$

Тоді існує така множина $E \subset [0,1)^p$ асимптотично скінченної логарифмічної міри, що для всіх $r \in [0,1)^p \setminus E$ виконуються нерівності

$$\det(D_f(r)+I) \le \prod_{i=1}^{p} \frac{1}{1-r_j}\, h\left(\frac{\partial}{\partial r_1}\ln \mathfrak{M}_f(r), \ldots, \frac{\partial}{\partial r_p}\ln \mathfrak{M}_f(r)\right), \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial r_s}\ln \mathfrak{M}_f(r) \le (\ln \mathfrak{M}_f(r))^{1+\delta}\, \frac{1}{1-r_s} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{p} \left(\frac{1}{1-r_j}\right)^{\delta}, \quad s\in\{1,\ldots,p\}. \tag{4}$$

Доведення. Припустимо, що $E_0 \subset [0,1)^p$ — множина, для якої не виконується нерівність (3). Доведемо, що E_0 є множиною асимптотично скінченної логарифмічної міри. Оскільки $r_j \dfrac{\partial}{\partial r_j}\ln \mathfrak{M}_f(r)$ є зростаючою функцією за кожною змінною, то існує таке $r^0 \in [1/2, 1)^p$, що для кожного $j \in \{1,\ldots,p\}$ і всіх $r \in \Delta_{r^0}$

$$r_j \frac{\partial}{\partial r_j}\ln \mathfrak{M}_f(r) + \ln r_j > 1.$$

Тоді

$$\nu_{\ln}(E_0\cap\Delta_{r^0}) = \int\limits_{E_0\cap\Delta_{r^0}}\!\!\cdots\!\int \prod_{i=1}^{p}\frac{dr_i}{1-r_i} \le \int\limits_{E_0\cap\Delta_{r^0}}\!\!\cdots\!\int \frac{\det(D_f(r)+I)\prod_{i=1}^{p}(1-r_j)}{h\left(\frac{\partial}{\partial r_1}\ln \mathfrak{M}_f(r),\ldots,\frac{\partial}{\partial r_p}\ln \mathfrak{M}_f(r)\right)} \prod_{i=1}^{p}\frac{dr_i}{1-r_i} \le$$

$$\le \int\limits_{E_0\cap\Delta_{r^0}}\!\!\cdots\!\int \frac{\det(D_f(r)+I)}{h\left(r_1\frac{\partial}{\partial r_1}\ln \mathfrak{M}_f(r),\ldots,r_p\frac{\partial}{\partial r_p}\ln \mathfrak{M}_f(r)\right)} \prod_{i=1}^{p} dr_i \le$$

$$\le \int\limits_{E_0\cap\Delta_{r^0}}\!\!\cdots\!\int \frac{\det(D_f(r)+I)\prod_{i=1}^{p}2r_j}{h\left(r_1\frac{\partial}{\partial r_1}\ln \mathfrak{M}_f(r),\ldots,r_p\frac{\partial}{\partial r_p}\ln \mathfrak{M}_f(r)\right)} \prod_{i=1}^{p} dr_i \le$$

$$\le 2^p \int\limits_{E_0\cap\Delta_{r^0}}\!\!\cdots\!\int \frac{\det(D_f(r)+I)\prod_{i=1}^{p}r_j}{h\left(r_1\frac{\partial}{\partial r_1}\ln \mathfrak{M}_f(r)+\ln r_1,\ldots,r_p\frac{\partial}{\partial r_p}\ln \mathfrak{M}_f(r)+\ln r_p\right)} \prod_{i=1}^{p} dr_i.$$

Нехай $U\colon [0,1)^p \to \mathbb{R}_+^p$ — таке відображення, що $U=(u_1,\ldots,u_p)$ і $u_j = r_j\dfrac{\partial}{\partial r_j}\ln \mathfrak{M}_f(r) + \ln r_j,\ j\in\{1,\ldots,p\}$. У випадку $i\neq j$ маємо

$$\frac{\partial u_j}{\partial r_i} = \frac{\partial}{\partial r_i}\left(r_j\frac{\partial}{\partial r_i}\ln \mathfrak{M}_f(r)+\ln r_j\right) = \frac{\partial}{\partial r_i}\left(r_j\frac{\partial}{\partial r_i}\ln \mathfrak{M}_f(r)\right) = \frac{1}{r_i}\partial_i\partial_j \ln \mathfrak{M}_f(r),$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial r_i} = \frac{\partial}{\partial r_i}\left(r_i\frac{\partial}{\partial r_i}\ln \mathfrak{M}_f(r)+\ln r_i\right) = \frac{1}{r_i}\partial_i\partial_j \ln \mathfrak{M}_f(r) + \frac{1}{r_i}, \quad i,j\in\{1,\ldots,p\}.$$

Отже, якобіан

$$J_0 = \frac{D(u_1, \ldots, u_p)}{D(r_1, \ldots, r_p)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial r_1} & \ldots & \dfrac{\partial u_1}{\partial r_p} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial u_p}{\partial r_1} & \ldots & \dfrac{\partial u_p}{\partial r_p} \end{vmatrix} = \det(D_f(r) + I) \prod_{i=1}^{p} r_j.$$

Тоді

$$\nu_{\ln}(E_0 \cap \Delta_{r^0}) = 2^p \int\limits_{U^{-1}(E_0 \cap \Delta_{r^0})} \cdots \int \frac{du_1 \ldots du_p}{h(u_1, \ldots, u_p)} < 2^p \int\limits_{[1,+\infty)^p} \cdots \int \frac{du_1 \ldots du_p}{h(u_1, \ldots, u_p)} < +\infty.$$

Нехай $E_s \subset [0,1)^p$ — множини, для яких не виконуються нерівності (4) з $s \in \{1, \ldots, p\}$. Виберемо $r^0 \in [1/2, 1)^p$ так, щоб $r_j \dfrac{\partial}{\partial r_j} \ln \mathfrak{M}_f(r) > 1$ для всіх $j \in \{1, \ldots, p\}$. Тоді для кожного $s \in \{1, \ldots, p\}$ отримуємо

$$\nu_{\ln}(E_s \cap \Delta_{r^0}) = \int\limits_{E_s \cap \Delta_{r^0}} \cdots \int \prod_{i=1}^{p} \frac{dr_i}{1 - r_i} \leq \int\limits_{E_s \cap \Delta_{r^0}} \cdots \int \frac{\dfrac{\partial}{\partial r_s} \ln \mathfrak{M}_f(r) \, (1 - r_s)}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^{p} \dfrac{1}{(1 - r_i)^{\delta}} \ln^{1+\delta} \mathfrak{M}_f(r)} \prod_{i=1}^{p} \frac{dr_i}{1 - r_i}.$$

Розглянемо відображення $V_s \colon [0,1)^p \to [0,1)^{p-1} \times \mathbb{R}_+$, де $V_s = (v_1^{(s)}(r), \ldots, v_p^{(s)}(r))$ і

$$v_j = r_j, \quad j \in \{1, \ldots, p\} \setminus \{s\}, \quad v_s = \ln \mathfrak{M}_f(r), \quad s \in \{1, \ldots, p\}.$$

Отже, якобіан

$$J_s = \frac{D(v_1^{(s)}, \ldots, v_p^{(s)})}{D(r_1, \ldots, r_p)} = \frac{\partial}{\partial r_s} \ln \mathfrak{M}_f(r).$$

Для логарифмічної міри множини $E_s \cap \Delta_{r^0}$ маємо

$$\nu_{\ln}(E_s \cap \Delta_{r^0}) = \int\limits_{E_s \cap \Delta_{r^0}} \cdots \int \frac{\dfrac{\partial}{\partial r_s} \ln \mathfrak{M}_f(r)}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^{p} \dfrac{1}{(1 - r_i)^{\delta}} \ln^{1+\delta} \mathfrak{M}_f(r)} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^{p} \frac{dr_i}{1 - r_i} dr_s =$$

$$= \int\limits_{V^{-1}(E_s \cap \Delta_{r^0})} \cdots \int \frac{1}{u_s^{1+\delta} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^{p} \dfrac{1}{(1 - u_i)^{\delta}}} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^{p} \frac{du_i}{1 - u_i} du_s \leq \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{du_s}{u_s^{1+\delta}} \int\limits_{(0,1)^{p-1}} \cdots \int \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^{p} \frac{du_i}{(1 - u_i)^{1-\delta}} < +\infty.$$

Залишилося зауважити, що множина $E = \cup_{j=0}^{p} E_j$ є множиною асимптотично скінченної логарифмічної міри на $[0,1)^p$.

Лему 1 доведено.

Теорема 2. *Нехай $f \in \mathcal{A}^p$. Тоді для кожного $\delta > 0$ існує така множина $E = E(f, \delta) \subset$ $\subset [0,1)^p$ асимптотично скінченної логарифмічної міри, що для всіх $r \in [0,1)^p \setminus E$ виконується*

$$M_f(r) \leq \mu_f(r) \prod_{j=1}^{p} \frac{1}{(1 - r_j)^{1+\delta}} \ln^{p/2+\delta} \left(\mu_f(r) \prod_{j=1}^{p} \frac{1}{1 - r_j} \right). \tag{5}$$

Доведення. Нехай E — виняткова множина з леми 1. Тоді для функції $h(r) = \prod_{j=1}^{p} r_j^{1+\delta}$ для всіх $r \in [0,1)^p \setminus E$ отримуємо

$$\mathfrak{M}_f(r) \le C_0 \mu_f(r)(\det(D_f(r)+I))^{1/2} \le$$

$$\le C_0 \mu_f(r) \left(\prod_{i=1}^{p} \frac{1}{1-r_i}\, h\left(\frac{\partial}{\partial r_1} \ln \mathfrak{M}_f(r), \ldots, \frac{\partial}{\partial r_p} \ln \mathfrak{M}_f(r) \right) \right)^{1/2} \le$$

$$\le C_0 \mu_f(r) \left(\prod_{i=1}^{p} \frac{1}{1-r_j} \left(\frac{\partial}{\partial r_i} \ln \mathfrak{M}_f(r) \right)^{1+\delta} \right)^{1/2} \le C_0 \mu_f(r) \times$$

$$\times \left(\prod_{j=1}^{p} \left(\frac{1}{1-r_j} \ln^{(1+\delta)^2} \mathfrak{M}_f(r) \frac{1}{(1-r_j)^{1+\delta}} \prod_{\substack{i=1\\ i\ne s}}^{p} \left(\frac{1}{1-r_i} \right)^{\delta(1+\delta)} \right) \right)^{1/2} =$$

$$= C_0 \mu_f(r) \prod_{j=1}^{p} \frac{1}{1-r_j} \ln^{\frac{p(1+\delta)^2}{2}} \mathfrak{M}_f(r) \prod_{j=1}^{p} \left(\frac{1}{1-r_j} \right)^{\delta(1+(p-1)(1+\delta))/2} <$$

$$< \mu_f(r) \prod_{j=1}^{p} \frac{1}{(1-r_j)^{1+\delta_1}} \ln^{\frac{p}{2}+\delta_1} \mathfrak{M}_f(r), \tag{6}$$

де $\delta_1 > \max\{\delta(1+(p-1)(1+\delta))/2,\ \delta(1+\delta/2)\}$. Тепер з нерівності (6) для всіх $r \in \Delta_{r^0} \setminus E$ маємо

$$\ln \mathfrak{M}_f(r) < \ln \mu_f(r) + (1+\delta_1) \sum_{j=1}^{p} \ln \frac{1}{1-r_j} + \left(\frac{p}{2} + \delta_1 \right) \ln_2 \mathfrak{M}_f(r),$$

$$\ln \mathfrak{M}_f(r) - \left(\frac{p}{2} + \delta_1 \right) \ln_2 \mathfrak{M}_f(r) < \ln \mu_f(r) + (1+\delta_1) \sum_{j=1}^{p} \ln \frac{1}{1-r_j},$$

тобто існує таке $r^1 \in [0,1)^p$, що для всіх $r \in \Delta_{r^1} \setminus E$

$$\ln \mathfrak{M}_f(r) < 2 \ln \left(\mu_f(r) \prod_{j=1}^{p} \frac{1}{1-r_j} \right),$$

$$M_f(r) \le \mathfrak{M}_f(r) \le \mu_f(r) \prod_{j=1}^{p} \frac{1}{(1-r_j)^{1+\delta_1}} \left(2 \ln \left(\mu_f(r) \prod_{j=1}^{p} \frac{1}{1-r_j} \right) \right)^{p/2+\delta_1} \le$$

$$\le \mu_f(r) \prod_{j=1}^{p} \frac{1}{(1-r_j)^{1+\delta_2}} \left(\ln \left(\mu_f(r) \prod_{j=1}^{p} \frac{1}{1-r_j} \right) \right)^{p/2+\delta_2},$$

де $\delta_2 = 2\delta_1$.

Теорему 2 доведено.

3. Точність нерівності з теореми 2. З теореми 2 випливає, що для $\delta > 0$ множина

$$E = E(f,\delta) = \left\{ r \in [0,1)^p \colon M_f(r) > \mu_f(r) \prod_{j=1}^{p} \frac{1}{(1-r_j)^{1+\delta}} \ \ln^{p/2+\delta} \left(\mu_f(r) \prod_{j=1}^{p} \frac{1}{1-r_j} \right) \right\}$$

має асимптотично скінченну логарифмічну міру на $[0,1)^p$.

У цьому пункті ми доведемо, що обидва степені $1+\delta$ і $p/2+\delta$ в нерівності (5) не можна замінити одночасно числами меншими за 1 і $p/2$ відповідно. З одного боку, наприклад, для функції $g(z) = \prod_{j=1}^{p} \dfrac{1}{1-z_j}$ і всіх $r \in [0,1)^p$ одержимо

$$M_f(r) = \prod_{j=1}^{p} \frac{1}{1-r_j}, \quad \mu_f(r) = 1,$$

тобто степінь $1+\delta$ у нерівності (6) не можна замінити числом меншим за 1.

З іншого боку, правильним є таке твердження.

Теорема 3. *Існують функція $f \in \mathcal{A}^p$, стала $C > 0$ і така множина $E \subset [0,1)^p$ асимптотично нескінченної логарифмічної міри, що для всіх $r \in E$ виконується нерівність*

$$M_f(r) \geq C\mu_f(r) \prod_{i=1}^{p} \frac{1}{1-r_i} \ \ln^{p/2} \left(\mu_f(r) \prod_{i=1}^{p} \frac{1}{1-r_i} \right).$$

Доведення. Розглянемо функцію

$$f(z) = \prod_{j=1}^{p} f_0(z_j), \quad z = (z_1, \ldots, z_p) \in \mathbb{C}^p,$$

де $f_0(\tau) = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{\sqrt{k}} \tau^k$, $\tau \in \mathbb{C}$.

Для f і $r = (r_1, \ldots, r_p) \in [0,1)^p$ маємо

$$M_f(r) = \prod_{j=1}^{p} M_{f_0}(r_j), \quad \mu_f(r) = \prod_{j=1}^{p} \mu_{f_0}(r_j).$$

Відомо [10], що для функції $f_0(z)$ існує така стала $C_0 \in (0,1)$, що

$$C_0 \frac{\mu_{f_0}(t)}{1-t} \leq \frac{M_{f_0}(t)}{\sqrt{\ln M_{f_0}(t)}} \leq \frac{1}{C_0} \frac{\mu_{f_0}(t)}{1-t}, \quad t \in [t_0, 1). \tag{7}$$

З нерівностей (7) випливає, що для кожного $t \in (r', 1)$ і деякої сталої $C_1 < C_0$

$$M_{f_0}(t) \geq C_1 \frac{\mu_{f_0}(t)}{1-t} \ \ln^{1/2} \frac{\mu_{f_0}(t)}{1-t}. \tag{8}$$

Функція $g(t) = \ln \dfrac{\mu_{f_0}(t)}{1-t}$ є додатною зростаючою на $(1/2, 1)$, $\lim_{t\to 1-0} g(t) = +\infty$ і тому існує обернена до g функція $g^{-1} \colon \mathbb{R}_+ \to (1/2, 1)$.

Доведемо таку нерівність:

$$g^{-1}(3g(t)) - g^{-1}\left(\frac{g(t)}{3}\right) > 1 - g^{-1}(3g(t)) \quad t \in [t_0, 1). \tag{9}$$

Для фіксованого $t \in (0,1)$ точка $x_{\max} = \left(4\ln^2 \dfrac{1}{t}\right)^{-1}$ є єдиною точкою максимуму функції $l(x) = \sqrt{x} - x\ln\dfrac{1}{t}$. Тому $\max\{l(x) \colon x > 0\} = l(x_{\max}) = \left(4\ln\dfrac{1}{t}\right)^{-1}$ і

$$g(t) = \ln\frac{\mu_{f_0}(t)}{1-t} \sim \ln\mu_{f_0}(t) \sim \frac{1}{4\ln\frac{1}{t}} \sim \frac{1}{4(1-t)}, \quad t \in [t_0, 1).$$

З попередніх співвідношень випливає, що $g(t) < 3g(2t-1)$, $t \in [t_0, 1)$. Тому

$$g(2t-1) > \frac{g(t)}{3}, \quad 2t-1 > g^{-1}\left(\frac{g(t)}{3}\right), \quad t - g^{-1}\left(\frac{g(t)}{3}\right) > 1-t,$$

і, використовуючи нерівність $g^{-1}(3g(t)) > g^{-1}(g(t)) = t$, при $t \in [t_0, 1)$ отримуємо

$$g^{-1}(3g(t)) - g^{-1}\left(\frac{g(t)}{3}\right) > r_1 - g^{-1}\left(\frac{g(t)}{3}\right) > 1 - t > 1 - g^{-1}(3g(t)).$$

Нерівність (9) доведено.

З (8) випливає, що існують такі числа $C_1 \in (0,1)$ і $t^* \in (t', 1)$, що для всіх $z \in \{z \colon t^* < |z_j| < 1,\ j \in \{1, \ldots, p\}\}$

$$M_{f_0}(r_k) \geq C_1 \frac{\mu_{f_0}(r_k)}{1-r_k}\sqrt{\ln\frac{\mu_{f_0}(r_k)}{1-r_k}}, \quad g^{-1}\left(\frac{g(t^*)}{3}\right) > r^0, \quad k \in \{1, \ldots, p\}. \tag{10}$$

Тому для всіх $z \in \{z \colon t^* < |z_j| < 1,\ j \in \{1, \ldots, p\}\}$ отримаємо

$$\begin{gathered}\prod_{k=1}^{p} M_{f_0}(r_k) \geq \prod_{k=1}^{p}\left(C_1 \frac{\mu_{f_0}(r_k)}{1-r_k}\sqrt{\ln\frac{\mu_{f_0}(r_k)}{1-r_k}}\right), \\ M_f(r) \geq C_1^p \mu_f(r) \prod_{k=1}^{p}\frac{1}{1-r_k}\left(\prod_{k=1}^{p}\ln\frac{\mu_{f_0}(r_k)}{1-r_k}\right)^{1/2}.\end{gathered} \tag{11}$$

Для $r_1 \in (t^*, 1)$ визначимо такі x і y, що

$$x = x(r_1) = g^{-1}\left(\frac{g(r_1)}{3}\right), \quad y = y(r_1) = g^{-1}(3g(r_1)).$$

Визначимо множину

$$E^* = \{r \in [0,1)^p \colon r_1 \in (t^*, 1),\ r_k \in (x, y),\ k \in \{2, \ldots, p\}\}.$$

Зафіксуємо $r_1 \in (t^*, 1)$. Тоді x і y є також фіксованими і

$$g(x) = g(r_1)/3, \quad g(y) = 3g(r_1), \quad g(y) = 9g(x), \quad (r_2, \ldots, r_p) \in (x, y)^{p-1}.$$

Тому, використавши нерівність $r_1 > x$, для $r \in E^*$ отримаємо

$$\prod_{k=1}^{p} g(r_k) \geq g^p(x) = \frac{g^p(y)}{9^p} = \frac{1}{(9p)^p} (\underbrace{g(y) + \ldots + g(y)}_{p})^p \geq$$

$$\geq \frac{1}{(9p)^p} (g(r_1) + \ldots + g(r_p))^p = \frac{1}{(9p)^p} \left(\sum_{k=1}^{p} g(r_k) \right)^p.$$

Тоді з (11) для всіх $r \in E^*$ одержуємо

$$M_f(r) \geq C_1^p \mu_f(r) \prod_{k=1}^{p} \frac{1}{1 - r_k} \frac{1}{(9p)^p} \left(\sum_{k=1}^{p} \ln \frac{\mu_{f_0}(r_k)}{1 - r_k} \right)^{p/2} =$$

$$= C_2 \mu_f(r) \prod_{k=1}^{p} \frac{1}{1 - r_k} \ln^{p/2} \left(\mu_f(r) \prod_{k=1}^{p} \frac{1}{1 - r_k} \right).$$

Доведемо, що множина E^* є множиною асимптотично нескінченної логарифмічної міри. Оскільки $g^{-1} \left(\frac{g(t^*)}{3} \right) > r^0$, то $E^* \cap \Delta_{r^0} = E^*$. Тому з нерівності (9) за означенням E^* одержимо

$$\nu_{\ln}(E^* \cap \Delta_{r^0}) = \nu_{\ln}(E^*) = \int_{E^*} \cdots \int \prod_{k=1}^{p} \frac{dr_k}{1 - r_k} = \int_{t^*}^{1} \underbrace{\int_{x}^{y} \cdots \int_{x}^{y}}_{p-1} \prod_{k=1}^{p} \frac{dr_k}{1 - r_k} =$$

$$= \int_{t^*}^{1} \left(\int_{x}^{y} \frac{dr_2}{1 - r_2} \right)^{p-1} \frac{dr_1}{1 - r_1} = \int_{t^*}^{1} \left(\ln \frac{1}{1 - y} - \ln \frac{1}{1 - x} \right)^{p-1} \frac{dr_1}{1 - r_1} =$$

$$= \int_{t^*}^{1} \left(\ln \frac{1}{1 - g^{-1}(3g(r_1))} - \ln \frac{1}{1 - g^{-1} \left(\frac{g(r_1)}{3} \right)} \right)^{p-1} \frac{dr_1}{1 - r_1} =$$

$$= \int_{t^*}^{1} \ln^{p-1} \frac{1 - g^{-1} \left(\frac{g(r_1)}{3} \right)}{1 - g^{-1}(3g(r_1))} \frac{dr_1}{1 - r_1} =$$

$$= \int_{t^*}^{1} \ln^{p-1} \left(1 + \frac{g^{-1}(3g(r_1)) - g^{-1} \left(\frac{g(r_1)}{3} \right)}{1 - g^{-1}(3g(r_1))} \right) \frac{dr_1}{1 - r_1} > \ln^{p-1} 2 \int_{t^*}^{1} \frac{dr_1}{1 - r_1} = +\infty.$$

Зрозуміло, що $\nu_{\ln}(E^* \cap \Delta_{r^1}) = +\infty$ для кожного $r^1 \in [0,1)^p$, $r^1 > r^0$.
Теорему 3 доведено.

Література

1. *Wiman A.* Über dem Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Function und dem grössten Gliede der zugehörigen Taylorischen Reiche // Acta Math. – 1914. – **37**. – P. 305 – 326.
2. *Valiron G.* Sur les fonctions entieres d'ordre fini et d'ordre null et en particulier les fonctions a correspondance reguliere // Ann Fac. sci. Univ. Toulouse. – 1914. – **5**. – P. 117 – 257.
3. *Valiron G.* Fonctions analytiques. – Paris: Pres. Univ. France, 1954.
4. *Wittich H.* Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 1955.
5. *Skaskiv O. B., Filevych P. V.* On the size of an exceptional set in the Wiman theorem // Mat. Stud. – 1999. – **12**, № 1. – P. 31 – 36.
6. *Скасків О. Б., Зрум О. В.* Про виняткову множину у нерівностях типу Вімана для цілих функцій // Мат. студ. – 2004. – **21**, № 1. – С.13 – 24.
7. *Скасків О. Б.* Випадкові лакунарні степеневі ряди і нерівність Вімана // Мат. студ. – 2008. – **30**, № 1. – С. 101 – 106.
8. *Kurylyak A. O., Ovchar I. E., Skaskiv O. B.* Wiman's inequality for Laplace integrals // Int. J. Math. Anal. – 2014. – **8**, № 8. – P. 381 – 385.
9. *Kövari T.* On the maximum modulus and maximal term of functions analytic in the unit disc // J. London Math. Soc. – 1966. – **41**. – P. 129 – 137.
10. *Сулейманов Н. М.* Оценки типа Вимана – Валирона для степенных рядов с конечным радиусом сходимости и их точность // Докл. АН СССР. – 1980. – **253**, № 4. – С. 822 – 824.
11. *Куриляк А. О., Скасків О. Б.* Нерівність типу Вімана для аналітичних функцій в одиничному крузі і категорії Бера // Наук. вісн. Чернів. нац. ун-ту. Сер. мат. – 2011. – **1**, № 4. – С. 73 – 79.
12. *Kuryliak A. O., Skaskiv O. B., Chyzhykov I. E.* Baire categories and Wiman's inequality for analytic functions // Bull. Soc. Sci. Lett. Lódź. Ser. Rech. Déform. – 2012. – **62**, № 3. – P. 17 – 33.
13. *Kuryliak A. O., Shapovalovska L. O., Skaskiv O. B.* Wiman's type inequality for some double power series // Mat. Stud. – 2013. – **39**, № 2. – P. 134 – 141.
14. *Gopala Krishna J., Nagaraja Rao I. H.* Generalised inverse and probability techniques and some fundamental growth theorems in $\mathbb{C}^k$ // J. Indian Math. Soc. – 1977. – **41**. – P. 203 – 219.

Одержано 25.12.14