УДК 517.5

В. И. Рязанов (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Славянск),
Р. Р. Салимов (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
Е. А. Севостьянов (Житомир. гос. ун-т им. И. Франко)

НОРМАЛЬНОСТЬ КЛАССОВ ОРЛИЧА – СОБОЛЕВА

We establish a series of new criteria of equicontinuity and, hence, normality of the mappings of Orlicz – Sobolev classes in terms of inner dilatations.

Отримано низку нових критеріїв одностайної неперервності і, як наслідок, нормальності відображень класів Орлiча – Соболєва в термінах внутрішніх дилатацій.

1. Введение. Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Напомним, что гомеоморфизм $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ называется *отображением с конечным искажением,* если $f \in W^{1,1}_{\rm loc}$ и

$$\|f'(x)\|^n \leq K(x)\, J(x,f) \tag{1}$$

для некоторой почти всюду конечной функции $K(x) \geq 1$, где $f'(x)$ — якобиева матрица f, $\|f'(x)\|$ — ее операторная норма: $\|f'(x)\| = \sup_{|h|=1} |f'(x)\, h|$ и $J(x,f) = \det f'(x)$ — якобиан отображения f.

Эти отображения естественным образом обобщают известные отображения с ограниченным искажением по Решетняку (см. [1]). Впервые понятие отображения с конечным искажением было введено в случае плоскости для $f \in W^{1,2}_{\rm loc}$ в работе [2], а затем в пространстве в монографии [3]. Эта концепция нашла множество последователей и стала одним из основных объектов исследования в геометрической теории функций последнего времени (см., например, многочисленные ссылки в монографиях [4, 5]).

Ранее (см., например, [6 – 8]) для формулировки критериев нормальности классов отображений с конечным искажением мы пользовались *внешней дилатацией*

$$K_O(x,f) = \begin{cases} \dfrac{\|f'(x)\|^n}{J(x,f)}, & \text{если} \quad J(x,f) \neq 0, \\ 1, & \text{если} \quad f'(x) = 0, \\ \infty & - \ \text{в остальных точках} \end{cases} \tag{2}$$

(см. также работу [9], где проблемы нормальности классов обсуждаются для случая отображений, удовлетворяющих некоторым условиям относительно p-модуля). В данной работе мы усилим соответствующие результаты в терминах *внутренней дилатации*

$$K_I(x,f) = \begin{cases} \dfrac{J(x,f)}{l^n(f'(x))}, & \text{если} \quad J(x,f) \neq 0, \\ 1, & \text{если} \quad f'(x) = 0, \\ \infty & - \ \text{в остальных точках,} \end{cases} \tag{3}$$

где $l(f'(x)) = \min_{|h|=1} |f'(x)\, h|$. Для этого заметим, что

$$K_I(x,f) \leq K_O^{n-1}(x,f) \tag{4}$$

(см., например, разд. 1.2.1 в [1]). Известно, что $K_I = K_O$ при $n = 2$, но при $n \geq 3$, как показывает элементарный пример сжатия вдоль одной из осей, в (4) может иметь место строгое неравенство.

Для заданной выпуклой возрастающей функции $\varphi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$, $\varphi(0) = 0$, *классом Орлича* называют класс всех функций $g\colon D \to \mathbb{R}$ таких, что

$$\int\limits_D \varphi\left(|g(x)|\right)\, dm(x) < \infty, \tag{5}$$

где m обозначает меру Лебега в $\mathbb{R}^n$ (см. [10]).

Классом Орлича – Соболева $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}(D)$ называется класс всех локально интегрируемых функций f, заданных в D, с первыми обобщенными производными по Соболеву, градиент ∇f которых принадлежит классу Орлича локально в области D. Заметим, что по определению $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}} \subset W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$. Как обычно, пишем $f \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$, если $\varphi(t) = t^p$, $p \geq 1$.

Аналогично, если f — локально интегрируемая вектор-функция n вещественных переменных $x_1, \ldots, x_n$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$, $f_i \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$, $i = 1, \ldots, m$, и

$$\int\limits_D \varphi\left(|\nabla f(x)|\right)\, dm(x) < \infty, \tag{6}$$

где $|\nabla f(x)| = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)^2}$, то снова пишем $f \in W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$. Мы также используем обозначение $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ в случае более общих функций φ, чем в классах Орлича, где всегда предполагается выпуклость функции φ и ее нормировка $\varphi(0) = 0$.

Отметим, что классы Орлича – Соболева сейчас, как и ранее, изучаются в самых различных аспектах многими авторами (см., например, [6] и дальнейшие ссылки в указанной статье).

Основным инструментом исследования в данной статье являются модули семейств кривых и поверхностей. Следуя [5] (разд. 9.2), далее *k-мерной поверхностью* S в $\mathbb{R}^n$ называем произвольное непрерывное отображение $S\colon \omega \to \mathbb{R}^n$, где ω — открытое множество в $\overline{\mathbb{R}^k} := \mathbb{R}^k \cup \{\infty\}$ и $k = 1, \ldots, n-1$. *Функцией кратности* поверхности S называется число прообразов

$$N(S, y) = \operatorname{card} S^{-1}(y) = \operatorname{card}\{x \in \omega : S(x) = y\}, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Другими словами, символ $N(S, y)$ обозначает кратность накрытия точки y поверхностью S. Известно, что функция кратности является полунепрерывной снизу, и, значит, измерима относительно произвольной хаусдорфовой меры H^k (см. [5], разд. 9.2).

Для борелевской функции $\rho : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ ее *интеграл над поверхностью* S определяется равенством

$$\int\limits_S \rho\, d\mathcal{A} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(y) N(S, y)\, dH^k y. \tag{7}$$

Пусть Γ — семейство k-мерных поверхностей S. Борелева функция $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ (пишут $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$), если

$$\int\limits_{S} \rho^k \, d\mathcal{A} \geq 1$$

для каждой поверхности $S \in \Gamma$. Тогда *модулем* семейства Γ называется величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \mathrm{adm}\,\Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^n(x)\, dm(x)\,.$$

2. Определения и предварительные замечания. Отображения, которые мы начинаем рассматривать в настоящем пункте, не только являются интересными сами по себе, но и необходимы нам как аппарат для получения некоторых важных утверждений о классах Орлича – Соболева. В работе [11] (разд. 13) Ф. Геринг определил K-квазиконформное отображение как гомеоморфизм, изменяющий модуль кольцевых областей не более чем в K раз. Рассмотрение следующих классов отображений было мотивировано кольцевым определением Геринга.

Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $Q : \mathbb{R}^n \to (0, \infty)$ — измеримая по Лебегу функция. Гомеоморфизм $f : D \to D'$ будем называть *нижним Q-гомеоморфизмом в точке* $x_0 \in D$, если

$$M\left(f\left(\Sigma_\varepsilon\right)\right) \geq \inf_{\rho \in \mathrm{ext\,adm}\,\Sigma_\varepsilon} \int\limits_{A_\varepsilon} \frac{\rho^n(x)}{Q(x)}\, dm(x) \tag{8}$$

для каждого кольца $A_\varepsilon = A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon < |x - x_0| < \varepsilon_0\}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 \in (0, d_0)$, где $d_0 = \mathrm{dist}\,(x_0, \partial D)$, а Σ_ε обозначает семейство всех пересечений сфер $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}$, $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$, с областью D. Наконец, будем говорить, что гомеоморфизм $f : D \to D'$ является *нижним Q-гомеоморфизмом в области* D, если f является нижним Q-гомеоморфизмом в каждой точке $x_0 \in D$.

Далее, как обычно, $\Gamma(A, B, C)$ для множеств A, B и C в $\overline{\mathbb{R}^n}$ обозначает семейство всех кривых, соединяющих A и B в C.

Теперь пусть снова D и D' — области $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, а $Q : \mathbb{R}^n \to (0, \infty)$ — измеримая по Лебегу функция. Полагая $S_i := S(x_0, r_i)$, $i = 1, 2$, говорим, что гомеоморфизм $f : D \to D'$ является *кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке* $x_0 \in D$, если

$$M\left(f\left(\Gamma(S_1, S_2, D)\right)\right) \leq \int\limits_{A} Q(x) \eta^n(|x - x_0|)\, dm(x) \tag{9}$$

для каждого кольца $A = A(x_0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < d_0 = \mathrm{dist}\,(x_0, \partial D)$ и каждой измеримой по Лебегу функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \geq 1. \tag{10}$$

Понятие кольцевого Q-гомеоморфизма впервые было введено в работе [12] в связи с исследованием уравнений Бельтрами на плоскости, а позже было распространено на пространственный случай в работе [7] (см. также монографию [5]).

***Замечание* 1.** Нижние и верхние Q-гомеоморфизмы тесно взаимосвязаны (см. следствия 5 и 6 из работы [6]): в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, нижний Q-гомеоморфизм $f : D \to D'$ в точке $x_0 \in D$ с Q, интегрируемой в окрестности x_0 в степени $n - 1$, является кольцевым Q_*-гомеоморфизмом в x_0 с $Q_* = Q^{n-1}$ и, в частности, при $n = 2$ любой нижний Q-гомеоморфизм $f : D \to D'$ в точке $x_0 \in D$ с Q, интегрируемой в окрестности x_0, является кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке x_0.

В работе [13] доказано, что каждый гомеоморфизм f с конечным искажением на плоскости является кольцевым Q-гомеоморфизмом при $Q(x) = K_O(x,f)$ в каждой точке $x_0 \in D$. В работе [6] (теорема 5) аналогичный результат установлен в пространстве для гомеоморфизмов f с конечным искажением классов Орлича – Соболева $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ при условии на функцию φ типа Кальдерона (11) (см. ниже) и, в частности, классов $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$ при $p > n-1$ [14]. В следующем пункте мы устанавливаем более тонкий результат в терминах внутренней дилатации $K_I(x,f)$.

3. Основная лемма. Следующее утверждение является ключевым для дальнейшего исследования.

Лемма 1. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \ge 3$, $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ — такая неубывающая функция, что для некоторого $t_* \in (0,\infty)$*

$$\int\limits_{t_*}^{\infty} \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{n-2}} dt < \infty. \tag{11}$$

Тогда любой гомеоморфизм $f : D \to D'$ конечного искажения класса $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ является нижним Q-гомеоморфизмом с $Q(x) = K_I^{\frac{1}{n-1}}(x,f)$.

Доказательство. Обозначим через B (борелево) множество всех точек $x \in D$, где отображение f имеет полный дифференциал и $J(x,f) = \det f'(x) \neq 0$. Заметим, что множество B представляет собой не более чем счетное объединение таких борелевских множеств B_l, $l = 1, 2, \ldots$, что отображения $f_l = f|_{B_l}$ являются билипшицевыми гомеоморфизмами (см., например, [15], лемма 3.2.2). Без ограничения общности можно считать, что множества B_l попарно не пересекаются. Обозначим также через B_* оставшееся множество всех точек $x \in D$, где f имеет полный дифференциал, однако $f'(x) = 0$.

По теореме 1 в [6] мера Лебега множества $B_0 := D \setminus (B \bigcup B_*)$ равна нулю. Следовательно, по теореме 9.1 [5] $H^{n-1}(B_0 \cap S_r) = 0$ для почти всех сфер $S_r := S(x_0, r)$ с центром в произвольной точке $x_0 \in D$, где „почти всех" определяется в смысле модуля семейства поверхностей. Тогда в силу леммы 9.1 [5] $H^{n-1}(B_0 \cap S_r) = 0$ для почти всех $r \in \mathbb{R}$ и по следствию 4 в [6] $H^{n-1}(f(B_0) \cap S_r^*) = 0$ и $H^{n-1}(f(B_*) \cap S_r^*) = 0$ для почти всех $r \in \mathbb{R}$, где $S_r^* = f(S_r)$.

Заметим, что также $H^{n-1}(f(B_0) \cap S_r^*) = 0$ и $H^{n-1}(f(B_*) \cap S_r^*) = 0$ для почти всех сфер $S_r := S(x_0, r)$ в смысле модуля семейства поверхностей. Действительно, пусть Γ_0 — подсемейство всех сфер $S_r := S(x_0, r)$, для которых либо $H^{n-1}(f(B_0) \cap S_r^*) > 0$, либо $H^{n-1}(f(B_*) \cap S_r^*) > 0$. Обозначим через R множество всех $r \in \mathbb{R}$, для которых либо $H^{n-1}(f(B_0) \cap S_r^*) > 0$, либо $H^{n-1}(f(B_*) \cap S_r^*) > 0$. В силу изложенного выше $m_1(R) = 0$. Тогда по теореме Фубини $m(E) = 0$, где $E = \{x \in D : |x - x_0| = r \in R\}$. Функция $\rho_1 : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$, определенная символом ∞ при $x \in E$ и равная нулю на оставшемся множестве, обобщенно допустима для семейства Γ_0. Таким образом, по (9.18) в [5] $M(\Gamma_0) \le \int_E \rho_1^n dm(x) = 0$, т. е. $M(\Gamma_0) = 0$.

По теореме Кирсбрауна (см. [15], теорема 2.10.43) каждое отображение f_l может быть продолжено до липшицевого отображения $\widetilde{f}_l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, которое по теореме Радемахера – Степанова дифференцируемо почти всюду в $\mathbb{R}^n$ (см. [15], теорема 3.1.6). В силу единственности аппроксимативного дифференциала (см. [15], пункт 3.1.2) можно считать, что при всех $x \in B_l$ выполнено равенство $\widetilde{f_l}'(x) = f'(x)$.

Пусть Γ обозначает семейство всех сфер S_r, $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 < d_0 = \mathrm{dist}\,(x_0, \partial D)$. Для произвольной функции $\rho_* \in \mathrm{adm}\, f(\Gamma)$ такой, что $\rho_* \equiv 0$ вне $f(D)$, полагаем $\rho \equiv 0$ вне D и на B_0 и

$$\rho(x) := \Lambda(x)\, \rho_*(f(x)) \quad \text{при} \quad x \in B,$$

где

$$\Lambda(x) = \left[\frac{\det f'(x)}{l(f'(x))}\right]^{\frac{1}{n-1}} = [\ \lambda_2\ \ldots\ \lambda_n]^{\frac{1}{n-1}} \geq [J_{n-1}(x)]^{\frac{1}{n-1}} \quad \text{для почти всех} \quad x \in B.$$

Здесь $\lambda_n \geq \ldots \geq \lambda_1$ — главные дилатационные коэффициенты $f'(x)$ (см., например, разд. I.4.1 в [1]) и $J_{n-1}(x)$ — $(n-1)$-мерный якобиан $f|_{S_r}$ в точке x, где $r = |x - x_0|$ (см. разд. 3.2.1 в [15]).

Рассуждая покусочно на каждом B_l, $l = 1, 2, \ldots$, и учитывая теорему Кирсбрауна, по теореме 3.2.5 о замене переменных в [15] имеем

$$\int\limits_{S_r} \varrho^{n-1}\, d\mathcal{A} \geq \int\limits_{S_*^r} \varrho_*^{n-1}\, d\mathcal{A} \geq 1$$

для почти всех S_r и, таким образом, $\varrho \in \mathrm{ext\,adm}\,\Gamma$.

Используя замену переменных на каждом B_l, $l = 1, 2, \ldots$ (см., например, теорему 3.2.5 в [15]), и счетную аддитивность интеграла, получаем оценку

$$\int\limits_D \frac{\varrho^n(x)}{K_I^{\frac{1}{n-1}}(x, f)}\, dm(x) \leq \int\limits_{f(D)} \varrho_*^n(x)\, dm(x),$$

что и завершает доказательство.

***Следствие* 1.** *Любой гомеоморфизм с конечным искажением в* $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, *класса* $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$ *при* $p > n-1$ *является нижним* Q*-гомеоморфизмом с* $Q(x) = K_I^{\frac{1}{n-1}}(x, f)$.

***Следствие* 2.** *Любой гомеоморфизм* $f \in W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ *в* $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, *при условии* (11) *на функцию* φ, *в частности любой гомеоморфизм* $f \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$ *при* $p > n-1$ *с* $K_I(x, f) \in L^1_{\mathrm{loc}}(D)$, *является кольцевым* Q_**-гомеоморфизмом в каждой точке* $x_0 \in D$ *с* $Q_*(x) = K_I(x, f)$.

Последнее следует непосредственно из леммы 1 с учетом взаимосвязи между нижними и кольцевыми Q-гомеоморфизмами (см. замечание 1).

4. О функциях классов BMO, VMO и FMO. Говорят, что вещественная функция $\varphi \in L^1_{\mathrm{loc}}(D)$ имеет *ограниченное среднее колебание* в области $D \subset \mathbb{R}^n$ (пишут $\varphi \in \mathrm{BMO}(D)$, либо просто $\varphi \in \mathrm{BMO}$), если

$$\|\varphi\|_* = \sup_{B \subset D} \frac{1}{|B|} \int\limits_B \|\varphi(x) - \varphi_B\|\, dm(x) < \infty, \tag{12}$$

где точная нижняя грань в (12) берется по всем шарам B, лежащим в области D, а

$$\varphi_B = \fint\limits_B \varphi(x)\, dm(x) :\ = \frac{1}{|B|} \int\limits_B \varphi(x)\, dm(x) \tag{13}$$

обозначает среднее интегральное значение функции φ над шаром B.

Пространство BMO, введенное Джоном и Ниренбергом в работе [16], является одним из важнейших понятий гармонического анализа, комплексного анализа, теории уравнений с частными производными и смежных областей [17, 18]. Функция φ класса BMO называется функцией *исчезающего среднего колебания* (сокращенно $\varphi \in \mathrm{VMO}$), если супремум в (12) по всем шарам B в области D таким, что $|B| < \varepsilon$, стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Пространство VMO введено Сарасоном в статье [19]. Отметим, что значительное количество работ посвящено изучению уравнений в частных производных, имеющих коэффициенты класса VMO (см., например, [20 – 24]).

Следуя работе [25], будем говорить, что функция $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание в точке* $x_0 \in D$, если

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \quad \fint_{B(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \widetilde{\varphi}_\varepsilon|\, dm(x) < \infty, \tag{14}$$

где

$$\widetilde{\varphi}_\varepsilon = \fint_{B(x_0,\varepsilon)} \varphi(x)\, dm(x) \tag{15}$$

обозначает среднее интегральное значение функции φ над шаром $B(x_0,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < \varepsilon\}$. Как известно, с условием (14) совместима ситуация, когда $\widetilde{\varphi_\varepsilon} \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$. Говорим также, что функция $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание в области* D (пишем $\varphi \in \mathrm{FMO}(D)$, либо просто $\varphi \in \mathrm{FMO}$), если φ имеет конечное среднее колебание в каждой точке $x_0 \in D$.

Известно также, что при всех $1 \le p < \infty$ имеют место включения $\mathrm{L}^\infty(D) \subset \mathrm{BMO}(D) \subset \subset \mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(D)$ [16 – 18]. Однако $\mathrm{FMO}(D)$ не является подклассом $L^p_{\mathrm{loc}}(D)$ ни для какого $p > 1$, хотя $\mathrm{FMO}(D) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(D)$ (см. соответствующий пример в разд. 11.2 в [5]). Таким образом, FMO существенно шире $\mathrm{BMO}_{\mathrm{loc}}$.

Приведем еще некоторые факты о функциях конечного среднего колебания из работы [25].

Предложение 1. *Если для некоторых чисел* $\varphi_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$,

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \quad \fint_{B(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \varphi_\varepsilon|\, dm(x) < \infty, \tag{16}$$

то функция φ *имеет конечное среднее колебание в точке* x_0.

***Следствие* 3.** *В частности, если в точке* $x_0 \in D$ *выполнено условие*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \quad \fint_{B(x_0,\,\varepsilon)} |\varphi(z)|\, dm(x) < \infty, \tag{17}$$

то функция φ *имеет конечное среднее колебание в* x_0.

Напомним, что точка $x_0 \in D$ называется *точкой Лебега* функции $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$, если φ интегрируема в окрестности x_0 и

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \quad \fint_{B(x_0,\,\varepsilon)} |\varphi(x) - \varphi(x_0)|\, dm(x) = 0. \tag{18}$$

Известно, что для функции $\varphi \in L^1_{\rm loc}(D)$ почти все точки D являются ее точками Лебега и, таким образом, конечного среднего колебания.

5. Равностепенно непрерывные и нормальные классы. Прежде всего напомним некоторые необходимые для дальнейшего изложения определения. Пусть (X, d) и (X', d') — метрические пространства с расстояниями d и d' соответственно. Семейство $\mathfrak{F}$ непрерывных отображений $f\colon X \to X'$ называется *нормальным*, если из любой последовательности отображений $f_m \in \mathfrak{F}$ можно выделить подпоследовательность f_{m_k}, которая сходится локально равномерно в X к непрерывной функции $f\colon X \to X'$.

Введенное понятие очень тесно связано со следующим. Семейство $\mathfrak{F}$ отображений $f\colon X \to X'$ называется *равностепенно непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ для всех x с $d(x, x_0) < \delta$ и для всех $f \in \mathfrak{F}$. Говорят, что $\mathfrak{F}$ *равностепенно непрерывно*, если $\mathfrak{F}$ равностепенно непрерывно в каждой точке из X. Как известно, любое нормальное семейство $\mathfrak{F}$ отображений $f\colon X \to X'$ равностепенно непрерывно (см., например, предложение 7.1 в [5]). Обратное заключение также справедливо, если X сепарабельно, а X' компактно.

Следующее утверждение представляет собой версию теоремы Арцела – Асколи (см., например, следствие 7.5 в [5]).

Предложение 2. *Если (X, d) — сепарабельное, а (X', d') — компактное метрическое пространство, то семейство $\mathfrak{F}$ отображений $f\colon X \to X'$ нормально тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ равностепенно непрерывно.*

В дальнейшем в качестве пространства X используются области D в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, а в качестве X' используется одноточечная компактификация $\mathbb{R}^n$. В расширенном пространстве $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \bigcup \{\infty\}$ используется *сферическая* (*хордальная*) *метрика* $h(x, y) = |\pi(x) - \pi(y)|$, где π — стереографическая проекция $\overline{\mathbb{R}^n}$ на сферу $S^n\left(\frac{1}{2}e_{n+1}, \frac{1}{2}\right)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$h(x, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |x|^2}}, \quad h(x, y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{1 + |x|^2}\sqrt{1 + |y|^2}}, \quad x \neq \infty \neq y.$$

Сферическим (*хордальным*) *диаметром* множества $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ называется величина $h(E) = \sup_{x,y \in E} h(x, y)$.

Комбинируя следствие 2 с результатами работы [7] о равностепенно непрерывных и нормальных семействах кольцевых Q-гомеоморфизмов (см. также главу 7 в [5]), получаем следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, $\varphi\colon (0, \infty) \to (0, \infty)$ — неубывающая функция, удовлетворяющая условию* (11) *при некотором $t_* \in (0, \infty)$. Пусть $f\colon D \to D'$ — такой гомеоморфизм класса Орлича – Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ с $K_I(x, f) \in L^1_{\rm loc}(D)$, что $h(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)) \geq \Delta > 0$. Тогда для каждого $x_0 \in D$ и $x \in B(x_0, \varepsilon(x_0))$, $\varepsilon(x_0) < d(x_0) = {\rm dist}\,(x_0, \partial D)$, имеет место неравенство*

$$h(f(x), f(x_0)) \leq \frac{\alpha_n}{\Delta} \exp\left\{-\int\limits_{|x-x_0|}^{\varepsilon(x_0)} \frac{dr}{r k_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)}\right\}, \tag{19}$$

где постоянная α_n зависит только от n, а $k_{x_0}(r)$ обозначает среднее интегральное значение функции $K_I(x, f)$ над сферой $S(x_0, r)$.

***Замечание* 2.** Оценку (19) можно также записать в виде

$$h(f(x), f(x_0)) \leq \frac{\alpha_n}{\Delta} \exp \left\{ -\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}} \int\limits_{|x-x_0|}^{\varepsilon(x_0)} \frac{dr}{\|K_I\|^{\frac{1}{n-1}}(x_0, r)} \right\}, \tag{20}$$

где ω_{n-1} — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$, $\|K_I\|(x_0, r)$ — норма сужения $K_I(x, f)$ на сфере $S(x_0, r)$ в пространстве $L^1(S(x_0, r))$.

***Следствие* 4.** *В частности, оценки* (19) *и* (20) *имеют место для гомеоморфизмов f класса Соболева $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$ при $p > n-1$ с $K_I \in L^1_{\mathrm{loc}}$.*

***Следствие* 5.** *Пусть для гомеоморфизма $f\colon D \to D'$ класса $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ при $r < \varepsilon(x_0) < \min\left\{e^{-1}, d(x_0)\right\}$ выполнено условие*

$$k_{x_0}(r) \leq \left[\log \frac{1}{r}\right]^{n-1}. \tag{21}$$

Тогда при всех $x \in B(x_0, \varepsilon(x_0))$ имеет место оценка

$$h(f(x), f(x_0)) \leq \frac{\alpha_n}{\Delta} \frac{\log \dfrac{1}{\varepsilon(x_0)}}{\log \dfrac{1}{|x-x_0|}}. \tag{22}$$

***Следствие* 6.** *В частности, если для некоторого $\varepsilon(x_0) < \min\{e^{-1}, d(x_0)\}$*

$$K_I(x, f) \leq \left[\log \frac{1}{|x-x_0|}\right]^{n-1}, \tag{23}$$

то оценка (22) *имеет место всюду в шаре $B(x_0, \varepsilon(x_0))$.*

***Замечание* 3.** Если вместо условий (21) и (23) потребовать, соответственно, выполнения неравенств

$$k_{x_0}(r) \leq c\left[\log \frac{1}{r}\right]^{n-1} \tag{24}$$

и

$$K_I(x, f) \leq c\left[\log \frac{1}{|x-x_0|}\right]^{n-1}, \tag{25}$$

то

$$h(f(x), f(x_0)) \leq \frac{\alpha_n}{\Delta} \left[\frac{\log \dfrac{1}{\varepsilon(x_0)}}{\log \dfrac{1}{|x-x_0|}}\right]^{1/c^{\frac{1}{n-1}}}. \tag{26}$$

Теорема 2. *Пусть $f\colon \mathbb{B}^n\to\mathbb{B}^n$, $n\ge 3$, $f(0)=0$, — гомеоморфизм класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ с условием* (11) *и*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<1} K_I(x,f)\,\frac{dm(x)}{|x|^n}\le c\log\frac{1}{\varepsilon}\quad \forall\,\varepsilon\in(0,1). \tag{27}$$

Тогда

$$|f(x)|\le\gamma_n\,|x|^{\beta_n}, \tag{28}$$

где γ_n — некоторая постоянная, зависящая только от n, $\beta_n=(\omega_{n-1}/c)^{\frac{1}{n-1}}$ и ω_{n-1} — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 3. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n\ge 3$, и $f\colon D\to D'$ — такой гомеоморфизм класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$, что $h(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus f(D))\ge\Delta>0$, и почти всюду $K_I(x,f)\le Q(x)$ при $Q\in{\rm FMO}(x_0)$. Тогда при некотором $0<\varepsilon_0<{\rm dist}\,(x_0,\partial D)$*

$$h(f(x),f(x_0))\le\frac{\alpha_n}{\Delta}\left\{\frac{\log\frac{1}{\varepsilon_0}}{\log\frac{1}{|x-x_0|}}\right\}^{\beta}\quad \forall x\in B(x_0,\varepsilon_0), \tag{29}$$

где постоянная α_n зависит только от n, а β — только от функции Q.

***Следствие* 7.** *В частности, оценка* (29) *справедлива, если*

$$\overline{\lim\limits_{\varepsilon\to0}}\ \ \fint\limits_{B(x_0,\varepsilon)} Q(x)\,dm(x)<\infty. \tag{30}$$

Теперь пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n\ge 3$, $\varphi\colon(0,\infty)\to(0,\infty)$ — неубывающая функция, $Q\colon\mathbb{R}^n\to(0,\infty)$ — произвольная измеримая по Лебегу функция. Обозначим символом $\mathcal{O}^{\varphi}_{Q,\Delta}$ семейство всех таких гомеоморфизмов f из D в $\mathbb{R}^n$ с конечным искажением класса Орлича–Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$, что $h\left(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus f(D)\right)\ge\Delta>0$, $K_I(x,f)\le Q(x)$ почти всюду. Обозначим также через $\mathcal{S}^{p}_{Q,\Delta}$, $p\ge 1$, семейство $\mathcal{O}^{\varphi}_{Q,\Delta}$ при $\varphi(t)=t^p$.

На основании предложения 2, а также результатов пункта 4 получаем следующие теоремы.

Теорема 4. *Пусть $\varphi\colon(0,\infty)\to(0,\infty)$ — неубывающая функция, удовлетворяющая условию* (11)*. Если $Q\in{\rm FMO}$, то класс $\mathcal{O}^{\varphi}_{Q,\Delta}$ образует нормальное семейство отображений.*

***Следствие* 8.** *При условии* (11) *класс $\mathcal{O}^{\varphi}_{Q,\Delta}$ образует нормальное семейство отображений, если выполнено условие*

$$\overline{\lim\limits_{\varepsilon\to0}}\ \ \fint\limits_{B(x_0,\varepsilon)} Q(x)\,dm(x)<\infty\quad\forall\,x_0\in D. \tag{31}$$

***Следствие* 9.** *В частности, класс $\mathcal{S}^{p}_{Q,\Delta}$ образует нормальное семейство отображений при $p>1$, как только выполнено одно из двух условий*: $Q\in{\rm FMO}$ *или* (31).

Теорема 5. *Пусть $Q\in L^1_{\rm loc}$, $n\ge 3$, и при некотором $\varepsilon(x_0)<{\rm dist}\,(x_0,\partial D)$*

$$\int\limits_0^{\varepsilon(x_0)}\frac{dr}{\|Q\|_1^{\frac{1}{n-1}}(x_0,r)}=\infty\quad\forall\,x_0\in D, \tag{32}$$

где $\|Q\|_1(x_0, r)$ *обозначает норму функции* Q *в пространстве* L^1 *над сферой* $S(x_0, r)$. *Тогда при любом* $\Delta > 0$ *классы* $\mathcal{O}^{\varphi}_{Q,\Delta}$ *и* $\mathcal{S}^{p}_{Q,\Delta}$ *образуют нормальные семейства отображений, если* φ *удовлетворяет условию* (11) *и, соответственно, если* $p > 1$.

***Следствие* 10.** *Классы* $\mathcal{O}^{\varphi}_{Q,\Delta}$ *и* $\mathcal{S}^{p}_{Q,\Delta}$ *образуют нормальные семейства отображений, как только функция* φ *удовлетворяет соотношению* (11) *и, соответственно,* $p > 1$, *а функция* $Q(x)$ *имеет лишь особенности логарифмического типа.*

Пусть, как и выше, D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, $\varphi\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ — неубывающая функция. Для неубывающей функции $\Phi\colon [0,\infty] \to [0,\infty]$, $M > 0$ и $\Delta > 0$ через $\mathcal{O}^{\Phi,\varphi}_{M,\Delta}$ обозначим семейство всех таких гомеоморфизмов класса Орлича – Соболева $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$, что $h\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)\right) \geq$ $\geq \Delta > 0$ и

$$\int\limits_{D} \Phi\left(K_I(x,f)\right) \frac{dm(x)}{(1+|x|^2)^n} \leq M. \tag{33}$$

Аналогично, через $\mathcal{S}^{\Phi,p}_{M,\Delta}$, $p \geq 1$, обозначаем классы $\mathcal{O}^{\Phi,\varphi}_{M,\Delta}$ при $\varphi(t) = t^p$.

Комбинируя теорему 4.1 работы [8] со следствием 2, получаем следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть* $\Phi\colon [0,\infty] \to [0,\infty]$ — *такая неубывающая выпуклая функция, что при некотором* $\delta_0 > \Phi(0)$

$$\int\limits_{\delta_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{n-1}}} = \infty. \tag{34}$$

Тогда классы $\mathcal{O}^{\Phi,\varphi}_{M,\Delta}$ *при условии* (11), *а также классы* $\mathcal{S}^{\Phi,p}_{M,\Delta}$ *при* $p > 1$ *являются равностепенно непрерывными, и, следовательно, образуют нормальные семейства отображений при любых* $M \in (0,\infty)$ *и* $\Delta \in (0,1)$.

Как следует из работы [8], условие вида (34) является не только достаточным, но и необходимым для нормальности указанных классов.

Литература

1. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. – Новосибирск: Наука, 1982.
2. *Iwaniec T., Sverák V.* On mappings with integrable dilatation // Proc. Amer. Math. Soc. – 1993. – **118**. – P. 181 – 188.
3. *Iwaniec T., Martin G.* Geometrical function theory and non-linear analysis. – Oxford: Clarendon Press, 2001.
4. *Gutlyanskii V. Ya., Ryazanov V. I., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami equation: a geometric approach // Develop. Math. – New York etc.: Springer, 2012. – **26**.
5. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory // Springer Monogr. Math. – New York etc.: Springer, 2009.
6. *Ковтонюк Д. А., Рязанов В. И., Салимов Р. Р., Севостьянов Е. А.* К теории классов Орлича – Соболева // Алгебра и анализ. – 2013. – **25**, № 6. – С. 49 – 101.
7. *Рязанов В. И., Севостьянов Е. А.* Равностепенно непрерывные классы кольцевых Q-гомеоморфизмов // Сиб. мат. журн. – 2007. – **48**, № 6. – С. 1361 – 1376.
8. *Рязанов В. И., Севостьянов Е. А.* Равностепенная непрерывность квазиконформных в среднем отображений // Сиб. мат. журн. – 2011. – **52**, № 3. – С. 665 – 679.
9. *Golberg A., Salimov R., Sevost'yanov E.* Distortion estimates under mappings with controlled p-module // Ann. Univ. Bucharest. Math. Ser. – 2014. – **63**, № 5. – P. 95 – 114.
10. *Birnbaum Z., Orlicz W.* Über die Verallgemeinerungen des Begriffes der zueinander konjugierten Potenzen // Stud. Math. – 1931. – **3**. – P. 1 – 67.

11. *Gehring F. W.* Rings and quasiconformal mappings in space // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – **103**. – P. 353 – 393.
12. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On ring solutions of Beltrami equation // J. Anal. Math. – 2005. – **96**. – P. 117–150.
13. *Lomako T., Salimov R., Sevost'yanov E.* On equicontinuity of solutions to the Beltrami equations // Ann. Univ. Bucharest. Math. Ser. – 2010. – **69**, № 2. – P. 263 – 274.
14. *Calderon A. P.* On the differentiability of absolutely continuous functions // Riv. mat. Univ. Parma. – 1951. – **2**. – P. 203 – 213.
15. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. – М.: Наука, 1987.
16. *John F., Nirenberg L.* On functions of bounded mean oscillation // Communs Pure and Appl. Math. – 1961. – **14**. – P. 415 – 426.
17. *Heinonen J., Kilpelainen T., Martio O.* Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations. – Oxford etc.: Clarendon Press, 1993.
18. *Reimann H. M., Rychener T.* Funktionen Beschränkter Mittlerer Oscillation // Lect. Notes Math. – 1975. – **487**.
19. *Sarason D.* Functions of vanishing mean oscillation // Trans. Amer. Math. Soc. – 1975. – **207**. – P. 391 – 405.
20. *Chiarenza F., Frasca M., Longo P.* $W^{2,p}$-solvability of the Dirichlet problem for nondivergence elliptic equations with VMO coefficients // Trans. Amer. Math. Soc. – 1993. – **336**, № 2. – P. 841 – 853.
21. *Iwaniec T., Sbordone C.* Riecz transforms and elliptic PDEs with VMO coefficients // J. Anal. Math. – 1998. – **74**. – P. 183 – 212.
22. *Martio O., Ryazanov V., Vuorinen M.* BMO and injectivity of space quasiregular mappings // Math. Nachr. – 1999. – **205**. – S. 149 – 161.
23. *Palagachev D. K.* Quasilinear elliptic equations with VMO coefficients // Trans. Amer. Math. Soc. – 1995. – **347**, № 7. – P. 2481 – 2493.
24. *Ragusa M. A.* Elliptic boundary value problem in vanishing mean oscillation hypothesis // Comment. math. Univ. carol. – 1999. – **40**, № 4. – P. 651 – 663.
25. *Игнатьев А., Рязанов В.* Конечное среднее колебание в теории отображений // Укр. мат. вестн. – 2005. – **2**, № 3. – С. 395 – 417.

Получено 09.12.14