УДК 517.51

Г. А. Волошин (Буков. держ. фін.-екон. ун-т; Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича),
В. К. Маслюченко (Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича)

СЕКВЕНЦІАЛЬНЕ ЗАМИКАННЯ ПРОСТОРУ СУКУПНО НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ У ПРОСТОРІ НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ

Given compact spaces X and Y, we study the space $S(X \times Y)$ of separately continuous functions $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ endowed with the locally convex topology generated by the seminorms $\|f\|^x = \max_{y\in Y}|f(x,y)|$, $x \in X$, and $\|f\|_y = \max_{x\in X}|f(x,y)|$, $y \in Y$. Under the assumption that the compact space X is metrizable, we prove that a separately continuous function $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ is the limit of a sequence $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ of jointly continuous function $f_n\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ in $S(X \times Y)$ provided that the set $D(f)$ of discontinuity points of f has countable projections on X.

Для компактных пространств X, Y изучается пространство $S(X \times Y)$ раздельно непрерывных функций $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$, наделенное локально выпуклой топологией, порожденной полунормами $\|f\|^x = \max_{y\in Y}|f(x,y)|$, $x \in X$, и $\|f\|_y = \max_{x\in X}|f(x,y)|$, $y \in Y$. При предположении, что компактное пространство X метризуемо, доказано, что раздельно непрерывная функция $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ является пределом последовательности $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ совокупно непрерывных функций $f_n\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ в $S(X \times Y)$, если множество $D(f)$ точек разрыва функции f имеет счетную проекцию на X.

1. Вступ. Для компактних просторів X і Y розглянемо простір $CC(X \times Y)$ усіх нарізно неперервних функцій $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$. Для неперервної функції $g\colon T \to \mathbb{R}$ на компактному просторі T введемо рівномірну норму $\|g\|_\infty = \max_{t\in T}|g(t)|$, а для нарізно неперервної функції $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ — напівнорми

$$\|f\|^x = \|f^x\|_\infty, \quad x \in X, \qquad \text{і} \qquad \|f\|_y = \|f_y\|_\infty, \quad y \in Y,$$

де $f^x = f(x,\cdot)$ і $f_y = f(\cdot,y)$. Сукупність $\mathcal{N}(X,Y)$ усіх напівнорм $\|\cdot\|^x$ і $\|\cdot\|_y$, де $x \in X$ і $y \in Y$, породжує на просторі $CC(X\times Y)$ деяку локально опуклу топологію $\mathcal{T}$, яку ми називаємо *топологією пошарово рівномірної збіжності*. Локально опуклий простір $(CC(X \times Y), \mathcal{T})$ ми позначаємо символом $S(X \times Y)$. Простір $S = S[0,1]^2$ був уведений у праці [1], де вивчалися його перші властивості. Зокрема, було показано, що замикання простору $P = P[0,1]^2$ всіх поліномів на квадраті $[0,1]^2$ у просторі S збігається з замиканням простору $C = C[0,1]^2$ всіх сукупно неперервних функцій і дорівнює S.

Нагадаємо, що *секвенціальним замиканням* множини E у топологічному просторі T називається множина $\overline{E}^s$, що складається з усіх границь послідовностей точок t_n з E у просторі T. У статті [2] вивчалися секвенціальні замикання $\overline{P}^s$ і $\overline{C}^s$ у просторі S. Там було з'ясовано, що $\overline{P}^s = \overline{C}^s$, і доведено, що в $\overline{C}^s$ входять всі ті елементи $f \in S$, у яких проекція $\mathrm{pr}_X(D(f))$ множини $D(f)$ точок розриву на вісь абсцис не більш ніж зліченна. Питання про рівність $\overline{C}^s = S$ залишилося відкритим і досі на нього немає відповіді.

Тут ми розглядаємо загальніший випадок простору $S(X \times Y)$ і з'ясовуємо, що для метризовного компакта X і компактного простору Y ті функції $f \in S(X \times Y)$, у яких $\mathrm{pr}_X(D(f))$ не більш ніж зліченна, належать до секвенціального замикання $\overline{C(X \times Y)}^s$ простору $C(X \times Y)$ усіх сукупно неперервних функцій $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$. Цей результат було анонсовано у [3]. Випадок $X = [0,1]$ розглянуто у статті [4].

2. ε-Відокремні множини і розбиття одиниці. Нехай X — метричний простір, відстань між елементами x' і x'' якого позначається символом $|x' - x''|_X$. Для $x_0 \in X$ і $r > 0$ нехай $B(x_0, r) = \{x \in X : |x - x_0|_X < r\}$ і $B[x_0, r] = \{x \in X : |x - x_0|_X \leq r\}$ — відповідно відкрита і замкнена кулі в X. Для $\varepsilon > 0$ множина $A \subseteq X$ називається *ε-відокремною*, якщо для довільних різних елементів x' і x'' з A виконується нерівність $|x' - x''|_X \geq \varepsilon$.

Лема 1. *Нехай X — метричний компакт і A — скінченна ε-відокремна підмножина в X. Тоді існує така скінченна максимальна ε-відокремна множина в X, що $B \supseteq A$.*

Доведення. Припустимо, що не існує скінченної максимальної ε-відокремної множини B такої, що $B \supseteq A$.

Тоді сама множина A не є максимальною, отже, існує така скінченна ε-відокремна множина $\widetilde{A}$, що $\widetilde{A} \supset A$. Зокрема, існує елемент $x_1 \in \widetilde{A} \setminus A$. При цьому множина $A_1 = A \cup \{x_1\}$ є скінченною ε-відокремною і не є максимальною. Так само існує такий елемент $x_2 \in X \setminus A_1$, що множина $A_2 = A_1 \cup \{x_2\}$ є скінченною ε-відокремною і не є максимальною. Цей процес можна продовжувати до нескінченності, в результаті чого утвориться така послідовність точок $x_n \in X$, що скінченні множини $A_n = A \cup \{x_1, \ldots, x_n\}$ будуть ε-відокремними і $x_n \notin A_{n-1}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$ (тут $A_0 = A$). Для цієї послідовності виконується нерівність $|x_n - x_m|_X \geq \varepsilon$, як тільки $n \neq m$. Тоді і для кожної підпослідовності $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ послідовності $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ виконується нерівність $|x_{n_k} - x_{n_j}|_X \geq \varepsilon$ при $k \neq j$, отже, підпослідовність $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ не фундаментальна, а значить, і не збіжна в X. Таким чином, з послідовності $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ не можна виділити збіжну підпослідовність, що суперечить компактності простору X. Отже, наше припущення хибне і твердження леми є правильним.

Наслідок. *Нехай X — метричний компакт. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ в X існує максимальна скінченна ε-відокремна множина $B = \{x_1, \ldots, x_n\}$.*

Доведення випливає з леми 1 при $A = \varnothing$.

Лема 2. *Нехай X — метричний компакт, $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — максимальна ε-відокремна множина, що складається з різних точок x_k, і $U_k = B(x_k, \varepsilon)$ при $k = 1, \ldots, n$. Тоді $x_j \notin U_k$ при $k \neq j$ і $\bigcup\limits_{k=1}^{n} U_k = X$.*

Доведення. За означенням $|x_j - x_k|_X \geq \varepsilon$ при $j \neq k$, отже, $x_j \notin U_k$ при $j \neq k$. Нехай $x \in X$. Якщо $x \in A$, то $x = x_k$ для деякого $k = 1, \ldots, n$, тому $x \in U_k$. Припустимо, що $x \notin A$. Тоді скінченна множина $B = A \cup \{x\}$ не може бути ε-відокремною, адже $B \supset A$ і A — максимальна ε-відокремна множина. Оскільки сама множина A є ε-відокремною, то існує такий номер $k = 1, \ldots, n$, що $|x - x_k|_X < \varepsilon$, тобто $x \in U_k$.

Лема 3. *Нехай $x_1, \ldots, x_n$ — різні точки з метричного простору X, $U_k = B(x_k, \varepsilon)$ при $k = 1, \ldots, n$, $x_j \notin U_k$ при $k \neq j$ і $\bigcup\limits_{k=1}^{n} U_k = X$. Тоді існує така послідовність неперервних функцій $\varphi_k \colon X \to [0, 1]$, що носій $\operatorname{supp} \varphi_k = U_k$ при $k = 1, \ldots, n$, $\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) = 1$ на X і*
$$\varphi_k(x_j) = \delta_{k,j} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j. \end{cases}$$

Доведення. Для кожного $k = 1, \ldots, n$ покладемо

$$\psi_k(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon}(\varepsilon - |x - x_k|_X), & |x - x_k|_X \leq \varepsilon, \\ 0, & |x - x_k|_X \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Зрозуміло, що функції ψ_k коректно визначено, причому їх звуження $\psi_k|_{B_k}$ і $\psi_k|_{A_k}$ на замкнені множини $B_k = B[x_k, \varepsilon]$ і $A_k = X \setminus U_k$ неперервні, тому і функції ψ_k неперервні, а з ними буде неперервною і їхня сума $\psi = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)$.

Очевидно, що $\operatorname{supp} \varphi_k = U_k$ при $k = 1, \ldots, n$ і $0 \leq \psi_k \leq 1$ на X. Але $\bigcup_{k=1}^{n} U_k = X$, тому для кожної точки $x \in X$ існує таке k, що $x \in U_k$, а отже, $\psi(x) \geq \psi_k(x) > 0$. Таким чином, $\psi(x) > 0$ на X, і тому на X можна визначити функції $\varphi_k = \dfrac{\psi_k}{\psi}$, які теж будуть неперервними, і для них $\operatorname{supp} \varphi_k = \operatorname{supp} \psi_k = U_k$, $0 \leq \varphi_k(x) \leq 1$ при $k = 1, \ldots, n$ і $\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) = 1$ на X, при цьому

$$\varphi_k(x_j) = \frac{\psi_k(x_j)}{\psi(x_j)} = \frac{\psi_k(x_j)}{\psi_j(x_j)} = \delta_{k,j}.$$

Лема 4. *Нехай A — довільна не більш ніж зліченна множина в компактному метричному просторі X. Тоді існують послідовності додатних чисел ε_n, що, спадаючи, прямують до нуля, і скінченних максимальних ε_n-відокремних множин B_n таких, що $B_n \subseteq B_{n+1}$ для кожного n і $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = B$.*

Доведення. Нехай $A = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$. Візьмемо $\varepsilon_1 = 1$ і, використавши лему 1, знайдемо таку скінченну максимальну ε_1-відокремну множину B_1 в X, що $A_1 = \{a_1\} \subseteq B_1$.

Розглянемо числа

$$\rho_1 = \min_{x \in B_1} |x - a_2|_X \qquad \text{і} \qquad \varepsilon_2 = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \rho_1 = 0, \\ \min\left\{\dfrac{1}{2}, \rho_1\right\}, & \rho_1 > 0. \end{cases}$$

Зрозуміло, що $0 < \varepsilon_2 \leq \dfrac{1}{2} < 1 = \varepsilon_1$. Легко перевірити, що множина $A_2 = B_1 \cup \{a_2\}$ буде скінченною і ε_2-відокремною. Тому за лемою 1 існує така максимальна скінченна ε_2-відокремна множина B_2 в X, що $A_2 \subseteq B_2$. Тоді $B_1 \subseteq B_2$ і $\{a_1, a_2\} \subseteq B_2$.

Розглянемо тепер числа

$$\rho_2 = \min_{x \in B_2} |x - a_3|_X \qquad \text{і} \qquad \varepsilon_3 = \begin{cases} \min\left\{\varepsilon_2, \dfrac{1}{3}\right\}, & \rho_2 = 0, \\ \min\left\{\rho_2, \varepsilon_2, \dfrac{1}{3}\right\}, & \rho_2 > 0. \end{cases}$$

Зрозуміло, що $0 < \varepsilon_3 \leq \varepsilon_2$ і $\varepsilon_3 \leq \dfrac{1}{3}$. Скінченна множина $A_3 = B_2 \cup \{a_3\}$ є ε_3-відокремною, а отже, за лемою 1 існує скінченна максимальна ε_3-відокремна множина B_3 в X така, що $A_3 \subseteq B_3$. При цьому $B_2 \subseteq B_3$ і $\{a_1, a_2, a_3\} \subseteq B_3$.

Нехай вже визначено числа $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ і скінченні максимальні ε_1-$, \ldots, \varepsilon_n$-відокремні в X множини $B_1, \ldots, B_n$ такі, що $0 < \varepsilon_n \leq \varepsilon_{n-1} \leq \ldots \leq \varepsilon_1$, $\varepsilon_k \leq \dfrac{1}{k}$ при $k = 1, \ldots, n$, $B_n \supseteq \supseteq B_{n-1} \ldots \supseteq B_1$ і $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq B_n$.

Розглянемо числа

$$\rho_n = \min_{x \in B_n} |x - a_{n+1}|_X \qquad \text{і} \qquad \varepsilon_{n+1} = \begin{cases} \min\left\{\varepsilon_n, \dfrac{1}{n+1}\right\}, & \rho_n = 0, \\ \min\left\{\rho_n, \varepsilon_{n+1}, \dfrac{1}{n+1}\right\}, & \rho_n > 0. \end{cases}$$

Тоді $0 < \varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_n$ і $\varepsilon_{n+1} \leq \dfrac{1}{n+1}$ за побудовою. Скінченна множина $A_{n+1} = B_n \cup \{a_{n+1}\}$ буде ε_{n+1}-відокремною. Отже, за лемою 1 існує така скінченна максимальна ε_{n+1}-відокремна множина B_{n+1} в X, що $A_{n+1} \subseteq B_{n+1}$. Для неї $B_n \subseteq B_{n+1}$ і $\{a_1, \ldots, a_{n+1}\} \subseteq B_{n+1}$. Отже, дану побудову можна продовжити ще на один крок. Продовжуючи її до нескінченності, отримуємо шукані послідовності чисел ε_n і скінченних максимальних ε_n-відокремних множин B_n.

Побудовану в лемі 4 послідовність скінченних максимальних ε_n-відокремних множин B_n будемо називати *мажорантною для множини* A.

3. Апроксимаційна теорема. Нехай A — не більш ніж зліченна множина в метричному компакті X і $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ — мажорантна для A послідовність скінченних максимальних ε_n-відокремних множин B_n, до того ж $\varepsilon_n \downarrow 0$. Далі, нехай $B_n = \{b_{n,1}, \ldots, b_{n,m_n}\}$, де $b_{n,k} \neq b_{n,j}$ при $k \neq j$, $U_{n,k} = B(b_{n,k}, \varepsilon_n)$ і $\varphi_{n,k} \colon X \to [0,1]$ при $k = 1, \ldots, m_n$ — це неперервні функції, побудовані згідно з лемою 3, для яких $\operatorname{supp} \varphi_{n,k} = U_{n,k}$ при $k = 1, \ldots, m_n$, $\sum_{k=1}^{m_n} \varphi_{n,k}(x) = 1$ на X і $\varphi_{n,k}(b_{n,j}) = \delta_{k,j}$ при $k = 1, \ldots, m_n$.

Побудовану тут послідовність розбиттів одиниці $\Phi_n = (\varphi_{n,k})_{k=1}^{m_n}$ назвемо *асоційованою з мажорантною послідовністю* $(B_n)_{n=1}^{\infty}$. Подібну конструкцію було розглянуто у статті [5].

Теорема 1. *Нехай A — не більш ніж зліченна множина в метричному компакті X, $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ — мажорантна для A послідовність скінченних максимальних ε_n-відокремних множин $B_n = \{b_{n,1}, \ldots, b_{n,m_n}\}$ і $(\Phi_n)_{n=1}^{\infty}$ — асоційована з $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ послідовність розбиттів одиниці $\Phi_n = (\varphi_{n,k})_{k=1}^{m_n}$. Для функції $g \colon X \to Z$ зі значеннями в локально опуклому просторі Z покладемо*

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{m_n} \varphi_{n,k}(x) g(b_{n,k})$$

для кожного $x \in X$. Тоді:

1) *функції g_n неперервні і $g_n(x)$ дискретно збігається до $g(x)$ на A $\big($позначення $g_n(x) \xrightarrow{d} g(x)\big)$, тобто для кожного $x \in A$ існує такий номер N_x, що $g_n(x) = g(x)$, як тільки $n \geq N_x$*;

2) *якщо функція g неперервна, то $g_n \rightrightarrows g$ на X*;

3) *якщо g неперервна в точці x_0, то $g_n(x_0) \to g(x_0)$ в Z.*

Доведення. 1. Неперервність функції g_n випливає з неперервності функцій $\varphi_{n,k}$ і операцій у локально опуклому просторі Z. Нехай $x \in A$. Оскільки $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, то існує такий номер N_x, що $x \in B_{N_x}$. Тоді $x \in B_n$ при $n \geq N_x$, адже послідовність множин B_n зростає. Тому при кожному $n \geq N_x$ існує таке $j = 1, \ldots, m_n$, що $x = b_{n,j}$. В такому випадку

$$g_n(x) = g_n(b_{n,j}) = \sum_{k=1}^{m_n} \varphi_{n,k}(b_{n,j}) g(b_{n,k}) = \sum_{k=1}^{m_n} \delta_{k,j} g(b_{n,k}) = g(b_{n,j}) = g(x),$$

звідки і випливає, що $g_n(x) \xrightarrow{d} g(x)$.

2. За умовою функція g неперервна на метричному компакті X, а тому і рівномірно неперервна на ньому [6, с. 261]. Розглянемо довільний абсолютно опуклий окіл нуля W в локально опуклому просторі Z і знайдемо для нього таке $\delta > 0$, що для довільних x' і x'' з X з нерівності $|x' - x''|_X < \delta$ випливає, що $g(x') - g(x'') \in W$. Оскільки $\varepsilon_n \to 0$, то існує такий номер N, що $\varepsilon_n < \delta$ при $n \geq N$.

Нехай $x \in X$ і $n \geq N$. Тоді

$$g_n(x) - g(x) = \sum_{k=1}^{m_n} \varphi_{n,k}(x)(g(b_{n,k}) - g(x)) = \sum_{|b_{n,k}-x|_X<\varepsilon_n} \varphi_{n,k}(x)(g(b_{n,k}) - g(x)),$$

адже $\varphi_{n,k}(x) = 0$ при $|b_{n,k} - x|_X \geq \varepsilon_n$ і $\sum_{k=1}^{n} \varphi_{n,k}(x) = 1$. Але при $|b_{n,k} - x|_X < \varepsilon_n$ буде виконуватися нерівність $|b_{n,k} - x|_X < \delta$ і тому $g(b_{n,k}) - g(x) \in W$. В такому випадку

$$g_n(x) - g(x) \in \sum_{k \in I_{n,x}} \lambda_{n,k} W,$$

де $I_{n,x} = \{k \in \overline{1, m_n} : |b_{n,k} - x|_X < \varepsilon_n\}$ і $\lambda_{n,k} = \varphi_{n,k}(x)$. Оскільки $\sum_{k \in I_{n,x}} \lambda_{n,k} \leq \sum_{k=1}^{m_n} \lambda_{n,k} = 1$ і $\lambda_{n,k} \geq 0$, то $\sum_{k \in I_{n,x}} \lambda_{n,k} W \in W$, адже множина W є абсолютно опуклою. Тому $g_n(x) - g(x) \in W$, як тільки $n \geq N$, причому номер N не залежить від x. Отже, $g_n \rightrightarrows g$ на X.

3. Нехай функція g неперервна в точці x_0. Доведемо, що тоді $g_n(x_0) \to g(x_0)$ у просторі Z. Візьмемо абсолютно опуклий окіл нуля W в Z і знайдемо таке $\delta > 0$, що з нерівності $|x - x_0|_X < \delta$ випливає, що $g(x) - g(x_0) \in W$. Як і в п. 2, для довільного номера n маємо

$$g_n(x_0) - g(x_0) = \sum_{k=1}^{m_n} \varphi_{n,k}(x)(g(b_{n,k}) - g(x_0)) = \sum_{|b_{n,k}-x_0|_X<\varepsilon_n} \varphi_{n,k}(x_0)(g(b_{n,k}) - g(x_0)).$$

Як і раніше, $\varepsilon_n \to 0$, тому існує такий номер N, що $\varepsilon_n < \delta$, як тільки $n \geq N$. У такому випадку при $n \geq N$ і $|b_{n,k} - x_0|_X < \varepsilon_n$ маємо $|b_{n,k} - x_0|_X < \delta$, отже, $g(b_{n,k}) - g(x_0) \in W$ і

$$g_n(x_0) - g(x_0) \in \sum_{|b_{n,k}-x_0|_X<\varepsilon_n} \varphi_{n,k}(x_0) W \subseteq W,$$

оскільки $\sum_{|b_{n,k}-x_0|_X<\varepsilon_n} \varphi_{n,k}(x_0) \leq 1$, $\varphi_{n,k}(x_0) \geq 0$ і окіл W є абсолютно опуклим. Таким чином, $g_n(x_0) \to g(x_0)$ в Z при $n \to \infty$.

4. Наближення нарізно неперервних функцій. Тут ми застосуємо теорему 1 до вивчення секвенціального замикання простору $C(X \times Y)$ сукупно неперервних функцій $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ у просторі $S(X \times Y)$ нарізно неперервних функцій з топологією пошарово рівномірної збіжності.

Для відображення $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ символом $C(f)$ позначається множина його точок сукупної неперервності, а $C_Y(f) = \{x \in X : \{x\} \times Y \subseteq C(f)\}$.

Теорема 2. *Нехай X — метричний компакт, Y — компактний простір, $f \in S(X \times Y)$, A — не більш ніж зліченна підмножина простору X, $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ — мажорантна для A послідовність скінченних максимальних ε_n-відокремних множин $B_n = \{b_{n,1}, \ldots, b_{n,m_n}\}$, $(\Phi_n)_{n=1}^{\infty}$ — асоційована з $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ послідовність розбиттів одиниці $\Phi_n = (\varphi_{n,k})_{k=1}^{m_n}$, $\varphi : X \to C_p(Y)$, $\varphi(x) = f^x$ — асоційоване з f відображення,*

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{m_n} \varphi_{n,k}(x) \varphi(b_{n,k})$$

для $n \in N$ і $x \in X$, а $f_n(x, y) = \varphi_n(x)(y)$. Тоді $(f_n)_y \rightrightarrows f_y$ на X для кожного $y \in Y$, $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на Y для кожного $x \in C_Y(f)$, $f_n^x \xrightarrow{d} f^x$ для кожного $x \in B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, зокрема, і для кожного $x \in A$. При цьому $f_n \in C(X \times Y)$ для кожного n.

Доведення. Розглянемо локально опуклий простір $Z = C_p(Y)$ усіх неперервних функцій $g\colon Y \to \mathbb{R}$ з топологією поточкової збіжності. Відображення $\varphi\colon X \to C_p(Y)$ буде неперервним, оскільки $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ — нарізно неперервна функція. Тому за п. 2 теореми 1 $\varphi_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ на X при $n \to \infty$.

Оскільки лінійний функціонал $\delta_y(g) = g(y)$ неперервний на просторі $C_p(Y)$, то і

$$(f_n)_y(x) = f_n(x, y) = \delta_y \circ \varphi_n(x) \rightrightarrows \delta_y \circ \varphi(x) = f(x, y) = f_y(x)$$

на X при $n \to \infty$ для кожного $y \in Y$.

Нехай $x \in C_Y(f)$, тоді $\{x\} \times Y \subseteq C(f)$. З компактності простору Y легко вивести, що $x \in C(\varphi)$, де $C(\varphi)$ — множина точок неперервності відображення $\varphi\colon X \to C_u(Y)$, а $C_u(Y)$ — банахів простір неперервних функцій $g\colon Y \to \mathbb{R}$ з топологією рівномірної збіжності, що породжується рівномірною нормою $\|g\|_\infty = \max_{y\in Y} |g(y)|$. За п. 3 теореми 1 $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ у просторі $C_u(Y)$, тобто $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на Y при $n \to \infty$.

Нарешті, $f_n^x = \varphi_n(x) \xrightarrow{d} \varphi(x) = f^x$ для кожного $x \in B$ за п. 1 теореми 1.

Неперервність функцій

$$f_n(x, y) = \sum_{k=1}^{m_n} \varphi_{n,k}(x) f(b_{n,k}, y)$$

легко випливає з неперервності функцій $\varphi_{n,k}\colon X \to \mathbb{R}$ і $f^{b_{n,k}} : Y \to \mathbb{R}$.

Позначимо через $D(f)$ множину точок розриву відображення f.

Теорема 3. *Нехай $f \in S(X \times Y)$ і $\mathrm{pr}_X(D(f))$ не більш ніж зліченна. Тоді $f \in \overline{C(X \times Y)}^s$.*

Доведення. Нехай $A = \mathrm{pr}_X(D(f))$. Тоді $C_Y(f) = X\setminus A$. Скориставшись лемами 3 і 4, побудуємо послідовність $(B_n)_{n=1}^\infty$ скінченних максимальних ε_n-відокремних множин, мажорантну до множини A і асоційовану з нею послідовність розбиттів одиниці $\Phi_n = (\varphi_{n,k})_{k=1}^{m_n}$. Нехай

$$f_n(x, y) = \sum_{k=1}^{m_n} \varphi_{n,k}(x) f(b_{n,k}, y)$$

— функції $f_n : X \times Y \to \mathbb{R}$, що визначені в теоремі 2. За теоремою 2 будемо мати $(f_n)_y \rightrightarrows f_y$ на X для кожного $y \in Y$, $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на Y для кожного $x \in C_Y(f) = X\setminus A$ і $f_n^x \xrightarrow{d} f^x$ для кожного $x \in A$, а отже, і $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на X для кожного $x \in A$. Таким чином, $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на Y для кожного $x \in X$. Оскільки $f_n \in C(X \times Y)$ і $f_n \to f$ у просторі $S(X \times Y)$, то $f \in \overline{C(X \times Y)}^s$.

Література

1. *Волошин Г. А., Маслюченко В. К.* Топологізація простору нарізно неперервних функцій // Карп. мат. публ. – 2013. – **5**, № 2. – С. 199 – 207.
2. *Волошин Г. А., Маслюченко В. К., Маслюченко О. В.* Про пошарово рівномірне наближення нарізно неперервних функцій многочленами // Мат. вісн. НТШ. – 2013. – **10**. – С. 135 – 158.
3. *Волошин Г. А., Маслюченко В. К.* Про секвенціальне замикання простору сукупно неперервних функцій у просторі нарізно неперервних функцій // Мат. міжн. наук.-практ. конф., присв. 70-річчю Бук. держ. фін.-екон. у-ту „Інноваційні виміри розвитку економіки в умовах глобалізації”. – Чернівці, 2014. – С. 302 – 303.
4. *Волошин Г. А., Маслюченко В. К.* Про лінійну інтерполяцію векторнозначних функцій та її застосування // Мат. студ. – 2014. – **42**, № 2. – С. 129 – 133.
5. *Власюк Г., Маслюченко В. К.* Многочлени Бернштейна і нарізно неперервні функції // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2007. – Вип. 336–337. – С. 52 – 59.
6. *Келлі Дж.* Общая топология. – М.: Наука, 1981. – 432 с.

Одержано 07.04.15