УДК 517.9

В. В. Кириченко, М. В. Плахотник (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ТОПОЛОГІЧНО СПРЯЖЕНІ КУСКОВО-ЛІНІЙНІ УНІМОДАЛЬНІ ВІДОБРАЖЕННЯ ІНТЕРВАЛУ В СЕБЕ

Let $f, g\colon [0,1] \to [0,1]$ be a pair of continuous piecewise linear unimodal mappings and let f be defined as follows: $f(x) = 2x$ for $x \le 1/2$ and $f(x) = 2 - 2x$ for $x > 1/2$. Also let $h\colon [0,1] \to [0,1]$ be a piecewise differentiable homeomorphism such that $fh = hg$. Then h is piecewise linear and the mapping f completely determines g and h, together with the ascending or descending monotone parts of g.

Пусть $f, g\colon [0,1] \to [0,1]$ — пара непрерывных кусочно-линейных унимодальных отображений, причем f определяется следующим образом: $f(x) = 2x$ при $x \le 1/2$ и $f(x) = 2 - 2x$ при $x > 1/2$. Пусть $fh = hg$ для кусочно-непрерывного дифференцируемого гомеоморфизма $h\colon [0,1] \to [0,1]$. Тогда h кусочно-линейный, причем отображение f, а также возрастающая и убывающая монотонные части отображения g полностью определяют g и h.

1. Вступ. Характеризуючи динамічну систему, Анрі Пуанкаре звернув увагу на вивчення топологічних та геометричних властивостей орбіт її точок, назвавши ці властивості важливішими за емпіричні деталі розв’язку динамічної системи в конкретній системі координат (див. [3, 7]). Під властивостями, незалежними від системи координат, він мав на увазі структуру періодичних орбіт, кількість і стійкість періодичних точок. Питання про те, чи можна вважати дві динамічні системи однаковими, зводиться до питання про їх топологічну спряженість.

Відображення f та g інтервалу $[0,1]$ в себе називаються *топологічно спряженими*, якщо існує гомеоморфізм $h:\ [0,\ 1] \to [0,1]$, для якого комутує діаграма

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \xrightarrow{f} & [0,1] \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ [0,1] & \xrightarrow{g} & [0,1]\ , \end{array}$$

тобто виконується рівність

$$h(f(x)) = g(h(x)) \tag{1}$$

для будь-якого $x \in [0,1]$.

Далі літерою f будемо позначати відображення

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{якщо} \quad 0 \le x < 1/2, \\ 2 - 2x, & \text{якщо} \quad 1/2 \le x \le 1. \end{cases} \tag{2}$$

Ми розглядаємо відображення f та кусково-лінійне унімодальне відображення g, яке відображає інтервал $[0,1]$ в себе.

Нагадаємо, що відображення $g\colon [0,1] \to [0,1]$ інтервалу $[0,1]$ називається *унімодальним* (одновершинним), якщо воно зростає на деякому проміжку $[0,v]$ і спадає на проміжку $[v,1]$, причому на кожному з вказаних двох проміжків відображення g є бієкцією цього проміжку та $[0,1]$.

Топологічна спряженість неперервних відображень інтервалу в себе вивчалась також у [6], де описано класи топологічно спряжених відображень, напівгрупа ітерацій яких є скінченною групою.

Про відображення f, задане формулою (2), відомо, що воно топологічно спряжене з так званим логістичним відображенням $\widetilde{f}(x) = 4x(1-x)$. Відповідний гомеоморфізм [5, c. 14] має вигляд $\widetilde{h}(x) = \sin^2\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$. Вивчення логістичних відображень, тобто відображень вигляду $\widetilde{f}_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$, є відомою задачею теорії динамічних систем (див., наприклад, [2, 5]) та походить з математичного моделювання взаємодії двох популяцій.

У статті [7] розглянуто топологічну спряженість відображення f, заданого формулою (2), та відображення f_v інтервалу $[0,1]$ в себе, заданого формулами

$$f_v(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{v}, & \text{якщо} \quad x \le v, \\ \dfrac{1-x}{1-v}, & \text{якщо} \quad x > v, \end{cases}$$

зокрема доведено топологічну спряженість відображень f і f_v для кожного $v \in (0,1)$, а також вивчено питання про диференційовність спрягаючого гомеоморфізму h_v. За теоремою Лебега (див. [1] або [4, c. 15]) похідна спрягаючого гомеоморфізму h_v існує в кожній точці інтервалу $[0,1]$, за винятком, можливо, множини міри 0. Водночас у [7] доведено, що при кожному $v \neq 1/2$ похідна гомеоморфізму h_v дорівнює 0 в кожній точці, де вона скінченна.

Стаття складається з чотирьох пунктів. У п. 3 ми доведемо таку теорему.

Теорема 1. *Нехай відображення f, задане формулою* (2), *топологічно спряжене з кусково-лінійним унімодальним відображенням g, що відображає інтервал $[0,1]$ у себе, та h — гомеоморфізм, для якого справджується рівність* (1). *Якщо гомеоморфізм h є неперервно диференційовним на проміжку (α,β) для деяких $0 \le \alpha < \beta \le 1$, то він кусково-лінійний.*

Завдяки цій теоремі задача опису кусково-лінійних унімодальних відображень g інтервалу $[0,1]$ в себе, які спряжені з відображенням f вигляду (2), зводиться до опису тих відображень, що спряжені з f, і відповідний гомеоморфізм є кусково-лінійним.

Наступна лема є прикладом обмежень, які необхідно накласти на відображення g для того, щоб спрягаючий гомеоморфізм виявився кусково-лінійним.

Лема 1. *Нехай неперервне кусково-лінійне відображення $\widetilde{f}$ відображає інтервал $[0,1]$ в себе, причому $\widetilde{f}(0) = 0$, та зростаючий кусково-лінійний гомеоморфізм h інтервалу $[0,1]$ в себе задає топологічну спряженість відображень $\widetilde{f}$ та g. Тоді $g(0) = 0$ та $g'(0) = f'(0)$.*

У п. 4 ми доведемо дві теореми, з яких випливає, що лема 1 в деякому сенсі вичерпує перелік обмежень, які потрібно накласти на кусково-лінійне унімодальне відображення g для того, щоб воно було топологічно спряженим з відображенням f вигляду (2) з допомогою кусково-лінійного спрягаючого гомеоморфізму.

Теорема 2. *Для довільного $v \in (0,1)$ та довільного зростаючого кусково-лінійного відображення $g\colon [0,v] \to [0,1]$, яке задовольняє умови $g(0) = 0$, $g(v) = 1$, $g'(0) = 2$, існує єдине продовження $\widetilde{g}\colon [0,1] \to [0,1]$, яке топологічно спряжене з відображенням* (2) *з допомогою кусково-лінійного гомеоморфізму.*

Теорема 3. *Для довільного $v \in (0,1)$ та довільного спадного кусково-лінійного відображення $g\colon [v,1] \mapsto [0,1]$, яке задовольняє умови $g(v) = 1$, $g(1) = 0$, $(g^2)'(x_0) = 4$, де x_0 — нерухома точка відображення g, існує і до того ж єдине продовження $\widetilde{g}$ цього відображення на весь проміжок $[0,1]$, при якому отримане відображення $\widetilde{g}$ топологічно спряжене з відображенням f з допомогою кусково-лінійного гомеоморфізму.*

2. Допоміжні твердження. З того, що кусково-лінійне відображення f топологічно спряжене з відображенням g і для гомеоморфізму h виконується рівність (1), випливає ряд властивостей як відображення g, так і гомеоморфізму h. Ці властивості знадобляться нам для подальшого викладу.

Лема 2. *Гомеоморфізм h, який визначає топологічну спряженість відображень f вигляду* (2) *та кусково-лінійного унімодального відображення g, монотонно зростає, причому для нього виконуються рівності $h(0) = 0$, $h(1/2) = v$, $h(1) = 1$.*

Доведення. Гомеоморфізм h інтервалу $[0,1]$ в себе є неперервним оборотним відображенням. Тому це — неперервне відображення, для якого виконується одна з двох пар умов:

$$h(0) = 0, \qquad h(1) = 1$$

або

$$h(0) = 1, \qquad h(1) = 0.$$

Друга пара умов не може мати місця. Справді, розглянемо рівність (1) для $x = 0$, тобто $h(f(1/2)) = g(h(1/2))$, з якої видно, що $h(0)$ — нерухома точка відображення g, проте точка 1 не є нерухомою точкою відображення g.

Тепер розглянемо рівність (1) для $x = 1/2$, тобто $h(f(1/2)) = h(h(1/2))$, з якої бачимо, що $g(h(1/2)) = 1$. Це означає, що $h(1/2) = v$.

Лему 2 доведено.

***Зауваження* 1.** Рівняння (1) можна записати у вигляді

$$h(f_l(x)) = g_l(h(x)) \quad \text{при} \quad x \le 1/2,$$

$$h(f_r(x)) = g_l(h(x)) \quad \text{при} \quad x \ge 1/2,$$

де f_l, g_l — зростаючі, f_r, g_r — спадні гілки монотонності відображень f та g.

У даній роботі ми розглядаємо кусково-лінійне унімодальне відображення g, яке топологічно спряжене з відображенням f вигляду (2). Водночас питання опису всіх унімодальних, не обов'язково кусково-лінійних відображень g, які топологічно спряжені з f, залишається відкритим.

Наведемо деякі властивості кусково-лінійного унімодального відображення g, котрі випливають з того, що g топологічно спряжене з відображенням f вигляду (2).

Лема 3. *Відображення g має лише дві нерухомі точки, одна з яких — точка 0, а інша належить проміжку $(v,1)$.*

Доведення. Існування нерухомих точок, згаданих у лемі, є наслідком побудови відображення g (щодо нерухомої точки) та теореми про проміжне значення неперервної функції (щодо нерухомої точки на проміжку $(v,1)$).

Суть леми полягає в тому, що інших нерухомих точок відображення g не має.

Відсутність інших нерухомих точок на проміжку $(v,1)$ випливає з того, що кожна нерухома точка відображення g є точкою перетину графіка цього відображення з прямою $y = x$, втім на проміжку $(v, 1)$ відображення g спадає і, отже, не може мати більше ніж одну точку перетину з графіком зростаючої функції $y = x$.

Припустимо тепер, що відображення g має нерухому точку x_0 на проміжку $(0, v)$. Використовуючи рівність (1) для $x = h^{-1}(x_0)$, отримуємо, що $h^{-1}(x_0)$ — нерухома точка відображення f_l на проміжку $(0, 1/2)$, проте це відображення не має нерухомих точок на зазначеному проміжку.

Лему 3 доведено.

***Наслідок* 1.** *Траєкторія довільної точки $x \in (0, 1)$ при дії відображення g_l^{-1} прямує до* 0.

3. Доведення теореми 1. Спочатку сформулюємо допоміжні твердження.

Лема 4. *Якщо гомеоморфізм h кусково-неперервно диференційовний на деякому проміжку $(\alpha, \beta) \subset (0, 1)$ та визначає топологічну спряженість відображення f з кусково-лінійним відображенням g, то існують відкриті інтервали $A_1, \ldots, A_s$, які не перетинаються, причому $\bigcup\limits_{i=1}^{s} \overline{A}_i = [0, 1]$, і на кожному з цих інтервалів відображення h є неперервно диференційовним.*

Лема 5. *Якщо гомеоморфізм h кусково-неперервно диференційовний на деякому проміжку $(\alpha, \beta) \subset (0, 1)$ та $A_1, \ldots, A_s$ — відкриті інтервали, існування яких гарантується лемою* 4, *то для кожного i, $1 \leq i \leq s$, існує $k_i \in \mathbb{R}$ таке, що для кожного $x \in A_i$ відображення h диференційовне в точці $f(x)$, причому має місце рівність*

$$h'(f(x)) = k_i h'(x).$$

Лема 6. *Нехай x^* — періодична точка відображення f з періодом n, орбіта якої належить множині $\bigcup\limits_{i=1}^{s} A_i$, причому $h'(x^*) \neq 0$, $x_i = f^i(x^*)$, $1 \leq i < n$, — траєкторія точки x^*. Нехай $A_{c_0}, A_{c_1}, \ldots, A_{c_{n-1}}$ — множини з леми* 4, *яким належать точки траєкторії (тобто $x_i \in A_{c_i}$). Тоді виконується рівність $k_{c_0} \cdot k_{c_1} \cdot \ldots \cdot k_{c_{n-1}} = 1$, де числа $k_{c_0}, k_{c_1}, \ldots, k_{c_{n-1}}$ будуються за інтервалами $A_{c_0}, A_{c_1}, \ldots, A_{c_{n-1}}$ так, як у лемі* 5.

Лема 7. *Існує інтервал $[a, b] \subset [0, 1]$, на якому похідна h' відображення h є сталою.*

***Доведення теореми* 1.** За лемою 7 існує інтервал $[a, b] \subset [0, 1]$, на якому похідна відображення h є сталою. Позначимо $h'(x) = p_1$ для кожного $x \in [a, b]$. Не обмежуючи загальності можемо вважати, що $[a, b]$ повністю міститься в деякому інтервалі A_i, $1 \leq i \leq s$, де $\{A_i\}$ визначено в лемі 4. Згідно з лемою 5, існує $k_i \in \mathbb{R}$, залежне лише від i, таке, що для кожного $x \in A_i$ справджується рівність $h'(f(x)) = k_i f(x)$. Оскільки відображення f має кутові коефіцієнти 2 або -2 на кожному з інтервалів своєї лінійності, то $\{f(x) | \, x \in [a, b]\}$ має міру $\min\{2(b - a), 1\}$. Тепер множину $f([a, b])$ можна записати у вигляді об'єднання $f([a, b]) = \left(\bigcup\limits_{i=1}^{s} [A_i \cap f([a, b])] \right) \cup C$, де C — скінченна множина точок.

Теорему 1 доведено.

Лема 8. *Нехай гомеоморфізм h кусково-неперервно диференційовний на деякому проміжку $(\alpha, \beta) \subset (0, 1)$ та визначає топологічну спряженість відображення f вигляду* (2) *з кусково-лінійним унімодальним відображенням g. Тоді існують числа $\alpha = \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_t = \beta$ такі, що для кожного $p \in 1, \ldots, t - 1$ існує число k_p таке, що $h'(w) = k_p h'(x)$ для всіх $x \in (\alpha_p, \alpha_{p+1})$, де $w = f(x)$.*

Доведення. Для кожного $x \in (\alpha, \beta)$ диференційовність відображення h у точці x означає, що для кожної послідовності $\{x_n\}$ такої, що $\lim_{n \to \infty} x_n = x$, причому $x_n \neq x$ для всіх n, існує границя $\lim_{n \to \infty} \dfrac{h(x) - h(x_n)}{x - x_n}$. Розглянемо рівності

$$\begin{gathered} h(f(x)) = g(h(x)), \\ h(f(x_n)) = g(h(x_n)). \end{gathered} \tag{3}$$

Розіб'ємо при необхідності інтервал (α, β) на кілька підінтервалів (α_1, α_2), $(\alpha_2, \alpha_3), \ldots$ $\ldots, (\alpha_{t-1}, \alpha_t)$, де $\alpha_t = \beta$, таких, що для кожного $p \in 1, \ldots, t-1$ відображення g не має точок злама на проміжку $(h(\alpha_p), h(\alpha_{p+1}))$ та $1/2 \notin (\alpha_p, \alpha_{p+1})$. Для кожного $p \in 1, \ldots, t-1$ позначимо через a_p та b_p такі числа, що $g(x) = a_p x + b_p$ при $x \in (h(\alpha_p), h(\alpha_{p+1}))$. Нехай відображення f при цих же x визначається рівністю $f(x) = ax + b$, де $ax + b \equiv 2x$ або $ax + b \equiv -2x + 2$. Додатково припустимо, що число $x \in (\alpha, \beta)$, зафіксоване на початку доведення леми, не збігається з жодним із чисел $\alpha_2, \ldots, \alpha_{t-1}$, тобто $x \in (\alpha_p, \alpha_{p+1})$ при деякому $p = 1, \ldots, t-1$. Тоді для зафіксованої вище послідовності x_n існує таке $N \in \mathbb{N}$, що при всіх $n > N$ має місце включення $x_n \in (\alpha_p, \alpha_{p+1})$. Для цих n пару функціональних рівнянь (3) можна записати у вигляді пари комутативних діаграм

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & ax+b \\ {\scriptstyle h}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle h} \\ h(x) & \xrightarrow{g} & a_p h(x) + b_p \end{array} \quad \text{та} \quad \begin{array}{ccc} x_n & \xrightarrow{f} & ax_n+b \\ {\scriptstyle h}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle h} \\ h(x_n) & \xrightarrow{g} & a_p h(x_n) + b_p \end{array} . \tag{4}$$

Не обмежуючи загальності будемо вважати, що послідовність $\{x_n\}$ така, що для всіх n має місце включення $x_n \in (\alpha_p, \alpha_{p+1})$. Розглянемо довільне число $w = ax + b$ та послідовність $w_n = ax_n + b_n$. Оскільки $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, то $\lim_{n\to\infty} w_n = w$. Далі, оскільки $x_n \neq x$ для всіх n, то $w_n \neq w$ для всіх n. Доведемо, що існує границя $\lim_{n\to\infty} \dfrac{h(w) - h(w_n)}{w - w_n}$. З комутативності діаграм (4) випливає, що $h(w) = a_p h(x) + b_p$ та $h(w_n) = a_p h(x_n) + b_p$. Тоді

$$\frac{h(w) - h(w_n)}{w - w_n} = \frac{a_p(h(x) - h(x_n))}{a(x - x_n)},$$

що доводить лему, якщо взяти $k_p = \dfrac{a_p}{a}$.

***Доведення леми* 5.** Розіб'ємо інтервал (α, β) на підінтервали (α_1, α_2), $(\alpha_2, \alpha_3), \ldots$ $\ldots, (\alpha_{t-1}, \alpha_t)$, існування яких гарантується лемою 8. Для кожного p відображення h диференційовне на проміжку $f(\alpha_p, \alpha_{p+1})$, і можемо повторити на ньому міркування з доведення леми 8. Водночас, враховуючи, що відображення f є розтягуючим із коефіцієнтом 2, і застосовуючи наведені міркування скінченну кількість разів (яку позначимо k), отримуємо рівність $f^k(\alpha, \beta) = (0, 1)$. Крім того, на кожному кроці ми розбиваємо кожен з отриманих інтервалів на скінченну кількість підінтервалів, кожен з яких є одним з інтервалів шуканого набору $A_1, \ldots, A_s$. Скінченність кроків разом зі скінченністю інтервалів розбиття на кожному кроці доводять лему.

Для подальших міркувань нам потрібні два зауваження.

***Зауваження* 2.** Множина періодичних точок відображення f є щільною у множині $[0, 1]$.

Дійсно, графік n-ї ітерації f^n складається з 2^n відрізків, кожен з яких має кутовий коефіцієнт 2^n або -2^n і відображає деякий підінтервал інтервалу $[0, 1]$ у множину $[0, 1]$. Довжина кожного з інтервалів, які відображаються в $[0, 1]$ при дії відображення f^n, дорівнює $\dfrac{1}{2^n}$ і прямує до 0 при зростанні n. При цьому кожен такий інтервал містить нерухому точку відображення f^n, а отже, деяку періодичну точку відображення f.

***Зауваження* 3.** Серед чисел $k_1, \ldots, k_t$, визначених у лемі 5, жодне не дорівнює нулю.

Це випливає з того, що якщо для деякого i має місце рівність $k_i = 0$, то на множині $f(A_i)$ відображення h є сталим. Останнє суперечить тому, що h — гомеоморфізм.

Оскільки множина $[0,1]\backslash\mathcal{A}$ є скінченною, то з зауваження 2 випливає такий наслідок.

***Наслідок* 2.** *Множина періодичних точок відображення f, траєкторії яких містяться у множині $\mathcal{A} = \bigcup\limits_{i=1}^{s} A_i$, щільна в інтервалі $[0,1]$.*

Лема 9. *Нехай x^* — така періодична точка відображення f, що її траєкторія лежить у множині $\mathcal{A} = \bigcup\limits_{i=1}^{s} A_i$, причому $h'(x^*) \neq 0$. Тоді в деякому околі цієї точки похідна h' відображення h є сталою.*

Доведення. Нехай n — період точки x^*. Позначимо через x_i елементи траєкторії точки x^*, тобто $x_i = f^i(x^*)$, причому $x_0 = x^* = x_n$. Оскільки траєкторія точки x^* лежить в $\mathcal{A}$, то для кожного i похідна $h'(x_i)$ існує. З леми 5 та зауваження 3 випливає, що для кожного i виконується нерівність $h'(x_i) \neq 0$. Нехай $A_{c_0}, A_{c_1}, \ldots, A_{c_{n-1}}$ — множини з леми 4, яким належать точки траєкторії (тобто $x_i \in A_{c_i}$). Тоді з леми 5 маємо $h'(x^*) = k_{c_0} \cdot k_{c_1} \cdot \ldots \cdot k_{c_{n-1}} h'(x^*)$. З огляду на те, що $h'(x^*) \neq 0$, отримуємо

$$k_{c_0} \cdot k_{c_1} \cdot \ldots \cdot k_{c_{n-1}} = 1. \tag{5}$$

Оскільки множина A_{c_0} є відкритою та $x^* \in A_{c_0}$, то існує $\varepsilon > 0$ таке, що $(x^* - \varepsilon,\ x^* + \varepsilon) \subset A_{c_0}$. З того, що траєкторія точки x^* міститься в $\mathcal{A}$, випливає, що не обмежуючи загальності можемо вважати, що перші n точок траєкторії кожної точки інтервалу $(x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$ також належать $\mathcal{A}$, причому для кожної точки $\widetilde{x} \in (x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$ та для кожного $i, 1 \leq i \leq n$, має місце включення $f^i(\widetilde{x}) \in A_{c_i}$. Розглянемо відображення f^n на інтервалі $(x^* - \varepsilon,\ x^* + \varepsilon)$. Враховуючи, що це відображення є кусково-лінійним, не обмежуючи загальності, тобто зменшивши при необхідності додатне число ε, можемо вважати, що відображення f^n на інтервалі $(x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$ є лінійним, причому $f^n(x^*) = x^*$. Відображення f^n у згаданому околі точки x^* має вигляд $f^n(x) = 2^n(x - x^*)$ або $f^n(x) = -2^n(x - x^*)$.

Припустимо, що $f^n(x) = 2^n(x - x^*)$. Розглянемо довільну точку $\widetilde{x} \in (x^* - \varepsilon, x^*)$ та послідовність прообразів цієї точки $\widetilde{x}_i$, задану рівністю $\widetilde{x}_0 = x^*$ та $\widetilde{x}_{i+1} = (f^n)^{-1}(\widetilde{x}_i)$, де під $(f^n)^{-1}$ мається на увазі відображення, обернене до відображення f^n на інтервалі $(x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$. Оскільки похідна відображення f^n на зазначеному інтервалі більша за 1, то послідовність $\widetilde{x}_i$ зростає і прямує до x^*. З рівності (5) та леми 5 випливає, що для кожного $i \geq 0$ виконується рівність $h'(\widetilde{x}_i) = h'(\widetilde{x}_{i-1})$. Оскільки відображення h є неперервно диференційовним, то з того, що $\lim_{i\to\infty} \widetilde{x}_i = x^*$, випливає, що для кожного $i \geq 0$ має місце рівність $h'(\widetilde{x}_i) = h'(x^*)$, зокрема $h'(\widetilde{x}) = h'(x^*)$. З довільності точки $\widetilde{x} \in (x^* - \varepsilon, x^*)$ маємо, що на інтервалі $(x^* - \varepsilon, x^*)$ похідна відображення h є сталою.

Що стосується випадку, коли $f^n(x) = -2^n(x - x^*)$, то потрібно розглянути не прообрази, а образи довільної точки $\widetilde{x} \in (x^* - \varepsilon, x^*)$, після чого доведення буде аналогічним.

Лему 9 доведено.

4. Доведення теорем 2 та 3. Доведення теорем будуть конструктивними. В доведенні теореми 2 за зростаючою частиною кусково-лінійного відображення g однозначно будується такий кусково-лінійний гомеоморфізм h, який задовольняє функціональне рівняння (1). Після цього функціональне рівняння (1) дозволяє побудувати відображення g за відображенням f та знайденим гомеоморфізмом h. Теореми 2 та 3 також можна інтерпретувати так, що як відображення g_l, так і відображення g_r повністю визначає гомеоморфізм h. Проте з леми 1 видно, що відображення g_l не може бути довільним, зокрема $g_l'(0) = 2$.

Для кусково-лінійного гомеоморфізму h, яке задає топологічну спряженість f вигляду (2), та унімодального кусково-лінійного відображення g позначимо через k похідну цього гомеоморфізму в точці 0. Також позначимо через ε абсцису точки першого зламу відображення g, тобто: а) $h(x) = kx$ в деякому правому околі точки $x = 0$; б) $g(x) = 2x$ для всіх $x \in (0, \varepsilon)$ та в) $x = \varepsilon$ — точка зламу відображення g.

Нехай $A_1, \ldots, A_s$ — відкриті проміжки лінійності g на інтервалі $[0, v]$, $\bigcup\limits_{i=1}^{s} \overline{A}_i = [0, v]$.

Лема 10. *Для кожного* $x \in \left[0, \dfrac{\varepsilon}{k}\right]$ *виконується рівність* $h(x) = kx$, *причому точка* $\dfrac{\varepsilon}{k}$ *є точкою зламу відображення* h.

Доведення. Оскільки відображення h є кусково-лінійним, то для деякого достатньо малого δ рівність (1) набирає вигляду $h(2x) = 2 \cdot kx$ при $x \in [0, \delta]$. Величина числа δ визначається тим, що кусково-лінійне відображення h задається формулою $h(x) = kx$ для всіх $x \in (0, \delta)$, крім того, для всіх $x \in (0, k\delta)$ має місце рівність $g(x) = 2x$. Проте з формули для $h(x)$ при $x \in [0, \delta]$ випливає, що відображення h задається рівністю $h(x) = kx$ для всіх $x \in (0, 2\delta)$, що дозволяє розглянути функціональне рівняння $h(2x) = g(kx)$ при $x \in (0, 2\delta)$. При таких x множина значень $g(kx)$ буде інтервалом $[0, y_0]$, де $y_0 = h(4\delta) = g(2k\delta)$. Максимальна величина проміжку для x, при якому функціональне рівняння (1) має вигляд $h(2x) = 2 \cdot kx$, — це $\left[0, \dfrac{\varepsilon}{2k}\right]$. При подальшому збільшенні цього проміжку функціональне рівняння (1) набере вигляду $h(2x) = a_2 \cdot kx + b_2$, де $g(x) = a_2 x + b_2$ — формула для відображення g на наступному інтервалі лінійності після $(0, \varepsilon)$.

Лему 10 доведено.

Фактично лема 10 стверджує, що відображення g_l визначає довжину першого проміжку лінійності гомеоморфізму h залежно від кутового коефіцієнта k цього гомеоморфізму на його першому проміжку лінійності.

Лема 11. *Нехай для деякого* $v \in (0, 1)$ *та кусково-лінійних унімодальних відображень* g *та* $\widetilde{g}$ *інтервалу* $[0, 1]$ *в себе, котрі топологічно спряжені з відображенням* f, *виконуються рівності* $g(v) = \widetilde{g}(v) = 1$ *та* $g(0) = g(1) = \widetilde{g}(0) = \widetilde{g}(1) = 0$, *причому* $g(x) = \widetilde{g}(x)$ *при всіх* $x \in [0, v]$. *Тоді кутові коефіцієнти в нулі відповідних цим відображенням спрягаючих гомеоморфізмів збігаються.*

Ця лема є окремим випадком теореми 2. Лему 11 ми доведемо, обчисливши кутовий коефіцієнт в околі нуля для гомеоморфізму h, який визначає топологічну спряженість відображень f та g. При цьому будемо використовувати лише відображення g_l, але не g_r. Введемо ще одне позначення, а саме, позначимо через $G_l(\alpha, \beta) = (f_l^{-1}(\alpha),\, g_l^{-1}(\beta))$ та $G_r(\alpha, \beta) = (f_r^{-1}(\alpha),\, g_r^{-1}(\beta))$ відображення квадрата $[0, 1]^2$.

З того, що гомеоморфізм h монотонно зростає, випливає така лема.

Лема 12. *Нехай числа* $\alpha, \beta \in [0, 1]$ *такі, що* $h(\alpha) = \beta$. *Тоді графік відображення* h *інваріантний відносно* G_l *та* G_r, *тобто* $h(f_l^{-1}(\alpha)) = g_l^{-1}(\beta)$ *та* $h(f_r^{-1}(\alpha)) = g_r^{-1}(\beta)$.

***Доведення леми* 11.** Розглянемо точку $\alpha = 1$. За лемою 2 $h(1) = 1$. Розглянемо траєкторію точки $(1, 1)$ при дії відображення G_l. Тоді $G_l^n(1, 1) = (1/2^n,\, g_l^{-n}(1))$. За лемою 12 $h(1/2^n) = g_l^{-n}(1)$ для кожного n. За наслідком 1 послідовність $\{g_l^{-n}(1)\}$ монотонно спадає до 0. Знайдемо k — кутовий коефіцієнт гомеоморфізму h в околі 0. За лемою 10 $h(x) = kx$ при $x \in (0, \varepsilon/k)$, де ε — абсциса точки першого зламу кусково-лінійного відображення g. При достатньо великих n має місце включення $1/2^n \in (0, \varepsilon/k)$, яке означає, що послідовність $k_n = 2^n g_l^{-n}(1)$ стабілізується на деякому значенні, яке і дорівнює k.

Лему 11 доведено.

***Зауваження* 4.** Як і при доведенні леми 11, можна показати, що для кожних α, $\beta \in (0, 1)$ таких, що $h(\alpha) = \beta$, послідовність $k_n = \dfrac{2^n g_l^{-n}(\beta)}{\alpha}$ стабілізується незалежно від того, є гомеоморфізм h кусково-лінійним чи ні. Кускова лінійність гомеоморфізму h означає, що для кожної пари чисел $\alpha, \beta \in (0, 1)$ побудована послідовність стабілізується саме на значенні k, яке отримане в доведенні леми 11 і не залежить від α та β.

***Доведення теореми* 2.** Припустимо, що гомеоморфізм h задає топологічну спряженість відображень f та h. Використовуючи міркування з доведення леми 11, за відображенням g_l однозначно будуємо число k, яке є кутовим коефіцієнтом відображення h в околі 0. Тоді за лемою 10 гомеоморфізм h визначається рівністю $h(x) = kx$ для всіх $x \in \left[0, \dfrac{\varepsilon}{k}\right]$, де ε — абсциса точки першого зламу кусково-лінійного відображення g. Розглянемо настільки велике натуральне число n, щоб виконувалася нерівність $\dfrac{1}{2^n} < \dfrac{\varepsilon}{k}$. Для кожного $t \geq 0$ з рівняння (1) для $x \in \left[\dfrac{1}{2^{n-t+1}}, \dfrac{1}{2^{n-t}}\right]$ та значень гомеоморфізму h, визначених раніше на проміжку $\left[\dfrac{1}{2^{n-t+1}}, \dfrac{1}{2^{n-t}}\right]$, знаходимо значення h на проміжку $\left[\dfrac{1}{2^{n-t+1}}, \dfrac{1}{2^{n-t}}\right]$. При $t = n - 1$ рівняння (1) буде визначеним на множині $x \in \left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right]$, і це завершує процес знаходження відображення h на всьому відрізку $[0, 1]$. Після цього відображення g_r встановлюється з рівняння $h(f_r(x)) = g_r(h(x))$ при $x \in [1/2, 1]$ з допомогою рівності $g_r(x) = h(f_r(h^{-1}(x)))$.

Теорему 2 доведено.

Лема 1 встановлює обмеження на відображення g в околі точки 0 для того, щоб існував кусково-лінійний гомеоморфізм h, який визначає топологічну спряженість відображень f та g. Має місце аналог цієї леми для околу додатної нерухомої точки відображення g.

Лема 13. *Нехай x_0 — нерухома точка кусково-лінійного унімодального відображення g, яке спряжене з відображенням f вигляду* (2) *з допомогою кусково-лінійного відображення. Тоді існує $\varepsilon > 0$ таке, що для кожного $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \backslash \{x_0\}$ має місце рівність $(g^2)'(x_0) = 4$, де g^2, як і раніше, позначає другу ітерацію відображення g.*

Для відображення h, яке визначає топологічну спряженість відображень f та g, маємо $h(2/3) = x_0$, оскільки $2/3$ — нерухома точка відображення f. Нехай в лівому околі точки x_0 відображення g задається формулою $g_1(x) = a_1 x + b_1$, а в правому околі — формулою $g_2(x) = a_2 x + b_2$.

***Зауваження* 5.** У введених позначеннях довести лему 13 — це те саме, що довести, що $a_1 a_2 = 4$.

Дійсно, оскільки відображення g спадає на проміжку $[v, 1]$, то для досить малого $\varepsilon > 0$ виконуються включення $g(x_0, \, x_0 + \varepsilon) \subset (v, x_0)$ та $g(x_0 - \varepsilon, \, x_0) \subset (x_0, 1)$.

Тоді в лівому околі $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ відображення g^2 задається рівністю $g^2(x) = g_2(g_1(x))$, а в правому околі $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ — рівністю $g^2(x) = g_1(g_2(x))$. Проте і в першому, і в другому випадку відображення g^2 буде лінійним у відповідному околі і матиме кутовий коефіцієнт $a_1 a_2$.

***Доведення леми* 13.** Нехай в лівому околі точки $2/3$ відображення h задається формулою $h_1(x) = a_3 x + b_3$, а в правому околі — формулою $h_2(x) = a_4 x + b_4$.

Для достатньо малого ε візьмемо довільне число $\beta \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ та розглянемо послідовність $G_r^n(\alpha, \beta)$, де $\beta = h(\alpha)$. Ця послідовність збігається до точки $(2/3, x_0)$. Перші три елементи зазначеної послідовності мають вигляд $(\alpha, \beta) \to (f_r^{-1}(\alpha), g_r^{-1}(\beta)) \to (f_r^{-2}(\alpha), g_r^{-2}(\beta))$, тобто $(\alpha, \beta) \to (f_r^{-1}(\alpha), g_1^{-1}(\beta)) \to (f_r^{-2}(\alpha), g_2^{-2}(\beta))$, бо $\beta > x_0$ та відображення g спадає в околі точки x_0.

Відображення $g_r^{-1}(\beta)$ та $g_r^{-2}(\beta)$ знайдемо як

$$g_r^{-1}(\beta) = \frac{\beta - b_1}{a_1} \qquad \text{та} \qquad g_r^{-2}(\beta) = \frac{(\beta - b_1)a_1^{-1} - b_2}{a_2} = \frac{\beta - b_1 - a_1 b_2}{a_1 a_2}.$$

Крім того, $f_r^{-1}(\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$ та $f_r^{-2}(\alpha) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\alpha}{4}$. Також мають місце рівності

$$\beta = a_4\alpha + b_4,$$

$$g_r^{-1}(\beta) = a_3 f_r^{-1}(\alpha) + b_3,$$

$$g_r^{-2}(\beta) = a_4 f_r^{-2}(\alpha) + b_4.$$

Підставляючи перші дві з цих рівностей у третю, отримуємо

$$\frac{(a_4\alpha + b_4) - b_1 - a_1 b_2}{a_1 a_2} = a_4\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{4}\right) + b_4. \tag{6}$$

Оскільки вибір числа β у відповідному околі точки x_0 є довільним, з неперервності відображення h випливає, що множина значень α таких, що $h(\alpha) = \beta$, де β вибрано з околу точки x_0, є деяким околом точки $2/3$. Тому рівність (6) є тотожністю у відповідному околі точки α. Тепер, прирівнюючи коефіцієнти при α, маємо $a_1 a_2 = 4$, що і потрібно було довести.

Лему 13 доведено.

***Доведення теореми* 3.** Нехай x_0 — додатна нерухома точка відображення g та відображення $\widetilde{g}$, h — кусково-лінійний гомеоморфізм, який визначає спряженість відображень f та g. Оскільки за лемою 2 $h(2/3) = x_0$, то існує $\varepsilon > 0$ таке, що $h(x) = k(x - 2/3) + x_0$ для всіх $x \in$ $\in (2/3,\ 2/3 + \varepsilon)$. Розглянемо траєкторію точки $(1, 1)$ під дією відображення G_l. Позначимо через (x_n, y_n) n-ту ітерацію вказаної точки, тобто $G_l^n(1, 1) = (x_n, y_n)$. З леми 12 для кожної точки цієї траєкторії отримуємо

$$h(x_n) = y_n. \tag{7}$$

Послідовність x_n може бути задана рівністю $x_n = f_r^{-1}(x_{n-1})$ і прямує до точки $2/3$, причому для кожного $k \in \mathbb{N}$ мають місце включення $(f_r^{-1})^{2k}(1) \in (1/2, 2/3)$ та $(f_r^{-1})^{2k+1}(1) \in$ $\in (2/3, 1)$ і, крім того, $\lim_{i\to\infty} x_n = 2/3$. Враховуючи, що для досить великих непарних n виконується включення $x_n \in (2/3, 2/3 + \varepsilon)$, рівність (7) можна записати як $y_n = k(x_n - 2/3) + x_0$, звідки

$$k = \frac{y_n - x_0}{x_n - 2/3}. \tag{8}$$

Крім того, з огляду на лему 13 без обмеження загальності можемо вважати, що при цих досить великих n для всіх y_n відображення $g^2(x)$ задається рівністю

$$g^2(x) = 4(x - x_0) + x_0. \tag{9}$$

Як і при доведенні леми 13, можемо показати, що якщо $x_n \in (2/3,\ 2/3+\varepsilon)$, то $\dfrac{y_n - x_0}{x_n - 2/3} = \dfrac{y_{n+2} - x_0}{x_{n+2} - 2/3}$.

З рівняння (9) маємо $y_{n+2} = \dfrac{y_n + 3x_0}{4}$. Також x_{n+2} можна знайти з формули $x_{n+2} = (f_r^{-1})^2(x_n)$, тобто $x_{n+2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x_n}{4}$. Підставляючи отримані вирази у формулу $\dfrac{y_{n+2} - x_0}{x_{n+2} - 2/3}$, після спрощення маємо $\dfrac{y_{n+2} - x_0}{x_{n+2} - 2/3} = \dfrac{y_n - x_0}{x_n - 2/3}$. Таким чином, $h(2/3) = x_0$ та гомеоморфізм h має кутовий коефіцієнт k, що визначається формулою (8) для кожного $x \in (2/3, 2/3+\varepsilon)$.

Нехай $\mathcal{A}_1 = (2/3, 2/3+\varepsilon)$ та розглянемо послідовність множин $\mathcal{A}_{i+1} = f(\mathcal{A}_i)$. Очевидно, що для деякого скінченного $t \in \mathbb{N}$ справджується рівність $f^t(\mathcal{A}_1) = [0,1]$. Для кожного i та кожного $x \in \mathcal{A}_i$ рівняння (1) дозволяє визначити значення гомеоморфізму h на множині $\mathcal{A}_{i+1}$ за припущення, що цей гомеоморфізм вже визначено на множині $\mathcal{A}_i$. Послідовне застосування цього рівняння дозволяє визначити значення гомеоморфізму h на всьому інтервалі $[0,1]$. Фактично ми довели, що відображення g своїми значеннями на проміжку $[v,1]$ повністю визначає значення гомеоморфізму h на інтервалі $[0,1]$, а цей гомеоморфізм, в свою чергу, визначає відображення g на всьому інтервалі $[0,1]$.

Теорему 3 доведено.

Автори висловлюють подяку В. В. Сергейчуку за цінні зауваження при підготовці цієї роботи.

Література

1. *Лебег Х.* Интегрирование и отыскание примитивных функций. – М.; Л., 1934.
2. *Мун Ф.* Хаотические колебания. – М.: Мир, 1990. – 312 с.
3. *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики. – М.: Наука, 1971. – Т. 1.
4. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. – М.: Мир, 1979. – 592 с.
5. *Шарковский А. Н., Коляда с. Ф., Сивак А. Г., Федоренко В. В.* Введение в теорию функциональных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1989. – 216 с.
6. *Fedorenko V., Kyrychenko V., Plakhotnyk M.* Exponent matrices and topological equivalence of maps // Algebra and Discrete Math. – 2007. – № 4. – P. 45 – 58.
7. *Skufca J. D., Bolt E. M.* A concept of homeomorphic defect for defining mostly conjugate dynamical systems // Chaos. – 2008. – № 03118. – P. 1 – 18.

Одержано 14.01.15,
після доопрацювання — 16.03.15