УДК 514.752.433

І. В. Потапенко (Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова)

ЗВ'ЯЗОК МІЖ НОРМОВАНИМИ ТЕНЗОРАМИ ДВОХ РЕГУЛЯРНИХ СІТОК НА ПОВЕРХНІ В ЕВКЛІДОВОМУ ПРОСТОРІ E_3

We establish the relationship between the normalized tensors of two regular networks on the surfaces in the Euclidean space E_3.

Установлена зависимость между нормированными тензорами двух регулярных сетей на поверхности в евклидовом пространстве E_3.

Основи теорії сіток у тензорній формі було введено Я. С. Дубновим та викладено в монографії В. Ф. Кагана [1, с. 366 – 370]. Оскільки на будь-якій регулярній поверхні можна ввести довільну кількість різноманітних за своїми властивостями сіток, то виникає потреба зв'язати нормовані тензори двох довільно взятих сіток. Саме цьому питанню і присвячено дану статтю. Окремо виділено, як наслідок, зв'язок між нормованими тензорами двох регулярних сіток на поверхні зі сталим сітковим кутом між координатними лініями.

Наведемо основні поняття, які будемо використовувати в даній роботі. Під однопараметричною сім'єю кривих на поверхні, що віднесена до координат x^1, x^2, будемо називати сукупність кривих, які задаються рівнянням

$$f(x^1, x^2, c) = 0, \tag{1}$$

де параметр c набуває довільних значень у деякому інтервалі.

Означення 1. *Однопараметрична сім'я ліній на поверхні називається регулярною в деякій області, якщо в цій області через кожну точку поверхні проходить одна і тільки одна лінія сім'ї.*

Віднесемо кожну криву регулярної однопараметричної сім'ї до натурального параметра s, для довільної точки (x^1, x^2) похідні $\frac{dx^1}{ds}$, $\frac{dx^2}{ds}$ по кривій, що проходить через цю точку, є однозначними функціями від x^1, x^2:

$$\frac{dx^1}{ds} = \lambda^1(x^1, x^2), \qquad \frac{dx^2}{ds} = \lambda^2(x^1, x^2). \tag{2}$$

Рівняння (2) називаються диференціальними рівняннями регулярної сім'ї ліній на поверхні. Зауважимо, що функції λ^1, λ^2 є компонентами контраваріантного тензора типу (0, 1) — одиничного вектора, дотичного до кривої сім'ї, що проходить через точку (x^1, x^2), оскільки вони задовольняють в області регулярності співвідношення

$$g_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta = 1. \tag{3}$$

Таким чином, регулярна однопараметрична сім'я ліній на поверхні визначається полем одиничного вектора (λ^1, λ^2) або тензором типу (0, 1). Позначаючи через $\bar{l}(\lambda^1, \lambda^2)$ поле одиничного вектора сім'ї ліній у регулярній області, будемо говорити, що воно повністю визначає регулярну однопараметричну сім'ю кривих на поверхні через диференціальне рівняння (2).

Означення 2. *Дві різні однопараметричні сім'ї кривих, що є регулярними у спільній області, утворюють на поверхні регулярну сітку, якщо*: 1) *через кожну точку області сітки проходять дві криві, що належать різним сім'ям*; 2) *лінії з різних сімей у жодній точці не мають спільної дотичної*.

Зауважимо, що В. Ф. Каган [1] використовував термін „регулярна область сітки".

Нехай $\bar{l}(\lambda^1, \lambda^2)$ та $\bar{m}(\mu^1, \mu^2)$ — напрямні вектори однопараметричних сімей, що утворюють сітку. Диференціальні рівняння двох утворюючих сімей будуть мати вигляд

$$\begin{gathered} \frac{dx^1}{ds^1} = \lambda^1(x^1, x^2), \qquad \frac{dx^2}{ds^1} = \lambda^2(x^1, x^2), \\ \frac{dx^1}{ds^2} = \mu^1(x^1, x^2), \qquad \frac{dx^2}{ds^2} = \mu^2(x^1, x^2), \end{gathered} \tag{4}$$

де ds^1, ds^2 — довжини дуг першої та другої складових сімей. Виключаючи ds^1, ds^2 з (4), маємо

$$\left(\frac{dx^1}{dx^2} - \frac{\lambda^1}{\lambda^2} \right) \left(\frac{dx^1}{dx^2} - \frac{\mu^1}{\mu^2} \right) = 0. \tag{5}$$

Рівняння (5) запишемо у вигляді

$$\lambda^2\mu^2 (dx^1)^2 - (\lambda^1\mu^2 + \lambda^2\mu^1) dx^1 dx^2 + \lambda^1\mu^1 (dx^2)^2 = 0. \tag{6}$$

Оскільки рівняння (6) визначає обидві сім'ї сітки, то його можна розглядати як диференціальне рівняння сітки.

Запишемо рівняння (6) у тензорному вигляді. Для цього розглянемо контраваріантний тензор другої валентності:

$$\lambda^i \mu^j. \tag{7}$$

Виконуючи симетрування (7) з діленням на інваріантний скаляр $\frac{1}{2}\sin\omega$, де $\omega(x^1, x^2)$ — сітковий кут, що змінюється в межах від 0 до π, отримуємо контраваріантний тензор з матрицею компонент:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{2\lambda^1\mu^1}{\sin\omega} & \dfrac{\lambda^1\mu^2 + \lambda^2\mu^1}{\sin\omega} \\ \dfrac{\lambda^1\mu^2 + \lambda^2\mu^1}{\sin\omega} & \dfrac{2\lambda^2\mu^2}{\sin\omega} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Оскільки напрямні вектори однопараметричних сімей $\overline{l}(\lambda^1,\lambda^2)$ та $\overline{m}(\mu^1,\mu^2)$ — орти, то мають місце співвідношення

$$g_{\alpha\beta}\lambda^{\alpha}\mu^{\beta} = \cos\omega, \tag{9}$$

$$\lambda^1\mu^2 - \lambda^2\mu^1 = \frac{\sin\omega}{\sqrt{g}}. \tag{10}$$

Використовуючи дискримінантний тензор поверхні c^{ij}, (10) записуємо у вигляді

$$\lambda^i\mu^j - \lambda^j\mu^i = c^{ij}\sin\omega. \tag{11}$$

Дискримінант матриці (8) дорівнює $-\frac{1}{g}$.

Для регулярної сітки зведені мінори матриці (8) утворюють симетричний тензор другої валентності $\overset{\circ}{\phi}_{ij}$ з компонентами

$$\begin{pmatrix} -\frac{2\lambda^2\mu^2 g}{\sin\omega} & \frac{(\lambda^1\mu^2+\lambda^2\mu^1)g}{\sin\omega} \\ \frac{(\lambda^1\mu^2+\lambda^2\mu^1)g}{\sin\omega} & -\frac{2\lambda^1\mu^1 g}{\sin\omega} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

В індексному позначенні матимемо

$$\overset{\circ}{\phi}_{ij} = -\frac{c_{i\alpha}c_{j\beta}(\lambda^{\alpha}\mu^{\beta}+\lambda^{\beta}\mu^{\alpha})}{\sin\omega}. \tag{13}$$

Тензор (13), уведений Я. С. Дубновим [1, с. 341], називається нормованим тензором сітки, відіграє ключову роль в теорії регулярних сіток і є основним об'єктом дослідження в даній роботі.

Використовуючи тензор сітки (13), диференціальне рівняння сітки (6) записуємо у вигляді

$$\overset{\circ}{\phi}_{ij}\,dx^i dx^j = 0. \tag{14}$$

Основним результатом цієї статті є така теорема.

Теорема. *Нехай* $\overline{l}_1(\lambda^1,\lambda^2)$, $\overline{m}_1(\mu^1,\mu^2)$ *та* $\overline{l}_2(\tilde{\lambda}^1,\tilde{\lambda}^2)$, $\overline{m}_2(\tilde{\mu}^1,\tilde{\mu}^2)$ — *напрямні вектори однопараметричних сімей, що утворюють дві регулярні сітки на заданій поверхні з сітковими кутами* $\omega_1(x^1,x^2)$, $\omega_2(x^1,x^2)$, *репери* $(\overline{l}_1,\overline{m}_1)$, $(\overline{l}_2,\overline{m}_2)$ *орієнтовані в додатному напрямі та* $\overset{\circ}{\phi}_{ij}$, $\overset{\circ}{\psi}_{ij}$ — *нормовані тензори цих сіток відповідно. Тоді дані тензори зв'язані між собою співвідношенням*

$$\begin{pmatrix} \overset{\circ}{\psi}_{11} \\ \overset{\circ}{\psi}_{12} \\ \overset{\circ}{\psi}_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\sin\omega_1}{\sin\omega_2}\left(\begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta & -\sin(\alpha+\beta) & \sin\alpha\sin\beta \\ \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) & -\frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) \\ \sin\alpha\sin\beta & \sin(\alpha+\beta) & \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overset{\circ}{\varphi}_{11} \\ \overset{\circ}{\varphi}_{12} \\ \overset{\circ}{\varphi}_{22} \end{pmatrix} + \sqrt{g}\sin(\beta-\alpha)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \tag{15}$$

де $\alpha(x^1, x^2)$, $\beta(x^1, x^2)$ — *кути між векторами* $\overline{l}_1$, $\overline{l}_2$ та $\overline{m}_1$, $\overline{m}_2$ *відповідно, що відкладаються в додатному напрямі.*

Доведення. Позначимо через $\alpha(x^1, x^2)$ кут між векторами $\overline{l}_1$, $\overline{l}_2$, тоді кут між векторами $\overline{m}_1$, $\overline{m}_2$ буде дорівнювати $\alpha(x^1, x^2) + \Delta\omega(x^1, x^2) = \beta(x^1, x^2)$, де $\Delta\omega(x^1, x^2) = \omega_2(x^1, x^2) - \omega_1(x^1, x^2)$ — приріст сіткового кута при переході від першої регулярної сітки до другої з сітковими кутами $\omega_1(x^1, x^2)$, $\omega_2(x^1, x^2)$ відповідно, всі кути відкладаються в додатному напрямі.

Оскільки вектори-орти $\overline{l}_2$, $\overline{m}_2$ є результатами повороту одиничних векторів $\overline{l}_1$, $\overline{m}_1$ у кожній точці дотичної площини на кути $\alpha(x^1, x^2)$ та $\beta(x^1, x^2)$ відповідно, то мають місце такі формули зв'язку між координатами цих векторів [1, с. 345]:

$$\tilde{\lambda}^1 = \lambda^1\cos\alpha - \lambda^2\sin\alpha, \qquad \tilde{\lambda}^2 = \lambda^1\sin\alpha + \lambda^2\cos\alpha,$$

$$\tilde{\mu}^1 = \mu^1\cos\beta - \mu^2\sin\beta, \qquad \tilde{\mu}^2 = \mu^1\sin\beta + \mu^2\cos\beta.$$

Використовуючи формули [1, с. 341]

$$\lambda^1\mu^1 = -\frac{\sin\omega_1}{2g}\overset{\circ}{\varphi}_{22}, \qquad \lambda^1\mu^2 = \frac{\sin\omega_1}{2g}\left(\overset{\circ}{\varphi}_{12} + \sqrt{g}\right),$$

$$\lambda^2\mu^1 = \frac{\sin\omega_1}{2g}\left(\overset{\circ}{\varphi}_{12} - \sqrt{g}\right), \qquad \lambda^2\mu^2 = -\frac{\sin\omega_1}{2g}\overset{\circ}{\varphi}_{11},$$

маємо

$$\overset{\circ}{\psi}_{11} = -\frac{2g\tilde{\lambda}^2\tilde{\mu}^2}{\sin\omega_2} = -\frac{2g}{\sin\omega_2}(\lambda^1\sin\alpha + \lambda^2\cos\alpha)(\mu^1\sin\beta + \mu^2\cos\beta) =$$

$$= -\frac{2g}{\sin\omega_2}(\lambda^1\mu^1\sin\alpha\sin\beta + \lambda^1\mu^2\sin\alpha\cos\beta +$$

$$+\lambda^2\mu^1\cos\alpha\sin\beta + \lambda^2\mu^2\cos\alpha\cos\beta) =$$

$$= -\frac{\sin\omega_1}{\sin\omega_2}\left(-\overset{\circ}{\varphi}_{22}\sin\alpha\sin\beta + \left(\overset{\circ}{\varphi}_{12} + \sqrt{g}\right)\sin\alpha\cos\beta +\right.$$

$$\left.+\left(\overset{\circ}{\varphi}_{12} - \sqrt{g}\right)\cos\alpha\sin\beta - \overset{\circ}{\varphi}_{11}\cos\alpha\cos\beta\right) =$$

$$= \frac{\sin\omega_1}{\sin\omega_2}\left(\overset{\circ}{\varphi}_{11}\cos\alpha\cos\beta - \overset{\circ}{\varphi}_{12}\sin(\alpha+\beta)\right) +$$

$$+\overset{\circ}{\varphi}_{22}\sin\alpha\sin\beta + \sqrt{g}\sin(\beta-\alpha), \tag{16}$$

$$\overset{\circ}{\psi}_{12} = \frac{g(\tilde\lambda^1\tilde\mu^2 + \tilde\lambda^2\tilde\mu^1)}{\sin\omega_2} = \frac{g}{\sin\omega_2}((\lambda^1\cos\alpha - \lambda^2\sin\alpha)(\mu^1\sin\beta + \mu^2\cos\beta) +$$

$$+(\lambda^1\sin\alpha + \lambda^2\cos\alpha)(\mu^1\cos\beta - \mu^2\sin\beta)) =$$

$$= \frac{g}{\sin\omega_2}(\lambda^1\mu^1\cos\alpha\sin\beta + \lambda^1\mu^2\cos\alpha\cos\beta - \lambda^2\mu^1\sin\alpha\sin\beta -$$

$$-\lambda^2\mu^2\sin\alpha\cos\beta + \lambda^1\mu^1\sin\alpha\cos\beta - \lambda^1\mu^2\sin\alpha\sin\beta +$$

$$+\lambda^2\mu^1\cos\alpha\cos\beta - \lambda^2\mu^2\cos\alpha\sin\beta) =$$

$$= \frac{g}{\sin\omega_2}(\lambda^1\mu^1\sin(\alpha+\beta) - \lambda^2\mu^2\sin(\alpha+\beta) + (\lambda^1\mu^2 + \lambda^2\mu^1)\cos(\alpha+\beta)) =$$

$$= \frac{\sin\omega_1}{\sin\omega_2}\left(\overset{\circ}{\varphi}_{11}\frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) + \overset{\circ}{\varphi}_{12}\cos(\alpha+\beta) - \overset{\circ}{\varphi}_{22}\frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)\right), \tag{17}$$

$$\overset{\circ}{\psi}_{22} = -\frac{2g\tilde\lambda^1\tilde\mu^1}{\sin\omega_2} = -\frac{2g}{\sin\omega_2}(\lambda^1\cos\alpha - \lambda^2\sin\alpha)(\mu^1\cos\beta - \mu^2\sin\beta) =$$

$$= -\frac{2g}{\sin\omega_2}(\lambda^1\mu^1\cos\alpha\cos\beta - \lambda^1\mu^2\cos\alpha\sin\beta -$$

$$-\lambda^2\mu^1\sin\alpha\cos\beta + \lambda^2\mu^2\sin\alpha\sin\beta) =$$

$$= -\frac{\sin\omega_1}{\sin\omega_2}\left(-\overset{\circ}{\varphi}_{22}\cos\alpha\cos\beta - \left(\overset{\circ}{\varphi}_{12} + \sqrt{g}\right)\cos\alpha\sin\beta -\right.$$

$$-\left(\overset{\circ}{\varphi}_{12}-\sqrt{g}\right)\sin\alpha\cos\beta-\overset{\circ}{\varphi}_{11}\sin\alpha\sin\beta\Bigg)=$$

$$=\frac{\sin\omega_1}{\sin\omega_2}\left(\overset{\circ}{\varphi}_{11}\sin\alpha\sin\beta+\overset{\circ}{\varphi}_{12}\sin(\alpha+\beta)+\overset{\circ}{\varphi}_{22}\cos\alpha\cos\beta+\sqrt{g}\sin(\beta-\alpha)\right). \qquad (18)$$

З (16) – (18) випливає (15).

Теорему доведено.

***Наслідок* 1.** *Нехай* $\bar{l}_1(\lambda^1,\lambda^2)$, $\bar{m}_1(\mu^1,\mu^2)$ *та* $\bar{l}_2(\tilde{\lambda}^1,\tilde{\lambda}^2)$, $\bar{m}_2(\tilde{\mu}^1,\tilde{\mu}^2)$ *— напрямні вектори однопараметричних сімей, що утворюють дві регулярні сітки на заданій поверхні з однаковими сітковими кутами* $\omega_1(x^1,x^2)=\omega_2(x^1,x^2)$, *репери* $(\bar{l}_1,\bar{m}_1)$, $(\bar{l}_2,\bar{m}_2)$ *орієнтовані в додатному напрямі та* $\overset{\circ}{\varphi}_{ij}$, $\overset{\circ}{\psi}_{ij}$ *— нормовані тензори цих сіток відповідно. Тоді дані тензори зв'язані між собою співвідношенням*

$$\begin{pmatrix}\overset{\circ}{\psi}_{11}\\ \overset{\circ}{\psi}_{12}\\ \overset{\circ}{\psi}_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos^2\alpha & -\sin(2\alpha) & \sin^2\alpha\\ \frac{1}{2}\sin(2\alpha) & \cos(2\alpha) & -\frac{1}{2}\sin(2\alpha)\\ \sin^2\alpha & \sin(2\alpha) & \cos^2\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overset{\circ}{\varphi}_{11}\\ \overset{\circ}{\varphi}_{12}\\ \overset{\circ}{\varphi}_{22}\end{pmatrix}, \qquad (19)$$

де $\alpha(x^1,x^2)$ *— кут між векторами* $\bar{l}_1$, $\bar{l}_2$.

Доведення випливає з (15) та умови $\omega_1(x^1,x^2)=\omega_2(x^1,x^2)$, $\Delta\omega=\beta(x^1,x^2)-\alpha(x^1,x^2)=$ $=0$. Тобто $\beta(x^1,x^2)=\alpha(x^1,x^2)$.

Наслідок 1 доведено.

Як приклад, що ілюструє останній наслідок, розглянемо дві відомі регулярні ортогональні сітки ліній на поверхні, а саме сітку ліній кривини [1, с. 363, 364] та LGT-сітку [2].

Лінії, вздовж яких геодезичний скрут досягає екстремального значення, було введено в [3, с. 353, 354]. Вони завжди існують в будь-якій не омбілічній точці поверхні. Дотичні вектори цих ліній утворюють кути $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$ з відповідними лініями кривини в даній точці поверхні та ортогональну сітку, яку будемо називати, використовуючи термінологію [2], LGT-сіткою.

***Наслідок* 2.** *Нехай* $\bar{l}_1(\lambda^1,\lambda^2)$, $\bar{m}_1(\mu^1,\mu^2)$ *та* $\bar{l}_2(\tilde{\lambda}^1,\tilde{\lambda}^2)$, $\bar{m}_2(\tilde{\mu}^1,\tilde{\mu}^2)$ *— напрямні вектори однопараметричних сімей, що утворюють дві регулярні ортогональні сітки на заданій поверхні, а саме сітку ліній кривини і LGT-сітку, репери* $(\bar{l}_1,\bar{m}_1)$, $(\bar{l}_2,\bar{m}_2)$ *орієнтовані в додатному напрямі та* $\overset{\circ}{\varphi}_{ij}$, $\overset{\circ}{\psi}_{ij}$ *— нормовані тензори цих сіток відповідно. Тоді дані тензори зв'язані між собою співвідношенням*

$$\begin{pmatrix} \overset{\circ}{\psi}_{11} \\ \overset{\circ}{\psi}_{12} \\ \overset{\circ}{\psi}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\varphi}_{11} \\ \overset{\circ}{\varphi}_{12} \\ \overset{\circ}{\varphi}_{22} \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Доведення. Для доведення (20) скористаємося співвідношенням (19), підставляючи замість $\alpha(x^1, x^2)$ значення $\frac{\pi}{4}$, оскільки при переході від сітки ліній кривини до LGT-сітки напрям вектора $\overline{l}_2(\tilde{\lambda}^1, \tilde{\lambda}^2)$ можна вибрати так, щоб кут $\alpha(x^1, x^2)$ був гострим, а отже, згідно з [3, с. 353, 354], саме $\frac{\pi}{4}$.

Наслідок 2 доведено.

Різноманіття сіток на поверхні вражає. Найбільш відомі чебишовська, геодезична, асимптотична, сітка ліній кривини, ізотермічна та інші. Саме наявність на поверхні певного типу сітки характеризує тип самої поверхні.

Отриманий у даній роботі результат дозволяє за допомогою формул (15) переходити від однієї регулярної сітки поверхні до іншої через нормований тензор сітки (13), використовуючи диференціальне рівняння (14).

Література

1. *Каган В. Ф.* Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Часть вторая. – М.; Л.: ОГИЗ, 1948. – 408 с.
2. *Бескоровайная Л. Л., Вашпанова Т. Ю.* LGT-сеть и ее свойства // Вестн. Киев. нац. ун-та им. Т. Шевченко. Сер. физ.-мат. науки. – 2010. – Вып. 2. – С. 7 – 12.
3. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. – М.: Наука, 1988. – 509 с.

Одержано 01.04.15