

ОБ УСЛОВИЯХ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ ПОДМНОГООБРАЗИЯ F^n *

We consider a submanifold F^n with n principal directions in the space E^{n+p} , where $p \geq n - 1$.

Розглядається підмноговид F^n з n головними напрямками у просторі E^{n+p} , де $p \geq n - 1$.

Вопросы принадлежности поверхности F^2 с вырожденным эллипсом нормальной кривизны рассматривались в [1, с. 146; 5]. Принадлежность поверхности F^2 из E^n с невырожденным эллипсом нормальной кривизны к пространству E^4 в полной мере рассмотрена в [3]. Условия принадлежности поверхности F^2 сфере S^4 с невырожденным эллипсом нормальной кривизны изучены в [4].

В данной работе рассматриваются подмногообразия F^n с n главными направлениями в пространстве E^{n+p} , $p \geq n - 1$, и их принадлежность пространству E^{2n-1} . Основным результатом работы является следующая теорема

Теорема 1. Пусть в каждой точке P подмногообразия $F^n \subset E^{n+p}$, $p \geq n - 1$, с n главными направлениями $(n - 1)$ -мерное подпространство N^{n-1} , содержащее индикатрису нормальной кривизны в виде невырожденного $(n - 1)$ -мерного симплекса, проходит через точку $P \in F^n$ и существует такая координатная сеть, что координатные линии касаются главных направлений. Пусть никакие $n - 1$ из n главных векторов нормальной кривизны, отложенные от точки P , не находятся в $(n - 2)$ -мерном подпространстве N^{n-2} . Тогда подмногообразие F^n лежит в некотором подпространстве E^{2n-1} .

Доказательство теоремы будет приведено ниже.

Лемма 1. Если многообразие $F^n \subset E^{n+p}$ имеет n главных направлений, то его индикатриса нормальной кривизны является $(n - 1)$ -симплексом либо вырождается в подсимплекс.

Рассмотрим индикатрису нормальной кривизны поверхности F^n с радиусом-вектором $r = r(u^1, \dots, u^n)$ в точке x подмногообразия. По определению это подмножество в нормальном пространстве N^p , состоящее из концов векторов нормальной кривизны, отложенных от точки x и взятых для всех касательных направлений. Запишем вектор нормальной кривизны для направления τ , которое определяется дифференциалами $(du^1, du^2, \dots, du^n)$. Первая квадратичная форма поверхности $ds^2 = g_{ij} du^i du^j$. Пусть $II^k = L_{ij}^k du^i du^j$, $k = 1, \dots, p$ — вторая квадратичная форма поверхности. Поскольку единичная сфера в касательном пространстве $(n - 1)$ -мерна, ее образ в нормальном пространстве в общем случае будет $(n - 1)$ -мерным подмногообразием в нормальном подпространстве размерности $\frac{n(n-1)}{2}$ [2].

Пусть X^1, \dots, X^p — координаты в нормальном пространстве N^p относительно базиса n_1, \dots, n_p . Для любого единичного касательного направления $\tau = \left\{ \frac{du^i}{ds} \right\}$ координаты вектора нормальной кривизны для этого направления имеют вид

$$X^k = L_{ii}^k \left(\frac{du^i}{ds} \right)^2.$$

В выбранной точке можно получить $g_{ij} = \delta_{ij}$.

* Поддержана грантами НАН Украины и Российским фондом фундаментальных исследований (2012г.)

Положим $\lambda^i = \left(\frac{du^i}{ds}\right)^2$, $i = 1, \dots, n$. В пространстве с координатами $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^n$ уравнения $\lambda^1 + \lambda^2 + \dots + \lambda^n = 1$ и неравенства $\lambda^i \geq 0$ задают симплекс. Индикатриса нормальной кривизны является образом этого симплекса при линейном отображении, которое задается равенствами $X^k = L_{ii}^k \lambda^i$. Если отображение невырождено, то индикатриса нормальной кривизны является $(n-1)$ -симплексом. Он лежит в некотором $(n-1)$ -мерном пространстве N^{n-1} . Если же отображение вырождается, то образ является подсимплексом меньшей размерности. В дальнейшем будем предполагать, что этот симплекс не вырождается. Он имеет n вершин по числу главных направлений на F^n .

Замечание 1. Индикатриса нормальной кривизны для подмногообразия с главными направлениями всегда является симплексом, но этот симплекс при отображении сферы S^n из касательного пространства с помощью вектора нормальной кривизны покрывается несколько раз. Действительно, для касательных векторов τ и $-\tau$ вектор нормальной кривизны один и тот же. Поэтому симплекс покрывается образом сферы S^n по крайней мере два раза.

Перейдем к доказательству теоремы 1.

Замечание 2. Размерность $2n-1$ в теореме 1 не может быть уменьшена.

Доказательство теоремы. Подмногообразие с n главными направлениями по лемме 1 имеет индикатрису нормальной кривизны — $(n-1)$ -мерный симплекс, находящийся в нормальном пространстве N^{n-1} . Поскольку по условию теоремы подпространство N^{n-1} , содержащее симплекс нормальной кривизны, проходит через точку поверхности, выберем поле нормалей n_1, n_2, \dots, n_p в нормальном пространстве N^p следующим образом. Выберем n_1, n_2, \dots, n_{n-1} так, чтобы они лежали в N^{n-1} и были ортогональны между собой. Направим векторы n_n, n_{n+1}, \dots, n_p ортогонально N^{n-1} . Тогда вторые квадратичные формы поверхности, соответствующие последней группе нормалей, являются нулевыми, т. е.,

$$L_{ij}^\beta = 0, \quad \beta = n, n+1, \dots, p. \quad (1)$$

Можем считать, что $p \geq n$, так как при $p = n-1$ доказывать нечего.

Запишем уравнения Кодацци

$$L_{ij,k}^\sigma - L_{ik,j}^\sigma = L_{ij}^\alpha \mu_{\alpha\sigma/k} - L_{ik}^\alpha \mu_{\alpha\sigma/j}, \quad n \leq \sigma \leq p, \quad (2)$$

где суммирование проводится по α от 1 до $n-1$. Из (1) следует, что левая часть уравнений (2) равна нулю. Тогда уравнение (2) примет вид

$$0 = L_{ij}^\alpha \mu_{\alpha\sigma/k} - L_{ik}^\alpha \mu_{\alpha\sigma/j}, \quad n \leq \sigma \leq p.$$

Поскольку F^n имеет n главных направлений, выберем на F^n координаты так, чтобы в точке P координатные линии касались главных направлений. Тогда в точке P $L_{ij}^\alpha = 0$ при $i \neq j$ и всех α . Получаем линейную систему уравнений на коэффициенты кручения $\mu_{\alpha\sigma/k}$:

$$\sum_{\alpha=1}^{n-1} L_{ii}^\alpha \mu_{\alpha\sigma/k} = 0,$$

где $i \neq k$, $i = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, n$, $\sigma = n, n+1, \dots, p$.

Например, общий вид системы для $\mu_{\alpha\sigma/2}$ запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} L_{11}^1\mu_{1\sigma/2} + L_{11}^2\mu_{2\sigma/2} + \dots + L_{11}^{n-1}\mu_{n-1\sigma/2} &= 0, \\ L_{33}^1\mu_{1\sigma/2} + L_{33}^2\mu_{2\sigma/2} + \dots + L_{33}^{n-1}\mu_{n-1\sigma/2} &= 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots & \\ L_{nn}^1\mu_{1\sigma/2} + L_{nn}^2\mu_{2\sigma/2} + \dots + L_{nn}^{n-1}\mu_{n-1\sigma/2} &= 0. \end{aligned}$$

Определитель этой системы состоит из коэффициентов вторых квадратичных форм и имеет вид

$$\begin{vmatrix} L_{11}^1 & L_{11}^2 & \dots & L_{11}^{n-1} \\ L_{33}^1 & L_{33}^2 & \dots & L_{33}^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{nn}^1 & L_{nn}^2 & \dots & L_{nn}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Заметим, что строки этого определителя являются координатами главных векторов нормальной кривизны $k_i = (L_{ii}^1, L_{ii}^2, \dots, L_{ii}^{n-1})$.

Этот определитель не будет равен нулю, так как по условию теоремы никакие $n - 1$ из n главных векторов нормальной кривизны не находятся в $(n - 2)$ -мерном подпространстве. Таким образом, коэффициенты кручения $\mu_{\alpha\sigma/2} \equiv 0$. Аналогично делаем заключение, что и другие коэффициенты $\mu_{\alpha\sigma/k} \equiv 0$. Заметим, что $\sigma \geq n$.

Возьмем кривую $\gamma: u^i = u^i(t)$ на F^n и вдоль нее возьмем пространство E^{2n-1} , натянутое на векторы $r_1, \dots, r_n, n_1, \dots, n_{n-1}$, где r_1, r_2, \dots, r_n — векторы касательного пространства. Полученные условия $\mu_{\alpha\sigma/k} = 0, L_{ij}^\sigma = 0, \sigma \geq n$ запишем в виде

$$\begin{aligned} (n_{\sigma u_i}, n_\alpha) &= 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \alpha = 1, \dots, n - 1, \\ (n_{\sigma u_i}, r_{u_j}) &= 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим векторное поле $n_\sigma = n_\sigma(u^1, \dots, u^n)$. Производная этого векторного поля ортогональна n_σ , поэтому она раскладывается по векторам $r_1, \dots, r_n, n_1, \dots, n_p$

Пусть ρ и $\sigma > n$. Покажем что можно выбрать n_n, \dots, n_p , так что $\mu_{\rho\sigma/k} = 0$. Поскольку $L_{ij}^\rho = 0$, уравнения Риччи для выбранных индексов ρ, σ примут вид

$$\mu_{\rho\sigma/i,k} - \mu_{\rho\sigma/k,i} + \sum_{\gamma=n}^p (\mu_{\sigma\gamma/i}\mu_{\gamma\rho/k} - \mu_{\sigma\gamma/k}\mu_{\gamma\rho/i}) = 0. \tag{3}$$

Далее рассмотрение проведем аналогично изложенному в § 6 гл. 4 [1]. В фиксированной точке P возьмем единичные векторы n_n, \dots, n_p , ортогональные между собой и будем их параллельно переносить в нормальном расслоении в произвольную точку Q вдоль некоторого соединяющего эти точки пути. Условие (3) является условием независимости этого перенесения от пути. Для так построенных нормальных векторов коэффициенты кручения $\mu_{\rho\sigma/i} \equiv 0$. Заметим, что эти векторы продолжают оставаться ортогональными к N^{n-1} .

В силу общего разложения Вейнгартена имеем

$$n_{\sigma u^i} = -L_{ij}^{\sigma} g^{jk} r_{uk} + \sum_{\rho=n}^p \mu_{\rho\sigma/i} n_{\rho} + \sum_{\alpha=1}^{n-1} \mu_{\alpha\sigma/i} n_{\alpha}.$$

Но $L_{ij}^{\sigma} = 0$, $\mu_{\alpha\sigma/i} = \mu_{\sigma\rho/i} = 0$, поэтому $n_{\sigma u^i} = 0$, т. е. векторное поле n_{σ} постоянно на F^n . Запишем условие ортогональности n_{σ} касательному пространству подмногообразия $(n_{\sigma}, r_{u^i}) = 0$. Поскольку n_{σ} — постоянное векторное поле, интегрируя, получаем $(n_{\sigma}, r) = c$. Таких уравнений имеем $p - n + 1$. Объемлющее пространство имеет размерность $n + p$. Следовательно, координаты радиуса-вектора подмногообразия F^n удовлетворяют уравнению постоянного подпространства E^{2n-1} , т. е. поверхность F^n принадлежит E^{2n-1} .

Построим пример поверхности, показывающий, что условие существования главных направлений существенно. Так, у линейчатого подмногообразия $F^3 \subset E^6$ с радиусом-вектором

$$r(u_1, u_2, u_3) = \rho(u_1) + u_2 \xi_2(u_1) + u_3 \xi_4(u_1),$$

где $\rho(u^1)$ — некоторая кривая Γ в E^6 с постоянными ненулевыми кривизнами k_1, \dots, k_5 . Координата u^1 предполагается длиной дуги кривой Γ , ξ_i — вектор-функции естественного репера Френе кривой. В этом случае $n = 3$, $p = 3$, $2n - 1 = 5$. Покажем, что у этого подмногообразия индикатриса нормальной кривизны в точках Γ вырождается в плоскую область, ограниченную эллипсом, т. е. не является симплексом, и, следовательно, согласно лемме 1 не имеет главных направлений. Подмногообразии F^3 не лежит в E^5 , так как кривая Γ не лежит в E^5 (k_5 отлично от нуля по построению).

Действительно, найдем первую и вторую квадратичные формы этой поверхности:

$$r_{u_1} = \xi_1(1 - k_1 u_2) + \xi_3(k_2 u_2 - k_3 u_3) + k_4 u_3 \xi_5,$$

$$r_{u_2} = \xi_2,$$

$$r_{u_3} = \xi_4,$$

где k_i , $i = 1, \dots, 5$, — кривизны кривой Γ . Отсюда видно, что $g_{11} = (1 - k_1 u_2)^2 + (k_2 u_2 - k_3 u_3)^2 + (k_4 u_3)^2$, $g_{12} = 0$, $g_{13} = 0$, $g_{22} = 1$, $g_{23} = 0$, $g_{33} = 1$.

Далее, так как $k_i = \text{const} \neq 0$, то

$$r_{u_1 u_1} = \xi_2(k_1(1 - k_1 u_2) - k_2^2 u_2 + k_2 k_3 u_3) + \xi_4(k_3(k_2 u_2 - k_3 u_3) - k_4^2 u_3) + \xi_6 k_5 k_4 u_3,$$

$$r_{u_1 u_2} = -\xi_1 k_1 + \xi_3 k_2,$$

$$r_{u_1 u_3} = -\xi_3 k_3 + \xi_5 k_4,$$

$$r_{u_2 u_2} = 0, \quad r_{u_2 u_3} = 0, \quad r_{u_3 u_3} = 0.$$

Запишем касательные и нормали к подмногообразию на кривой Γ , т. е. при $u_2 = 0$, $u_3 = 0$:

$$r_{u_1} = \xi_1, \quad n_1 = \xi_5,$$

$$r_{u_2} = \xi_2, \quad n_2 = \xi_3,$$

$$r_{u_3} = \xi_4, \quad n_3 = \xi_6.$$

Найдем индикатрисы нормальной кривизны линейчатого многообразия на кривой Γ . Первые и вторые квадратичные формы на Γ примут вид

$$\begin{aligned} ds^2 &= du_1^2 + du_2^2 + du_3^2, \\ L_{11}^1 &= 0, \quad L_{12}^1 = 0, \quad L_{13}^1 = k_4, \\ L_{22}^\alpha &= L_{23}^\alpha = L_{33}^\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3, \\ L_{11}^2 &= 0, \quad L_{12}^2 = k_2, \quad L_{13}^2 = -k_3, \\ L_{11}^3 &= 0, \quad L_{12}^3 = 0, \quad L_{13}^3 = 0. \end{aligned}$$

Индикатриса нормальной кривизны $k_n = X^1 n_1 + X^2 n_2 + X^3 n_3$. Обозначим $\frac{du_k}{ds} = y_k$, $k = 1, 2, 3$. Тогда $X^i = L_{11}^i y_1^2 + 2L_{12}^i y_1 y_2 + L_{22}^i y_2^2 + 2L_{13}^i y_1 y_3 + L_{33}^i y_3^2 + 2L_{23}^i y_2 y_3$. Учитывая получившиеся значения для L_{ij}^k , имеем

$$\begin{aligned} X^1 &= 2k_4 y_1 y_3, \\ X^2 &= 2k_2 y_1 y_2 - 2k_3 y_1 y_3, \\ X^3 &= 0, \end{aligned}$$

где

$$(y_1)^2 + (y_2)^2 + (y_3)^2 = 1. \tag{4}$$

Из (4) так как $X^3 = 0$, следует, что индикатриса — плоское ограниченное множество. Можно говорить о границе этого множества. Индикатриса строится с помощью отображения единичной сферы S^2 из касательного пространства к F^3 на плоскость с координатами X^1, X^2 , при этом это отображение многолистное. Следовательно, на границе множества точек индикатрисы якобиан отображения $J\left(\frac{X^1, X^2}{y^1, y^3}\right) = 0$. Это обстоятельство дает возможность определить вид границы множества точек индикатрисы.

Имеем,

$$\begin{aligned} J &= \left(\frac{X^1, X^2}{y_1, y_3} \right), \\ J &= 4 \begin{vmatrix} \frac{\partial k_4 y_1 y_3}{\partial y_1} & \frac{\partial (k_2 y_1 y_2 - k_3 y_1 y_3)}{\partial y_1} \\ \frac{\partial k_4 y_1 y_3}{\partial y_3} & \frac{\partial (k_2 y_1 y_2 - k_3 y_1 y_3)}{\partial y_3} \end{vmatrix}, \\ J &= \frac{-4k_4 k_2 y_1}{\sqrt{1 - y_1^2 - y_3^2}} (1 - 2y_1^2). \end{aligned}$$

При $y_1 = 0$ и $y_1^2 = \frac{1}{2}$ якобиан равен нулю. Если $y_1 = 0$, то получим вырождение — точку на плоскости. Тогда

$$y_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \varphi, \quad y_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \varphi.$$

Подставим полученные значения для y_1, y_2, y_3 в X^1, X^2 . Найдем

$$\cos \varphi = \frac{1}{k_2} \left(X^2 - \frac{k_3}{k_4} X^1 \right), \quad \sin \varphi = \frac{X_1}{k_4}.$$

После преобразования $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ получим уравнение второго порядка на X^1, X^2 :

$$\frac{(X^1)^2}{k_4^2} + \frac{1}{k_2^2} \left(X^2 - \frac{k_3}{k_4} X^1 \right)^2 = 1.$$

Это уравнение эллипса.

Таким образом, индикатриса является частью плоскости, ограниченной эллипсом. Поскольку, все $L_{ij}^3 = 0$ на кривой Γ , плоскость, в которой лежит индикатриса, проходит через точку поверхности и, следовательно, F^3 не имеет главных направлений.

Замечание 3. В общем случае для подмногообразия F^3 в E^6 индикатриса является некоторой поверхностью трехмерного пространства N^3 . Пример такой поверхности — поверхность Штейнера — приведен в книге [2]. Если же подмногообразие F^3 лежит в некотором E^5 , то индикатриса — плоское множество, причем плоскость, в которой лежит это множество, проходит через соответствующую точку подмногообразия F^3 . Естественно поставить вопрос: *если F^3 лежит в E^6 и его индикатриса имеет указанное свойство, то будет ли на самом деле F^3 лежать в некотором E^5 ?*

Замечание 4. В построенном выше примере указанное свойство индикатрисы выполняется только в точках кривой Γ .

Автор выражает благодарность профессору Аминову Ю. А. за его поддержку и советы, которые способствовали улучшению статьи.

Литература

1. Аминов Ю. А. Геометрия подмногообразий. — Киев: Наук., думка, 2002. — 468 с.
2. Схоутен И. А., Стройк Д. Дж. Введение в новые методы дифференциальной геометрии. — М.: Изд-во иностр., лит., 1948. — Т. 2. — 348 с.
3. Aminov Yu. A., Nasiedkina Ia. S. Conditions on a Surface $F^2 \in E^n$ to lie in E^4 // J. Math. Physics., Anal., Geom. — 2013. — 9, № 2. — P. 127–149.
4. Аминов Ю. А., Наседкина Я. С. Условия принадлежности двумерной поверхности из E^5 гипертеле или гиперплоскости // Мат. заметки. — 2013. — 94, № 2. — С. 163–174.
5. Наседкина Я. С. (Тандура Я. С.) Об условиях принадлежности поверхности трехмерной сфере // Вестн. Харьков. нац. ун-та. Сер. математика, прикл. математика и механика. — 2007. — 790, № 57. — С. 140–145.

Получено 12.07.13,
после доработки — 16.03.15