УДК 517.5

М. А. Сухорольський (Нац. ун-т „Львівська політехніка”)

ГРАНИЧНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В ОБЛАСТЯХ КОМПЛЕКСНОЇ ПЛОЩИНИ

By using the conformal mappings of plane with elliptic hole and a plane with cross-shaped hole into the outside of the circle, we construct systems of functions playing the role of bases in the spaces of the functions analytic in these domains. The Faber polynomials are biorthogonal with the basis functions. We construct the solutions of the Helmholtz equation in the plane with holes whose boundary values coincide with the boundary values of analytic functions represented in the form of series in these bases.

С помощью конформных отображений плоскости с эллиптическим вырезом и плоскости с крестовидным вырезом на внешность единичного круга построены системы функций, которые являются базисами в пространствах функций, аналитических в этих областях. Многочлены Фабера биортогональны с базисными функциями. Построены решения уравнения Гельмгольца в плоскости с вырезами, граничные значения которых совпадают с граничными значениями аналитических функций, представленных рядами по базисам.

Вступ. Фізичні процеси, які досліджують у ряді прикладних наук, описуються гармонічним рівнянням та рівнянням Гельмгольца. Методи теорії аналітичних функцій, які ефективно використовують [1 – 3] для розв'язання крайових задач для гармонічного рівняння, не можуть бути безпосередньо перенесені на крайові задачі для рівняння Гельмгольца. Розв'язки широкого класу задач для рівняння Гельмгольца побудовано [2 – 5] методами Фур'є, інтегральних перетворень та теорії потенціалів. У роботі [6] сформульовано загальний підхід до побудови розв'язків крайових задач для цього рівняння, який ґрунтується на використанні конформних відображень та розв'язків відповідних задач для гармонічного рівняння.

У даній роботі, використовуючи конформні відображення площини з еліптичним вирізом та площини зі хрестоподібним вирізом на зовнішність одиничного круга, побудовано системи функцій, які є базисами у просторах функцій, аналітичних у цих областях. Ґрунтуючись на розвиненнях аналітичних функцій у ряди за базисами, побудовано розв'язки рівняння Гельмгольца у площині з вирізами, граничні значення яких збігаються з граничними значеннями цих функцій.

1. Загальний підхід до побудови розв'язків рівняння Гельмгольца в комплексній області. Нехай D_0 — однозв'язна обмежена область комплексної площини z, $L_0 = \partial D_0$ — замкнена гладка жорданова крива і D — область, що доповнює область $\bar{D}_0$ до розширеної площини. Позначимо через $w = \varphi_0(z)$ — конформне відображення області $\bar{D}_0$ на круг $\bar{K} : |w| < 1$ комплексної площини w і через $z = \varphi_0^{-1}(w)$ — обернене відображення. При цьому крива L_0 відображується на коло $C = \partial K$.

Запишемо рівняння Гельмгольца з використанням змінних w, $\bar{w}$,

$$4 \frac{\partial^2 U}{\partial w \, \partial \bar{w}} + \kappa U = 0, \tag{1.1}$$

де κ — стала.

Множину розв'язків цього рівняння у крузі можна записати у вигляді [2, 6]

$$U=\sum_{m=0}^{\infty}c_m w^m J_m^*\left(w\overline{w}\right), \tag{1.2}$$

де $J_m^*\left(w\overline{w}\right)=J_m^*\left(|w|^2\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\kappa^n|w|^{2n}}{2^{2n+m}(n+m)!n!}$, c_m — довільні сталі. Функції $J_m^*\left(w\overline{w}\right)$ безпосередньо виражаються через функції Бесселя m-го порядку першого роду. Зокрема, якщо $\kappa>0$, то $J_m\left(\sqrt{\kappa}|w|\right)=\left(\sqrt{\kappa}|w|\right)^m J_m^*\left(|w|^2\right)$.

Перейдемо до нових змінних $z=\varphi_0^{-1}(w)$, $\overline{z}=\overline{\varphi}_0^{-1}(w)$. Оскільки $\varphi_0'(z)\neq 0$, $z\in D_0$, одержимо таке рівняння

$$4\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial\overline{z}}+\kappa\varphi_0'(z)\overline{\varphi}_0'(z)U=0. \tag{1.3}$$

Множину розв'язків цього рівняння одержимо з формули (1.2) заміною змінних $w=\varphi_0(z)$, $\overline{w}=\overline{\varphi}_0(z)$:

$$U=\sum_{m=0}^{\infty}c_m\varphi_0^m(z)J_m^*\left(\varphi_0(z)\overline{\varphi}_0(z)\right). \tag{1.4}$$

Зауважимо, що члени рядів (1.2) і (1.4) також є розв'язками відповідно рівнянь (1.1) і (1.3).

1.1. Розв'язок задачі для круга. Запишемо розв'язок рівняння (1.1) у крузі $K:|w|<1$ за умови

$$U\left(w,\overline{w}\right)\big|_C=f(t),\quad t\in C=\partial K, \tag{1.5}$$

де $f(t)$ — функція, яка розвивається у рівномірно збіжний ряд

$$f(t)=\sum_{m=0}^{\infty}d_m t^m, \tag{1.6}$$

***Зауваження* 1.1.** Якщо ряд за системою функцій, аналітичних в закритій області $\overline{G}$, рівномірно збігається на границі $L=\partial G$, то він рівномірно збігається в $\overline{G}$, його сума неперервна функція на L і аналітична в G [3, с. 192]. Однією з достатніх умов рівномірної збіжності ряду функції $g(t)$ на L за системою функцій, аналітичних в закритій області $\overline{G}$, є її приналежність до класу неперервних функцій Гельдера [3, с. 275].

Отже, з умови (1.6) випливає рівномірна збіжність в закритій області $\overline{K}$ ряду

$$f(w)=\sum_{m=0}^{\infty}d_m w^m,$$

аналітичність в K і неперервність на C функції $f(w)$.

Підставляючи вираз (1.2) в умову (1.5) з урахуванням подання (1.6) і рівності $w\bar{w}=1$, $w\in C$, одержимо

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m e^{im\psi} J_m^*(1) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m e^{im\psi} .$$

Звідси, знайдемо $c_m = d_m \big/ J_m^*(1)$ і запишемо розв'язок задачі

$$U(w,\bar{w}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d_m}{J_m^*(1)} w^m J_m^*(w\bar{w}) .$$

Отже, розв'язок рівняння Гельмгольца в крузі, який на його границі приймає значення аналітичної в крузі функції, задається рядом за системою функцій $\left\{ w^m J_m^*(w\bar{w}) \right\}$. Одержаний ряд збігається рівномірно в $\bar{K}$, внаслідок обмеженості функції $J_m^*\left(|w|^2\right)$ і рівномірної збіжності ряду (1.6) в $\bar{K}$.

1.2. Розв'язок задачі для зовнішності круга. Запишемо розв'язок рівняння (1.1) в області D (зовнішності круга одиничного радіуса з центром у початку координат), який обмежений у нескінченно віддаленій точці і справджує умову

$$U(z,\bar{z})\big|_L = f(t), \quad t\in L , \tag{1.7}$$

де $L=\partial D$ — одиничне коло (обхід відбувається за годинниковою стрілкою); $f(t)$ — функція, що розвивається у рівномірно збіжний ряд

$$f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m \frac{1}{t^m} \tag{1.8}$$

З рівномірної збіжності ряду (1.8) випливає рівномірна збіжність цього ряду в області $\bar{D}$, аналітичність його суми $f(z)$ в області D і неперервність на границі L.

Маємо конформне відображення зовнішності одиничного круга на одиничний круг $w=\varphi_0(t)=1/z$. Тоді рівняння (1.1) набуде вигляду (1.3), а формула (1.4) запишеться так

$$U(z,\bar{z}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m}{z^m} J_m^*\left(\frac{1}{z\bar{z}}\right). \tag{1.9}$$

Запишемо граничну умову (1.7) з урахуванням зображення функції (1.8). Оскільки на границі $t=e^{-i\psi}$, $0\le\psi<2\pi$, одержимо

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m e^{im\psi} J_m^*(1) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m e^{im\psi} .$$

Звідси знайдемо $c_m = a_m \big/ J_m^*(1)$ і запишемо розв'язок задачі

$$U(z,\bar{z}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{J_m^*(1)} \frac{1}{z^m} J_m^*\left(\frac{1}{z\bar{z}}\right). \tag{1.10}$$

Отже, розв'язок рівняння (1.3) в області D, який задовольняє умови (1.7), задається рівномірно збіжним рядом за системою функцій $\left\{z^{-m} J_m^*\left(|z|^{-2}\right)\right\}$, кожна з яких також є розв'язком цього рівняння. Безпосередньою перевіркою переконаємось у виконанні граничної умови (1.7). Рівномірна збіжність ряду в області $\bar{D}$ випливає з обмеженості функцій $J_m^*\left(|z|^{-2}\right)$, $J_0^*(0)=1$ і рівномірної збіжності ряду (1.8) у цій області.

2. Розв'язок рівняння Гельмгольца у площині з еліптичним вирізом. ***2.1. Базис у просторі аналітичних функцій.*** Нехай $D^{(-)}$ — площина з еліптичним вирізом і $L = \partial D^{(-)}$ — еліпс з осями $2a = 1+c$, $2b = 1-c$, $0 \le c < 1$ (обхід відбувається за годинниковою стрілкою). Функція [2, 3]

$$w = \varphi(z) = z + \sqrt{z^2 - c}\,, \tag{2.1}$$

де $\lim_{z\to\infty} \sqrt{z^2-c}\big/z = 1$, відображає область $\bar{D}^{(-)}$ на зовнішність одиничного круга $\bar{K}: |w| \le 1$.

Обернене до (2.1) відображення має вигляд

$$z = \frac{1}{2}\left(w + \frac{c}{w}\right). \tag{2.2}$$

Якщо $c = 0$, то еліпс вироджується у коло радіуса $1/2$. Якщо ж $c = 1$, то еліпс вироджується у розріз. При цьому контур L складається з двох „берегів" розрізу $|\operatorname{Re} z| \le 1$, $\operatorname{Im} z = 0$, і якщо точка $w = e^{-i\psi}$, $0 \le \psi < 2\pi$, належить границі зовнішності одиничного круга, то з (2.2) одержуємо рівняння лінії $L: t = \cos\psi + 0i$.

Ґрунтуючись на відображенні (2.1) побудуємо відповідні біортогональні системи функцій [7, 8]. Система степеневих функцій $\left\{w^{-(n+1)}\right\}_{n=0}^{\infty}$ — базис у просторі функцій, аналітичних у зовнішності одиничного круга, і $\left\{w^m\right\}_{m=0}^{\infty}$ — відповідна асоційована система функцій. Ці системи функцій біортогональні на довільному колі $\Gamma: |w| = r \ge 1$ (обхід відбувається за годинниковою стрілкою),

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w^n}{w^{m+1}}\, dw = \delta_{nm}\,, \tag{2.3}$$

де δ_{nm} — символ Кронекера. Використовуючи тут заміну $w = \phi(z)$, отримуємо

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma^*}\frac{1}{\varphi^{n+1}(z)}\frac{d}{dz}\left(\frac{\varphi^{m+1}(z)}{m+1}\right)dz=\delta_{nm} \qquad \text{або} \qquad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma^*}\frac{\varphi'(z)}{\varphi^{n+1}(z)}\varphi^m(z)\,dz=\delta_{nm}, \tag{2.4}$$

де $\Gamma^*\subset\bar{D}^{(-)}$ — прообраз кола Γ при відображенні (2.1).

Введемо згідно з першим із співвідношень (2.4) систему функцій

$$\left\{g_n^{(-)}(z)=\frac{1}{\varphi^{n+1}(z)}=\frac{1}{\left(z+\sqrt{z^2-c^2}\right)^{n+1}}\right\}_{n=0}^{\infty}, \quad z\in\bar{D}^{(-)}. \tag{2.5}$$

Функції в (2.5) справджують нерівність

$$0\le\left|g_n^{(-)}(z)\right|\le 1. \tag{2.6}$$

Маємо розвинення функцій з (2.5) у ряд Лорана в околі нескінченно віддаленої точки:

$$g_n^{(-)}(z)=\frac{n+1}{(2z)^{n+1}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{C_{n+2l}^{l}c^l}{(l+n+1)}\frac{1}{(2z)^{2l}}. \tag{2.7}$$

Знайдемо асоційовані з системою (2.5) функції. Розвинення (2.7) містять лише доданки з від’ємними степенями змінної. Тому для виконання першого із співвідношень (2.4) у виразі ряду Лорана функції $\frac{d}{dz}\left(\frac{\varphi^{m+1}(z)}{m+1}\right)$ достатньо зберегти головну його частину (доданки з додатними степенями змінної).

Спочатку знайдемо головну частину ряду Лорана функції $\varphi^m(z)=\left(z+\sqrt{z^2+c}\right)^m$. Оскільки ряд функції $\varphi^{-m}(z)$ не містить доданків із додатними степенями змінної, розвинення функцій $\varphi^m(z)$ і $\varphi^m(z)+\varphi^{-m}(z)$ мають однакові сукупності доданків із додатними степенями. Остання функція — многочлен Фабера m-го степеня для області $D_0^{(-)}$ [7, 9 ,10] і (якщо $c=1$) многочлен Чебишова m-го степеня [11]

$$2T_m(z)=m\sum_{k=0}^{[m/2]}\frac{(-1)^k C_{m-k}^{k}c^k}{m-k}(2z)^{m-2k}. \tag{2.8}$$

Тепер знайдемо правильну частину ряду Лорана функції $\frac{d}{dz}\left(\frac{\varphi^{m+1}(z)}{m+1}\right)$. Вона також є похідною від многочлена (2.8) і це (за аналогією з многочленами Чебишова другого роду [11]) — многочлен Фабера другого роду для області $D_0^{(-)}$:

$$\omega_m^{(-)}(z) = \frac{2}{m+1}\frac{d}{dz}T_{m+1}(z) = 2\sum_{k=0}^{[m/2]}(-1)^k C_{m-k}^k c^k (2z)^{m-2k}. \tag{2.9}$$

Отже, системи функцій $\left\{g_n^{(-)}(z)\right\}$ і $\left\{\omega_m^{(-)}(z)\right\}$ біортогональні на довільному замкненому контурі, що охоплює виріз і належить області $\bar{D}^{(-)}$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^*} g_n^{(-)}(z)\,\omega_m^{(-)}(z)dz = \delta_{nm}. \tag{2.10}$$

Теорема 2.1. *Якщо функція* $g(z)$ *аналітична в області* $D^{(-)}$ *і* $g(\infty)=0$, *то вона зображується у вигляді ряду*

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n^{(-)}(z), \quad z \in D^{(-)}, \tag{2.11}$$

де $a_n = \dfrac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^*} g(z)\,\omega_n^{(-)}(z)\,dz$, $\Gamma^* \subset D^{(-)}$ *— будь-який контур, що охоплює виріз.*

Доведення. Відомо [7, с. 119], що функція, аналітична в обмеженій області $D_0^{(-)}$, розвивається у рівномірно збіжний ряд у цій області за системою многочленів Фабера $\left\{\omega_m^{(-)}(z)\right\}$, тобто, система функцій $\left\{\omega_m^{(-)}(z)\right\}$ — базис в просторі функцій, аналітичних в $D_0^{(-)}$, а $\left\{g_n^{(-)}(z)\right\}$ — система функцій, асоційована зі системою $\left\{\omega_m^{(-)}(z)\right\}$. Звідси випливає [7, с. 615], що система функцій $\left\{g_n^{(-)}(z)\right\}$ — базис у просторі функцій, аналітичних в області $D^{(-)}$, а система многочленів $\left\{\omega_m^{(-)}(z)\right\}$ — система асоційованих функцій. Тому будь-яка функція, аналітична в $D^{(-)}$, розвивається в цій області у рівномірно збіжний ряд за системою функцій $\left\{g_n^{(-)}(z)\right\}$.

Помноживши ряд (2.11) на асоційовані функції і зінтегрувавши по контуру Γ^* з урахуванням співвідношень (2.9), (2.10), одержимо вирази для коефіцієнтів цього ряду.

***Приклад* 2.1.** Для степеневих функцій знайдемо розвинення за системою функцій (2.5):

$$\frac{1}{z^{2q}} = \sum_{n=q}^{\infty} a_{2n-1} g_{2n-1}^{(-)}(z), \qquad \frac{1}{z^{2q+1}} = \sum_{n=q}^{\infty} a_{2n} g_{2n}^{(-)}(z),$$

де

$$a_{2n-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^*}\frac{1}{z^{2q}}\,\omega_{2n-1}^{(-)}(z)dz = (-1)^{n-q} C_{n+q-1}^{n-q} c^{n-q},$$

$$a_{2n} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma^*} \frac{1}{z^{2q+1}} \omega_{2n}^{(-)}(z)\, dz = (-1)^{n-q} C_{n+q}^{n-q} c^{n-q}.$$

Зауважимо, що, виходячи з другого зі співвідношень (2.4), можна одержати аналогічні (2.10) співвідношення біортогональності для систем функцій

$$\left\{ \tilde{g}_n^{(-)}(z) = \frac{\varphi'(z)}{\varphi^{n+1}(z)} \right\} \quad \text{і} \quad \left\{ \tilde{\omega}_m^{(-)}(z) = 2T_m(z) \right\}. \tag{2.12}$$

Перша із систем (2.12) є базисом у просторі аналітичних в області $D^{(-)}$ функцій, а друга — базисом у просторі функцій, аналітичних в $D_0^{(-)}$.

2.2. Побудова розв'язку. Знайдемо обмежений у нескінченно віддаленій точці розв'язок рівняння (1.1) в області $D^{(-)}$, що задовольняє умову

$$U(z, \bar{z})\big|_L = f(t), \quad t \in L, \tag{2.13}$$

де $f(t)$ — функція, що розвивається у рівномірно збіжний ряд за системою функцій (2.5),

$$f(t) = a + \sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n^{(-)}(t). \tag{2.14}$$

Цей ряд рівномірно збігається [3] в області $\bar{D}^{(-)}$, а його сума $f(z)$ — неперервна на L і аналітична в $D^{(-)}$ функція, тобто формула (2.14) є правильною для $t = z$.

Рівняння (1.1) для цього випадку набере вигляду (1.3), де $\varphi_0(z) = 1/\varphi(z)$, а множину розв'язків цього рівняння одержимо з (1.9) у вигляді

$$U(z, \bar{z}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m}{\varphi^m(z)} J_m^* \left(\frac{1}{\varphi(z)\, \bar{\varphi}(z)} \right). \tag{2.15}$$

Якщо врахувати в (2.14) залежності $g_n^{(-)}(z) = 1/\varphi^{n+1}(z)$, $\varphi(z) = w$ і $w = e^{-i\psi} \in K$, $0 \le \psi < 2\pi$, то граничні значення $f(t)$, $t \in L$, цієї функції можна записати таким чином:

$$f(t) = a + \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{i(n+1)\psi}. \tag{2.16}$$

Тоді, підставляючи (2.15) і (2.16) в умову (2.13), з урахуванням залежності $\varphi(t)\,\bar{\varphi}(t) = 1$, $t \in L$, одержуємо рівняння

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{in\psi} J_n^*(1) = a + \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{i(n+1)\psi}.$$

Звідси знайдемо $c_0 = a \big/ J_0^*(1)$, $c_n = a_{n-1} \big/ J_n^*(1)$, $n = 1, \ldots$, і запишемо розв'язок задачі у вигляді

$$U(z, \overline{z}) = \frac{a}{J_0^*(1)} J_0^* \left(g_0^{(-)}(z) \, \overline{g}_0^{(-)}(z) \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{J_n^*(1)} g_{n-1}^{(-)}(z) \, J_n^* \left(g_0^{(-)}(z) \, \overline{g}_0^{(-)}(z) \right). \qquad (2.17)$$

Підстановкою $z = t \in L$ і $z = \infty$ у формулу (2.17) переконуємося з урахуванням розвинення (2.14) у виконанні граничної умови (2.13) і обмеженості розв'язку в нескінченно віддаленій точці, $\lim_{z \to \infty} U(z, \overline{z}) = a J_0^*(0) \big/ J_0^*(1) = a \big/ J_0^*(1)$. Рівномірна збіжність ряду (2.17) в області $\overline{D}^{(-)}$ випливає з рівномірної збіжності ряду (2.14) і обмеженості функцій $J_n^* \left(\left| g_0^{(-)}(z) \right|^2 \right)$, оскільки виконується нерівність (2.6).

Отже, розвинення (2.15) функції $f(z)$ за системою функцій (2.5) безпосередньо визначає розвинення розв'язку задачі в області $D^{(-)}$ за системою функцій

$$\left\{ g_{n-1}^{(-)}(z) \, J_n^* \left(g_0^{(-)}(z) \, \overline{g}_0^{(-)}(z) \right) \right\}.$$

***Приклад* 2.2.** Якщо $f(t) = a$, то $f(z) = a$ і розв'язок (2.17) набере вигляду

$$U(z, \overline{z}) = \frac{a}{J_0^*(1)} J_0^* \left(g_0^{(-)}(z) \overline{g}_0^{(-)}(z) \right).$$

***Приклад* 2.3.** Якщо $f(t) = e^{i(n+1)\psi}$, то $f(z) = g_n^{(-)}(z)$ і розв'язок рівняння Гельмгольца, що задовольняє умову $U(z, \overline{z})\big|_L = e^{i(n+1)\psi}$, має вигляд

$$U(z, \overline{z}) = \frac{1}{J_{n+1}^*(1)} g_n^{(-)}(z) J_{n+1}^* \left(g_0^{(-)}(z) \overline{g}_0^{(-)}(z) \right).$$

***Приклад* 2.4.** Нехай $f(t) = t^{-(2q+1)}$. Тоді, використовуючи приклад 2.1, знаходимо

$$f(t) = 2^{2q+1} \sum_{n=q}^{\infty} (-1)^{n-q} \, C_{n+q}^{n-q} c^{n-q} g_{2n}^{(-)}(t)$$

і, відповідно, $a_n = (-1)^{n-q} \, 2^{2q+1} \, C_{n+q}^{n-q} c^{n-q}$, $c_n = a_{n-1} \big/ J_n^*(1)$.

Розв'язок задачі має вигляд

$$U(z, \overline{z}) = \sum_{n=q}^{\infty} \frac{(-1)^{n-q} \, 2^{2q+1} \, C_{n+q}^{n-q} c^{n-q}}{J_{n+1}^*(1)} g_n^{(-)}(z) J_{n+1}^* \left(g_0^{(-)}(z) \overline{g}_0^{(-)}(z) \right).$$

Границя при $c \to 1$ виразу (2.14) (якщо вона існує) визначає узагальнений розв'язок відповідної крайової задачі для рівняння (1.3) у площині з розрізом.

3. Розв'язок рівняння Гельмгольца у площині з хрестоподібним вирізом. ***3.1. Побудова базису у просторі аналітичних функцій.*** Нехай область $D^{(+)}$ — площина з симетричним відносно осей координат і бісектрис координатних кутів хрестоподібним вирізом (зі заокругленими кутами), $L = \partial D^{(+)}$. Більші діагоналі вирізу лежать на осях координат і мають довжину $2a = \sqrt{2}\sqrt{1+c^2}$, $0 \le c < 1$, а менші — на бісектрисах координатних кутів і мають довжину $2b = \sqrt{2}\sqrt{1-c^2}$.

Відображення області $\bar{D}^{(+)}$ на зовнішність круга одиничного радіуса $\bar{K} : |w| > 1$ і обернене до нього відображення мають вигляд [3, с. 153]

$$w = \varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{z^2+c} + \sqrt{z^2-c}\right) \quad \text{і} \quad z = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{w^4+c^2}}{w}, \tag{3.1}$$

де $\lim_{z\to\infty} \sqrt{z^2 \pm c}\big/ z = 1$.

Якщо $c = 0$, то хрестоподібний виріз вироджується в круг радіуса $1\big/\sqrt{2}$; якщо $c^2 = 1/3$, то виріз — квадрат зі заокругленими кутами $\left(a = b\sqrt{2}\right)$, якщо ж $c = 1$, то виріз вироджується у хрестоподібний розріз. В останньому випадку область $D^{(+)}$ — площина з вилученими відрізками $|\operatorname{Re} z| \le 1$, $\operatorname{Im} z = 0$ та $|\operatorname{Re} z| \le 0$, $\operatorname{Im} z \le 1$, і якщо точка $w = e^{-i\psi}$, $0 \le \psi < 2\pi$, належить границі зовнішності одиничного круга, то згідно з (3.1) одержимо рівняння межі розрізу $L : t = \sqrt{\cos 2\psi}$.

Підставляючи відображення (3.1) у співвідношення (2.3), одержуємо ідентичні (2.4) співвідношення, в яких $\Gamma^* \subset D^{(+)}$ — прообраз кола $\Gamma : |w| = r < 1$ при цьому відображенні. З першого з співвідношень (2.4) означимо наступну систему базисних функцій $\left\{ g_n^{(+)}(z) \right\}$ у просторі функцій, аналітичних в області $D^{(+)}$:

$$g_n^{(+)}(z) = \varphi^{-(n+1)}(z) = 2^{(n+1)/2}\left(\sqrt{z^2+c} + \sqrt{z^2-c}\right)^{-(n+1)}. \tag{3.2}$$

Оскільки функція $w = 1/\varphi(z)$ перетворює зовнішність хрестоподібного вирізу на одиничний круг, функції (3.2) задовольняють нерівність

$$0 \le \left| g_n^{(+)}(z) \right| \le 1, \quad z \in \bar{D}^{(+)}. \tag{3.3}$$

Ряди Лорана функцій (3.2) в околі нескінченно віддаленої точки мають вигляд

$$g_{2n+1}^{(+)}(z) = g_n^{(-)}\left(z^2\right) = \frac{n+1}{\left(2z^2\right)^{n+1}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_{n+2l+1}^{l} c^{2l}}{(n+2l+1)} \frac{1}{\left(2z^2\right)^{2l}}, \tag{3.4}$$

$$g_{2n}^{(+)}(z)=\frac{1}{\sqrt{2}}\,g_{n-1}^{(-)}(z)\left(\sqrt{z^2+c}-\sqrt{z^2-c}\right)=\frac{(n+1/2)}{\sqrt{2}z\left(2z^2\right)^n}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{C_{n+2l+1/2}^{l}c^{2l}}{n+2l+1/2}\frac{1}{\left(2z^2\right)^{2l}},$$

де

$$C_{n+1/2+2l}^{l}=\frac{(n+1/2+2l)(n+1/2+2l-1)\ldots(n+1/2+l+1)}{l!}.$$

Для одержання першої формули (3.4) використано ряд Лорана функції (2.7). Другу з формул (3.4) отримано з використанням формул

$$\left(\sqrt{z^2+c}\pm\sqrt{z^2-c}\right)^2=2\left(z^2\pm\sqrt{z^4-c^2}\right),$$

$$\sqrt{z^2+c}-\sqrt{z^2-c}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{C_{4l}^{2l}c^{2l+1}}{2^{4l}(2l+1)}\frac{1}{z^{4l+1}}$$

та комбінаторної тотожності

$$\sum_{k=0}^{l}\frac{2^{2k}nC_{n+2k}^{k}C_{4(l-k)}^{2(l-k)}}{(n+2k)(2l-2k+1)}=\frac{2^{2l}(n+1/2)C_{n+2l+1/2}^{l}}{n+2l+1/2}. \tag{3.5}$$

Асоційована система функцій $\{\omega_m(z)\}$ (система многочленів Фабера другого роду для області $D_0^{(+)}$) є головною частиною ряду Лорана функції $\frac{1}{m+1}\frac{d}{dz}\varphi^{m+1}(z)$ в околі нескінченно віддаленої точки. Тут функція $\varphi(z)$ задається першою з формул (3.1).

Спочатку знайдемо головну частину ряду Лорана функції $\varphi^m(z)$ (многочлен Фабера m-го степеня першого роду для області $D_0^{(+)}$). Окремо для парних та непарних значень степенів цієї функції знайдемо

$$\varphi^{2m}(z)=\left(z^2+\sqrt{z^4+c^2}\right)^m=\sum_{k=0}^{[m/2]}\frac{(-1)^k\,2^{2m-2k}mC_{m-k}^{k}c^{2k}}{m-k}\left(z^2\right)^{m-2k}+A_1\left(\frac{1}{z}\right),$$

(3.6)

$$\varphi^{2m-1}(z)=\frac{1}{\sqrt{2c}}\left(z^2+\sqrt{z^4+c^2}\right)^m\left(\sqrt{z^2+c}-\sqrt{z^2-c}\right)=$$

$$=2^{m-1/2}\sum_{l=0}^{[(m-1)/2]}c^{2l}z^{2m-4l-1}\sum_{k=0}^{l}\frac{(-1)^k\,mC_{m-k}^{k}C_{4(l-k)}^{2(l-k)}}{2^{4l-2k}(m-k)(2l-2k+1)}+A_2\left(\frac{1}{z}\right)=$$

$$= 2^{m-1/2} \sum_{k=0}^{[(m-1)/2]} \frac{(-1)^k c^{2k} (m-1/2) C_{m-1/2-k}^k}{2^{2k} (m-1/2-k)} z^{2m-4k-1} + A_2\left(\frac{1}{z}\right),$$

де $A_i(1/z)$ — правильна частина ряду Лорана цих функцій. Другий ряд у (3.6) одержано з урахуванням відповідних формул (3.4) та комбінаторної тотожності

$$\sum_{k=0}^{l} \frac{(-1)^k m C_{m-k}^k C_{4(l-k)}^{2(l-k)}}{2^{4l-2k} (m-k)(2l-2k+1)} = \frac{(-1)^l (m-1/2) C_{m-1/2-l}^l}{2^{2l} (m-1/2-l)}.$$

Тепер відповідні асоційовані функції знайдемо, як похідні від головної частини рядів Лорана (3.6):

$$\omega_{2m+1}^{(+)}(z) = \frac{1}{2(m+1)} \frac{d}{dz} \Pi\left\{\varphi^{2(m+1)}(z)\right\} = 2^{m+1} \sum_{k=0}^{[m/2]} \frac{(-1)^k c^{2k} C_{m-k}^k}{2^{2k}} z^{2m-4k+1},$$

$$\omega_{2m}^{(+)}(z) = \frac{1}{2m+1} \frac{d}{dz} \Pi\left\{\varphi^{2m+1}(z)\right\} = 2^{m+1/2} \sum_{k=0}^{[m/2]} \frac{(-1)^k c^{2k} C_{m-1/2-k}^k}{2^{2k}} z^{2m-4k}. \tag{3.8}$$

Системи функцій $\left\{g_n^{(+)}(z)\right\}$ і $\left\{\omega_m^{(+)}(z)\right\}$ — біортогональні на довільному замкнутому контурі $\Gamma^* \subset D^{(+)}$, що охоплює виріз,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^*} g_n^{(+)}(z)\, \omega_m^{(+)}(z)\, dz = \delta_{nm}.$$

Можна показати, як і в доведенні теореми 2.1, що система функцій (3.2) — базис у просторі функцій, аналітичних в області $D^{(+)}$.

Теорема 3.1. *Якщо функція* $g(z)$ *аналітична в області* $D^{(+)}$ *і* $g(\infty) = 0$, *то вона зображується у вигляді ряду*

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n^{(+)}(z), \quad z \in D^{(+)},$$

де $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^*} g(z)\, \omega_n^{(+)}(z)\, dz$; $\Gamma^* \subset D^{(+)}$ *— будь-який контур, що охоплює виріз.*

Приклад 3.1. Для степеневих функцій маємо

$$\frac{1}{z^{4q-1}} = \sum_{n=q}^{\infty} a_{4n-2} g_{4n-2}^{(+)}(z), \qquad \frac{1}{z^{4q}} = \sum_{n=q}^{\infty} a_{4n-1} g_{4n-1}^{(+)}(z),$$

$$\frac{1}{z^{4q+1}} = \sum_{n=q}^{\infty} a_{4n} g_{4n}^{(+)}(z), \qquad \frac{1}{z^{4q+2}} = \sum_{n=q}^{\infty} a_{4n+1} g_{4n+1}^{(+)}(z),$$

де

$$a_{4n-2} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma^*} \frac{1}{z^{4q-1}} \omega_{4n-2}^{(+)}(z)\, dz = (-1)^{n-q}\, 2^{2q-1/2} C_{n-3/2+q}^{n-q} c^{2(n-q)}, \quad n \geq q \geq 1;$$

$$a_{4n-1} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma^*} \frac{1}{z^{4q}} \omega_{4n-1}^{(+)}(z)\, dz = (-1)^{n-q}\, 2^{2q} C_{n-1+q}^{n-q} c^{2(n-q)}, \quad n \geq q \geq 1;$$

$$a_{4n} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma^*} \frac{1}{z^{4q+1}} \omega_{4n}^{(+)}(z)\, dz = (-1)^{n-q}\, 2^{2q+1/2} C_{n-1/2+q}^{n-q} c^{2(n-q)}, \quad n \geq q;$$

$$a_{4n+1} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma^*} \frac{1}{z^{4q+2}} \omega_{4n+1}^{(+)}(z) dz = (-1)^{n-q}\, 2^{2q+1} C_{n+q}^{n-q} c^{2(n-q)}, \quad n \geq q.$$

Зауважимо, що виходячи з другого зі співвідношень (2.4), можна одержати співвідношення біортогональності для систем функцій

$$\left\{ \tilde{g}_n^{(+)}(z) = \frac{\varphi'(z)}{\varphi^{n+1}(z)} \right\} \quad \text{і} \quad \left\{ \tilde{\omega}_m^{(+)}(z) \right\}. \tag{3.9}$$

При цьому перша система є базисом у просторі функцій, аналітичних в області $D^{(+)}$, а друга — базисом у просторі функцій, аналітичних в області $D_0^{(+)}$.

3.2. Побудова розв'язку задачі. Знайдемо обмежений у нескінченно віддаленій точці розв'язок рівняння (1.1) в області $D^{(+)}$, що задовольняє граничну умову

$$U(z, \bar{z})\big|_L = f(t), \quad t \in L, \tag{3.10}$$

де $f(t)$ — функція, що розвивається у рівномірно збіжний ряд за системою функцій (3.2),

$$f(t) = a + \sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n^{(+)}(t). \tag{3.11}$$

Цей ряд рівномірно збігається також в області $\bar{D}^{(+)}$, а його сума $f(z)$ — неперервна на L і аналітична в $D^{(+)}$ функція, тобто формула (2.11) є правильною для $t = z$.

Рівняння (1.1) у цьому випадку має вигляд (1.3), де $\varphi_0(z) = 1/\varphi(z)$.

Скористаємося розв'язком задачі з підпункту 1.2. Підставляючи вираз відображення (3.1) у формулу (1.9), одержуємо розв'язок рівняння (1.3) у вигляді суми ряду

$$U(z,\overline{z}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m}{\varphi^m(z)} J_m^*\left(\frac{1}{\varphi(z)\,\overline{\varphi}(z)}\right). \tag{3.12}$$

Коефіцієнти цього ряду знайдемо з умови (3.10). Якщо в (3.11) врахувати залежності $g_n^{(+)}(z) = 1/\varphi^{n+1}(z)$, $\varphi(z) = w$ і $w = e^{-i\psi} \in K$, $0 \le \psi < 2\pi$, то

$$f(t) = a + \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{i(n+1)\psi}. \tag{3.13}$$

Підставляючи (3.12) і (3.13) в умову (3.10), з урахуванням залежності $\varphi(t)\,\overline{\varphi}(t) = 1$, $t \in L$, одержимо рівняння

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{in\psi} J_n^*(1) = a + \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{i(n+1)\psi}.$$

Звідси знайдемо $c_0 = a/J_0^*(1)$, $c_n = a_{n-1}/J_n^*(1)$, $n = 1, \ldots$, і запишемо розв'язок задачі у вигляді

$$U(z,\overline{z}) = \frac{a}{J_0^*(1)} J_0^*\left(g_0^{(+)}(z)\overline{g}_0^{(+)}(z)\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{J_n^*(1)} g_{n-1}^{(+)}(z) J_n^*\left(g_0^{(+)}(z)\overline{g}_0^{(+)}(z)\right). \tag{3.14}$$

Сума ряду (3.14) обмежена на нескінченності, оскільки $g_m^{(+)}(\infty) = 0$, $J_0^*(0) = 1$. Підстановкою значень $z = t \in L$ у ряд (3.14) переконуємось у виконанні граничної умови (3.10). Рівномірна збіжність ряду (3.14) в області $D^{(+)}$ випливає з оцінки (3.3), обмеженості функцій $J_{m+1}^*\left(g_0^{(+)}(z)\,\overline{g}_0^{(+)}(z)\right)$ і рівномірної збіжності ряду (3.11).

***Приклад* 3.2.** Запишемо розв'язок рівняння (1.3) в області $D^{(+)}$ за умови

$$U(z,\overline{z})\big|_L = e^{i\psi}, \qquad 0 \le \psi < 2\pi.$$

Оскільки $t \in L$, згідно з (3.1) маємо $g_0^{(+)}(t) = w^{-1}\big|_C = e^{i\psi}$. Аналітична в $D^{(+)}$ функція $g_0^{(+)}(z)$ набуває заданих граничних значень на контурі L, і розв'язок задачі є таким:

$$U(z,\overline{z}) = \frac{1}{J_1^*(1)} g_0^{(+)}(z) J_1^*\left(g_0^{(+)}(z)\overline{g}_0^{(+)}(z)\right).$$

***Приклад* 3.3.** Знайдемо розв'язок рівняння (1.3) для області $D^{(+)}$, що задовольняє умову

$$U(z,\overline{z})\big|_L = a.$$

З формули (3.13) з урахуванням цієї умови одержимо розв'язок задачі

$$U(z,\overline{z}) = \frac{a}{J_0^*(z)} J_0^*\left(g_0^{(+)}(z)\overline{g}_0^{(+)}(z) \right).$$

Зауважимо, що дійсна і уявна частини одержаних розв'язків також задовольняють рівняння Гельмгольца.

Якщо у формулі (3.14) перейти до границі при $c \to 1$ (і границя існує), то одержимо узагальнений розв'язок рівняння (1.3) у площині з хрестоподібним розрізом.

Висновки. Розглянутий підхід до побудови розв'язків задачі Діріхле для рівняння Гельмгольца можна поширити на крайову задачу Неймана для цього рівняння у площині з еліптичним чи хрестоподібним вирізом. Якщо відповідні аналітичні функції зобразити рядами за системами біортогональних функцій (2.12), (3.9), то можна формулювати граничні умови щодо похідних невідомої функції на границі області.

Наведені комбінаторні тотожності (3.5) і (3.7) мають самостійний інтерес.

Для побудови узагальнених розв'язків крайових задач для рівняння (1.3) з граничними умовами, задані функції яких не є неперервними функціями або межа містить кутові точки, можна використати методи узагальненого підсумовування рядів, що ґрунтуються на математичному апараті операторів згладжування.

Розглянутий підхід також можна поширити на крайові задачі для рівняння Гельмгольца в обмежених областях. При цьому важливим етапом відшукання розв'язку є побудова базису відповідного простору аналітичних функцій. Базисними у просторі функцій, аналітичних у обмеженій області, є суперпозиція степеневих функцій та функції, яка задає відповідне конформне відображення, і розвинення цих функцій в ряди Лорана в околі нульової точки, а асоційованими є многочлени за від'ємними степенями змінної (головна частина рядів Лорана відповідних множників-функцій у співвідношеннях біортогональності).

Література

1. *Иванов В. И., Попов В. Ю. Конформные* отображения и их приложения. – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 324 с.
2. *Korn G. A., Korn T. M.* Mathematical handbook for scientists and engineers. – Mineola, New York: Dover Publ., Inc.: 2000. – 1130 p.
3. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 698 с.
4. *Владимиров И. С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
5. *Гузь А. Н., Луговой П. З., Шульга Н. А.* Конические оболочки, ослабленные отверстиями. – Киев: Наук. думка, 1976. – 164 с.
6. *Сухорольський М. А.* Аналітичні розв'язки рівняння Гельмгольца // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур / Під ред. І. О. Луковського, Г. С. Кіта, Р. М. Кушніра. – Львів: НАН України, 2014. – С. 160–163.
7. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций: В 2 т. – М.: Наука, 1968. – Т. 2. – 624 с.
8. *Сухорольський М. А.* Розвинення функцій за системою поліномів, біортогональних на замкненому контурі з системою регулярних у нескінченно віддаленій точці функцій // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 2. – С. 238 –254.
9. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1966. – 672 с.
10. *Смирнов В. И., Лебедев Н. А.* Конструктивная теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1964. – 440 с.
11. *Paszkowski S.* Zastosowania numeryczne wielomianow i szeregow Czebyszewa. – Warszawa: Państw. wydaw. nauk., 1975. – 481 p.

Одержано 17.03.15