УДК 517.5

В. Ф. Бабенко (Днепропетр. нац. ун-т им. О. Гончара),
В. В. Бабенко (Ун-т Юты, США),
М. В. Полищук (Днепропетр. нац. ун-т им. О. Гончара)

ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ МНОГОЗНАЧНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОБОБЩЕННЫМИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ

We generalize some known results on the best, best linear, and best one-sided approximations by trigonometric polynomials from the classes of 2π-periodic functions presented in the form of convolutions to the case of classes of set-valued functions.

Одержано узагальнення деяких відомих результатів щодо найкращих, найкращих лінійних і найкращих односторонніх наближень тригонометричними поліномами класів числових 2π-періодичних функцій, зображених у вигляді згортки, на випадок класів багатозначних функцій.

1. Введение. В теории приближений хорошо известны результаты по точному решению задач наилучшего, наилучшего линейного и наилучшего одностороннего приближения классов периодических функций, представимых в виде свертки, тригонометрическими полиномами. Обзор и изложение большинства имеющихся в этих направлениях результатов, а также дальнейшие ссылки можно найти в статьях [1, 2] и монографиях [3, 4]. Цель данной работы — распространение некоторых из этих результатов на случай многозначных функций.

Задачи об аппроксимации многозначных функций начали рассматривать относительно недавно. Обзор и изложение ряда известных в этом направлении результатов можно найти в [8 – 11].

Кратко опишем структуру работы. Во втором пункте статьи приведены необходимые определения, обозначения и факты, относящиеся к случаю числовых периодических функций. В третьем пункте изложены необходимые определения и факты из теории многозначных функций. В четвертом пункте приведены постановки задач аппроксимации многозначных функций. Пятый пункт посвящен изложению некоторых результатов по приближениям многозначных периодических функций, представимых в виде свертки, „обобщенными тригонометрическими полиномами”.

2. Приближение классов числовых функций. Пусть C и $L_p,\ 1 \le p \le \infty,$ — пространства 2π-периодических функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с соответствующими нормами $\|\cdot\|_C$ и $\|\cdot\|_{Lp}$.

Пусть X есть $L_p,\ 1 \le p < \infty$, или C, и H — конечномерное подпространство пространства X. Для $f \in X$ положим

$$E\,(f,H)_X = \inf_{T\in H} \|f-T\|_X\,. \tag{1}$$

Пусть также $\mathcal{M} \subset X$ — некоторый класс функций,

$$E\,(\mathcal{M},H)_X = \sup_{f\in\mathcal{M}} E_n\,(f,H)_X\,. \tag{2}$$

Величины (1) и (2) называются наилучшими приближениями функции f и класса $\mathcal{M}$ соответственно подпространством H в метрике пространства X.

Далее положим

$$U\,(\mathcal{M},H)_X = \inf_A \sup_{f\in\mathcal{M}} \|f-Af\|_X,$$

где $\inf_A$ берется по всевозможным линейным операторам $A : X \to H$. Величина $U\left(\mathcal{M}, H\right)_X$ называется наилучшим линейным приближением класса $\mathcal{M}$ подпространством H в метрике пространства X.

Как обычно, свертку $K * \varphi$ функций $K \in L_1$ (ядра свертки) и $\varphi \in L_1$ определим равенством

$$K * \varphi(x) = \int\limits_0^{2\pi} K(t)\varphi(x-t)dt.$$

Пусть $F_p = \{\varphi \in L_p, 1 \le p \le \infty \colon \|\varphi\|_p \le 1\}$. Через $K * F_p$ обозначим класс функций вида

$$f(x) = K * \varphi(x), \quad \varphi \in F_p.$$

Как известно (см., например, [1 – 3, 5, 6]), многие важные классы числовых периодических функций являются классами типа $K * F_p$.

Через H^T_{2n-1}, $n = 1, 2, \ldots$, обозначим множество тригонометрических полиномов $T_{n-1}(x)$ порядка не выше $n-1$, т. е. множество функций вида

$$T_{n-1}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \ a_k, b_k \in \mathbb{R}.$$

С. М. Никольским [1] были получены весьма общие условия на ядро K, задающее класс функций, каждое из которых позволяет вычислить величины $E\left(K * F_\infty, H^T_{2n-1}\right)_C$ и $E\left(K * F_1, H^T_{2n-1}\right)_{L_1}$. Мы приведем здесь только условие N^*_n:

Будем говорить, что ядро K удовлетворяет условию N^*_n, если существуют полином $T^* \in \in H^T_{2n-1}$ и точка $\theta \in [0, \pi/n]$ такие, что почти всюду

$$(K(x) - T^*(x))\varphi_n(x-\theta) \ge 0.$$

Здесь и везде ниже

$$\varphi_n(x) := \operatorname{sgn} \sin nx.$$

С. М. Никольский доказал следующую теорему.

Теорема A. *Если ядро K удовлетворяет условию N^*_n, то*

$$E\left(K * F_\infty, H^T_{2n-1}\right)_C = U\left(K * F_\infty, H^T_{2n-1}\right)_C =$$

$$= E_n\left(K * F_1, H^T_{2n-1}\right)_{L_1} = U_n\left(K * F_1, H^T_{2n-1}\right)_{L_1} =$$

$$= E\left(K, H^T_{2n-1}\right)_{L_1} = \|K - T^*\|_{L_1} = \|K * \varphi_n\|_C.$$

Условию N^*_n удовлетворяют практически все важные для теории аппроксимации конкретные ядра (примеры см. в работах [1, 2, 5, 6]).

Относительно наилучших линейных приближений классов периодических функций приведем следующую теорему, которая устанавливается аналогично теореме 1 из работы [7].

Теорема B. *Пусть $p, q \in [1, \infty]$ и $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Если $K \in L_q$, то для любого $n \in \mathbb{N}$*

$$U(K * F_p, H^T_{2n-1})_C = E(K, H^T_{2n-1})_{L_q}.$$

3. Определения и факты, связанные с многозначными функциями. Приведем необходимые определения и факты, связанные с пространствами непустых компактных подмножеств пространства $\mathbb{R}^m$, а также с многозначными функциями. Доказательства приведенных ниже фактов можно найти в [12–14]. Обозначим через $K(\mathbb{R}^m)$ пространство непустых компактных подмножеств пространства $\mathbb{R}^m$. Через $K^c(\mathbb{R}^m)$ будем обозначать совокупность выпуклых элементов пространства $K(\mathbb{R}^m)$. Будем рассматривать многозначные 2π-периодические функции $f\colon \mathbb{R} \to K(\mathbb{R}^m)$, т. е. такие функции f, что $f(x+2\pi) = f(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

Как обычно, линейную комбинацию множеств $A, B \subset K(\mathbb{R}^m)$ определим равенством

$$\lambda A + \mu B = \{\lambda a + \mu b \colon a \in A, b \in B\}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Выпуклую оболочку множества $A \subset K(\mathbb{R}^m)$ будем обозначать через $\mathrm{co}A$.

Если $a = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^m$, то $|a|_{l_2^m} := \sqrt{\sum_{j=1}^m a_j{}^2}$, $(a, \xi) = \sum_{k=1}^m a_k \xi_k$ — скалярное произведение элементов $a = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ и $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$. Для точки $a \in \mathbb{R}^m$ и множества $B \in K(\mathbb{R}^m)$ положим

$$d(a, B) := \inf_{b \in B} |a - b|_{l_2^m}.$$

Это расстояние от точки a до множества B. Для множеств $A, B \in K(\mathbb{R}^m)$ пусть

$$d(A, B) := \sup_{a \in A} d(a, B).$$

Это расстояние от множества A до множества B. Хаусдорфова метрика δ в пространстве $K(\mathbb{R}^m)$ определяется следующим образом. Если $A, B \in K(\mathbb{R}^m)$, то

$$\delta(A, B) := \max\{d(A, B), d(B, A)\}.$$

Отметим, что $K(\mathbb{R}^m)$ и $K^c(\mathbb{R}^m)$ с хаусдорфовой метрикой являются полными метрическими пространствами.

Метрика $\delta\,(A, B)$ имеет следующие свойства:

$$\delta\,(\lambda A, \lambda B) = \lambda \delta\,(A, B) \qquad \forall \lambda > 0 \quad \forall A, B \in K(\mathbb{R}^m),$$

$$\delta\,(A + B, C + D) \le \delta\,(A, C) + \delta\,(B, D) \qquad \forall A,\ B,\ C,\ D \in K(\mathbb{R}^m),$$

$$\delta(\mathrm{co}\, A, \mathrm{co}\, B) \le \delta(A, B) \qquad \forall A, B \in K(\mathbb{R}^m),$$

$$\delta(\alpha A, \beta A) \le |\alpha - \beta| \|A\| \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall A \in K^c(\mathbb{R}^m),$$

где $\|A\| := \delta(A, \{\theta\})$ (здесь и везде ниже $\theta = (0, \ldots, 0)$ — нулевой элемент пространства $\mathbb{R}^m$).

Интеграл Аумана [15] от многозначной функции $f\colon [0, 2\pi] \to K(\mathbb{R}^m)$ определяется как множество всех интегралов от интегрируемых селекций функции f:

$$I(f) = \int_0^{2\pi} f(x)dx := \left\{ \int_0^{2\pi} \phi(x)dx \colon \phi(x) \in f(x) \text{ п. в.},\ \phi \text{ интегрируемо} \right\}.$$

Известно (см., например, [16]), что если функция $f\colon [0,2\pi] \to K(\mathbb{R}^m)$ измерима, а функция $\|f(\cdot)\|$ суммируема (совокупность таких функций обозначим через L_1^A), то

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx \in K^c(\mathbb{R}^m).$$

Нам понадобятся следующие свойства интеграла Аумана для функций $f,\, g \in L_1^A$ (см., например, [13, 14]):

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{co}(f(x))dx = \int_0^{2\pi} f(x)dx,$$

$$\delta\left(\int_0^{2\pi} f(x)dx, \int_0^{2\pi} g(x)dx\right) \le \int_0^{2\pi} \delta(f(x), g(x))dx.$$

4. Задачи аппроксимации, связанные с многозначными функциями. Через $L_p^A,\ 1 \le \le p \le \infty$, обозначим совокупность таких функций $f \in L_1^A$, что $\|f(\cdot)\| \in L_p$. В L_p^A введем метрику, положив

$$\delta_{L_p^A}(f,g) := \|\delta(f(\cdot), g(\cdot))\|_{L_p}.$$

Пусть также

$$\Phi_p := \{f \in L_p^A \colon \delta_{L_p^A}(f, \{\theta\}) \le 1\}.$$

Пусть, как и в пункте 2, задано ядро $K \in L_1$. Мы будем рассматривать задачи аппроксимации классов $K * \Phi_p$ многозначных функций, представимых в виде

$$f(x) = \int_0^{2\pi} K(x-t)g(t)dt, \quad g \in \Phi_p,$$

где интеграл понимается в смысле Аумана. В силу свойств интеграла Аумана функции класса $K * \Phi_p$ являются выпуклозначными.

В качестве аппроксимирующих будем использовать многозначные функции вида

$$\tau(x) = \int_0^{2\pi} T(x-t)h(t)dt, \tag{3}$$

где T — полином из H_{2n-1}^T, а h — функция из L_1^A. Совокупность всевозможных функций такого вида обозначим через SVH_{2n-1}^T.

Для функции $f \in K * \Phi_p,\ 1 \le p \le \infty$, положим

$$\mathcal{E}\left(f, SVH_{2n-1}^T\right)_{L_p^A} = \inf_{\tau \in SVH_{2n-1}^T} \delta_{L_p^A}(f,\tau).$$

Пусть также

$$\mathcal{E}\left(K*\Phi_q, SVH^T_{2n-1}\right)_{L^A_p} = \sup_{f\in K*\Phi_q} \mathcal{E}\left(f, SVH^T_{2n-1}\right)_{L^A_p}.$$

Наряду с задачей отыскания величин $\mathcal{E}\left(K*\Phi_p, SVH^T_{2n-1}\right)_{L^A_p}$, которую можно рассматривать как многозначный аналог задачи наилучшего приближения класса функций тригонометрическими полиномами, будем рассматривать задачу отыскания величин

$$\mathcal{U}\left(K*\Phi_p, SVH^T_{2n-1}\right)_{L^A_q} := \inf_{T\in H^T_{2n-1}} \sup_{f=K*g\in K*\Phi_p} \|K*g - T*g\|_{L^A_q}$$

как многозначный аналог задачи о наилучшем линейном приближении соответствующих классов числовых функций.

Теперь мы несколько расширим совокупность аппроксимирующих функций и вместо совокупности SVH^T_{2n-1} будем использовать совокупность $\widetilde{SVH}^T_{2n-1}$ многозначных функций вида

$$\tilde{\tau}(x) = \tau(x) + B_r(\theta), \tag{4}$$

где $\tau \in SVH^T_{2n-1}$ и $B_r(\theta) = \{z\in\mathbb{R}^m : |z|_{l_2^m} \le 1\},\ r \ge 0.$

Для функции $f \in K*\Phi_p,\ 1 \le p \le \infty$, положим

$$\mathcal{E}^+\left(f, \widetilde{SVH}^T_{2n-1}\right)_{L^A_p} = \inf_{\substack{\tau\in\widetilde{SVH}^T_{2n-1}\\ \forall x\ f(x)\subset\tau(x)}} \delta_{L^A_p}(f,\tau).$$

Задача отыскания (оценки) величины

$$\mathcal{E}^+\left(K*\Phi_q, \widetilde{SVH}^T_{2n-1}\right)_{L^A_p} = \sup_{f\in K*\Phi_q} \mathcal{E}^+\left(f, \widetilde{SVH}^T_{2n-1}\right)_{L^A_p}$$

является многозначным аналогом задачи наилучшего одностороннего приближения классов числовых функций и, по мнению авторов, представляет определенный интерес.

5. Полученные результаты.

Теорема 1. *Пусть $n\in\mathbb{N}$, $p,\, q\in[1,\infty]$ и $p^{-1}+q^{-1}=1$. Если $K\in L_q$, то*

$$\mathcal{E}\left(K*\Phi_p, SVH^T_{2n-1}\right)_{L^A_\infty} \le \mathcal{U}\left(K*\Phi_p, SVH^T_{2n-1}\right)_{L^A_\infty} \le E_n\left(K, H^T_{2n-1}\right)_{L_q}. \tag{5}$$

Если $K\in L_1$, то для $p\in[1,\infty]$

$$\mathcal{E}\left(K*\Phi_p, SVH^T_{2n-1}\right)_{L^A_p} \le \mathcal{U}\left(K*\Phi_p, SVH^T_{2n-1}\right)_{L^A_p} \le E_n\left(K, H^T_{2n-1}\right)_{L_1}. \tag{6}$$

Доказательство. Установим сначала неравенство (5). Пусть $T^*\in H^T_{2n-1}$ — полином наилучшего L_q-приближения для K и $g\in\Phi_p$. Использовав свойства хаусдорфовой метрики и интеграла, оценим $\delta(K*g(x), T^**g(x))$:

$$\delta(K*g(x), T^**g(x)) = \delta\left(\int_0^{2\pi} K(x-t)\, g(t)dt, \int_0^{2\pi} T^*(x-t)\, g(t)dt\right) =$$

$$= \delta\left(\int_0^{2\pi} K(x-t)\, \mathrm{co}\, g(t)dt, \int_0^{2\pi} T^*(x-t)\, \mathrm{co}\, g(t)dt\right) \le$$

$$\leq \int\limits_0^{2\pi} \delta\left(K(x-t)\mathrm{co}\, g(t), T^*(x-t)\mathrm{co}\, g(t)\right) dt \leq$$

$$\leq \int\limits_0^{2\pi} |K(x-t) - T^*(x-t)| \delta\left(\mathrm{co}\, g(t), \{\theta\}\right) dt.$$

Таким образом,

$$\delta(K * g(x), T^* * g(x)) \leq \int\limits_0^{2\pi} |K(x-t) - T^*(x-t)| \delta\left(\mathrm{co}\, g(t), \{\theta\}\right) dt. \tag{7}$$

Применяя неравенство Гельдера, получаем

$$\|\delta(K * g(\cdot), T^* * g(\cdot))\|_{L_\infty} \leq$$

$$\leq \max_{x \in \mathbb{R}} \left(\int\limits_0^{2\pi} |K(x-t) - T^*(x-t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_0^{2\pi} \delta\left(\mathrm{co}\, g(t), \{\theta\}\right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq E_n\left(K, H_{2n-1}^T\right)_{L_q}.$$

Соотношение (5) установлено.

Пусть теперь $K \in L_1$, $f = K * g \in K * \Phi_p$ и $T^* \in H_{2n-1}^T$ — полином наилучшего L_1-приближения для K. Применяя неравенство (7) и обобщенное неравенство Минковского, имеем

$$\|\delta(K * g(\cdot), T^* * g(\cdot))\|_{L_p} \leq \left\| \int\limits_0^{2\pi} |K(\cdot - t) - T^*(\cdot - t)| \delta\left(\mathrm{co}\, g(t), \{\theta\}\right) dt \right\|_{L_p} \leq$$

$$\leq \|K - T^*\|_{L_1} \|g(\cdot)\|_{L_p^A} \leq E(K, H_{2n-1}^T)_{L_1},$$

так что

$$\mathcal{E}\left(K * \Phi_p, SVH_{2n-1}^T\right)_{L_p^A} \leq \mathcal{U}\left(K * \Phi_p, SVH_{2n-1}^T\right)_{L_p^A} \leq E_n\left(K, H_{2n-1}^T\right)_{L_1}.$$

Соотношение (6) установлено.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Если ядро $K(t)$ удовлетворяет условию N_n^*, то при $p = 1$ или $p = \infty$ справедливо*

$$\mathcal{E}\left(K * \Phi_p, SVH_{2n-1}^T\right)_{L_p^A} = \mathcal{U}\left(K * \Phi_p, SVH_{2n-1}^T\right)_{L_p^A} =$$

$$= E\left(K * F_p, H_{2n-1}^T\right)_{L_p} = \|K * \varphi_n\|_{L_\infty},$$

где $\varphi_n(x) = \mathrm{sign} \sin nx$, $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. При $p = 1$ и $p = \infty$ оценка

$$\mathcal{E}\left(K * \Phi_p, SVH_{2n-1}^T\right)_{L_p^A} \leq \mathcal{U}\left(K * \Phi_p, SVH_{2n-1}^T\right)_{L_p^A} \leq$$

$$\leq E\left(K, H_{2n-1}^T\right)_{L_1} = \|K * \varphi_n\|_{L_\infty}$$

следует из теоремы 1 и теоремы A.

Установим оценку снизу сначала для $p = \infty$. Выберем произвольное $a \in \mathbb{R}^m$ так, что $\delta^h(\{a\}, \{\theta\}) = |a|_{l_2^m} = 1$. Тогда $K * (\varphi_n(\cdot)\{a\}) = K * \varphi_n(\cdot) \cdot \{a\} \in \Phi_\infty$.

Пусть также $\tau \in SVH_{2n-1}^T$ имеет вид (3) и ψ — произвольная интегрируемая селекция из функции h. Тогда

$$\|\delta(K * \varphi_n(\cdot) \cdot \{a\}, \tau(\cdot))\|_{L_\infty} = \max_{x\in\mathbb{R}} \delta(K * \varphi_n(x) \cdot \{a\}, \tau(x)) \geq$$

$$\geq \max_{x\in\mathbb{R}} d(\tau(x), K * \varphi_n(x) \cdot \{a\}) = \max_{x\in\mathbb{R}} d\left(\int_0^{2\pi} T(x-t)h(t)dt, K * \varphi_n(x) \cdot \{a\}\right) \geq$$

$$\geq \max_{x\in\mathbb{R}} \left|\int_0^{2\pi} T(x-t)\psi(t)dt - K * \varphi_n(x) \cdot \{a\}\right|_{l_2^m} =$$

$$= \max_{x\in\mathbb{R}} \sup_{\substack{\xi\in\mathbb{R}^m \\ |\xi|_{l_2^m}=1}} \left|\left(\xi, \int_0^{2\pi} T(x-t)\psi(t)dt\right) - K * \varphi_n(x) \cdot (\xi, a)\right| =$$

$$= \max_{x\in\mathbb{R}} \sup_{\substack{\xi\in\mathbb{R}^m \\ |\xi|_{l_2^m}=1}} \left|\int_0^{2\pi} T(x-t)\left(\xi, \psi(t)\right) dt - K * \varphi_n(x) \cdot (\xi, a)\right| \geq$$

$$\geq \sup_{\substack{\xi\in\mathbb{R}^m \\ |\xi|_{l_2^m}=1}} |(\xi, a)| \max_{x\in\mathbb{R}} |K * \varphi_n(x)| = \|K * \varphi_n\|_{L_\infty}$$

(последнее неравенство в приведенной выкладке имеет место в силу теоремы Чебышева об альтернансе). Следовательно,

$$\mathcal{E}\left(K * \Phi_\infty, SVH_{2n-1}^T\right)_{L_\infty^A} = \sup_{f\in K*\Phi_\infty} \inf_{\tau\in SVH_{2n-1}^T} \|\delta\left(f(\cdot), \tau(\cdot)\right)\|_\infty \geq$$

$$\geq \inf_{\tau\in SVH_{2n-1}^T} \|\delta(K * \varphi_n(\cdot) \cdot \{a\}, \tau(\cdot))\|_{L_\infty} \geq \|K * \varphi_n\|_{L_\infty}.$$

Оценка снизу, а с ней и утверждение теоремы для случая $p = \infty$ доказаны.

Теперь установим оценку снизу при $p = 1$. Выберем произвольное $a \in \mathbb{R}^m$ так, что $\delta(\{a\}, \{\theta\}) = |a|_{l_2^m} = 1$, и произвольную функцию $g \in F_1$. Ясно, что $g(\cdot) \cdot \{a\} \in \Phi_1$ и $f(\cdot) = K * g(\cdot) \cdot \{a\} \in K * \Phi_1$.

Пусть $\tau \in SVH_{2n-1}^T$ имеет вид (3) и ψ — произвольная интегрируемая селекция из функции h. Тогда

$$\|\delta(f(\cdot),\tau(\cdot))\|_{L_1} = \int\limits_0^{2\pi} \delta(K*g(x)\cdot\{a\},\tau(x))dx \geq$$

$$\geq \int\limits_0^{2\pi} d(\tau(x), K*g(x)\cdot\{a\})dx = \int\limits_0^{2\pi} d\left(\int\limits_0^{2\pi} T(x-t)h(t)dt, K*g(x)\cdot\{a\}\right)dx \geq$$

$$\geq \int\limits_0^{2\pi}\left|\int\limits_0^{2\pi} T(x-t)\psi(t)dt - K*g(x)\cdot\{a\}\right|_{l_2^m} dx =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \sup_{\substack{\xi\in\mathbb{R}^m\\ |\xi|_{l_2^m}=1}} \left|\left(\xi, \int\limits_0^{2\pi} T(x-t)\psi(t)dt\right) - K*g(x)\cdot(\xi,a)\right| dx =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \sup_{\substack{\xi\in\mathbb{R}^m\\ |\xi|_{l_2^m}=1}} \left|\int\limits_0^{2\pi} T(x-t)\left(\xi,\psi(t)\right)dt - K*g(x)\cdot(\xi,a)\right| dx \geq$$

$$\geq \sup_{\substack{\xi\in\mathbb{R}^m\\ |\xi|_{l_2^m}=1}} \int\limits_0^{2\pi} \left|\int\limits_0^{2\pi} T(x-t)\left(\xi,\psi(t)\right)dt - K*g(x)\cdot(\xi,a)\right| dx \geq$$

$$\geq \sup_{\substack{\xi\in\mathbb{R}^m\\ |\xi|=1}} |(\xi,a)| E(K*g, H_{2n-1}^T)_{L_1} = E(K*g, H_{2n-1}^T)_{L_1}.$$

Таким образом,

$$\mathcal{E}\left(K*g\cdot\{a\}, SVH_{2n-1}^T\right)_{L_1^A} \geq E\left(K*g, H_{2n-1}^T\right)_{L_1},$$

так что с учетом теоремы А получаем

$$\mathcal{E}\left(K*\Phi_1, SVH_{2n-1}^T\right)_{L_1^A} \geq E\left(K*F_1, H_{2n-1}^T\right)_{L_1} = \|K*\varphi_n\|_{L_\infty}.$$

Оценка снизу в случае $p=1$ установлена.

Теорема 2 доказана.

Оценка снизу, относящаяся к случаю $p=1$, допускает следующее обобщение.

Теорема 3. *Для любого ядра $K \in L_1$, любых p, $q \in [1,\infty]$, $q \leq p$, и любого $n \in \mathbb{N}$*

$$\mathcal{E}\left(K*\Phi_p, SVH_{2n-1}^T\right)_{L_q^A} \geq E\left(K*F_p, H_{2n-1}^T\right)_{L_q}.$$

Доказательство. Выберем произвольное $a \in \mathbb{R}^m$ так, что $|a|_{l_2^m} = 1$, и произвольную функцию $g \in F_p$. Ясно, что $g(\cdot) \cdot \{a\} \in \Phi_p$ и $f(\cdot) = K * g(\cdot) \cdot \{a\} \in K * \Phi_p$.

Как и в доказательстве предыдущей теоремы, пусть $\tau \in SVH_{2n-1}^T$ имеет вид (3) и ψ — произвольная интегрируемая селекция из функции h. Тогда

$$\|\delta(f(\cdot), \tau(\cdot))\|_{L_q} = \left(\int\limits_0^{2\pi} \delta(K * g(x) \cdot \{a\}, \tau(x))^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \geq$$

$$\geq \left(\int\limits_0^{2\pi} d(\tau(x), K * g(x) \cdot \{a\})^q dx \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\int\limits_0^{2\pi} d \left(\int\limits_0^{2\pi} T(x-t) h(t) dt, K * g(x) \cdot \{a\} \right)^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \geq$$

$$\geq \left(\int\limits_0^{2\pi} \left| \int\limits_0^{2\pi} T(x-t) \psi(t) dt - K * g(x) \cdot \{a\} \right|_{l_2^m}^q dx \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\int\limits_0^{2\pi} \sup_{\substack{\xi \in \mathbb{R}^m \\ |\xi|_{l_2^m} = 1}} \left| \left(\xi, \int\limits_0^{2\pi} T(x-t) \psi(t) dt \right) - K * g(x) \cdot (\xi, a) \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \geq$$

$$\geq \sup_{\substack{\xi \in \mathbb{R}^m \\ |\xi|_{l_2^m} = 1}} \left(\int\limits_0^{2\pi} \left| \int\limits_0^{2\pi} T(x-t) \left(\xi, \psi(t) \right) dt - K * g(x) \cdot (\xi, a) \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \geq$$

$$\geq \sup_{\substack{\xi \in \mathbb{R}^m \\ |\xi| = 1}} |(\xi, a)| E(K * g, H_{2n-1}^T)_{L_q} = E(K * g, H_{2n-1}^T)_{L_q}.$$

Таким образом,

$$\mathcal{E} \left(K * g \cdot \{a\}, SVH_{2n-1}^T \right)_{L_q^A} \geq E \left(K * g, H_{2n-1}^T \right)_{L_q},$$

так что

$$\mathcal{E} \left(K * \Phi_p, SVH_{2n-1}^T \right)_{L_q^A} \geq E \left(K * F_p, H_{2n-1}^T \right)_{L_q}.$$

Теорема 3 доказана.

Следующая теорема дает многозначный аналог теоремы B.

Теорема 4. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $p, q \in [1, \infty]$ *и* $p^{-1} + q^{-1} = 1$. *Если* $K \in L_q$, *то*

$$\mathcal{U} \left(K * \Phi_p, SVH_{2n-1}^T \right)_{L_\infty^A} = E_n \left(K, H_{2n-1}^T \right)_{L_q}.$$

Доказательство. Неравенство

$$\mathcal{U}\left(K*\Phi_p, SVH^T_{2n-1}\right)_{L^A_\infty} \le E_n\left(K, H^T_{2n-1}\right)_{L_q}$$

следует из теоремы 1. Докажем неравенство противоположного смысла.

Выберем произвольное $a \in \mathbb{R}^m$ так, что $|a|_{l_2^m} = 1$. Ясно, что для произвольной функции $g \in F_p$ будет $g(\cdot)\cdot\{a\} \in \Phi_p$ и $f(\cdot) = K * g(\cdot)\cdot\{a\} \in K*\Phi_p$.

Для любого $T \in H^T_{2n-1}$ будем иметь

$$\delta(K*g(x)\{a\}, T*g(x)\{a\}) = |K*g(x) - T*g(x)|\cdot|a|_{l_2^m} = |K*g(x) - T*g(x)|.$$

Поэтому

$$\sup_{g\in\Phi_p}\|\delta(K*g(x), T*g(x))\|_{L_\infty} \ge \sup_{g\in F_p}\|\delta(K*g(x)\{a\}, T*g(x)\{a\})\|_{L_\infty} =$$

$$= \sup_{g\in F_p}\|K*g(x) - T*g(x)\|_{L_\infty} = \sup_{g\in F_p}\max_{x\in\mathbb{R}}\left|\int\limits_0^{2\pi}(K(x-t) - T(x-t)g(t)dt\right| =$$

$$= \max_{x\in\mathbb{R}}\sup_{g\in F_p}\left|\int\limits_0^{2\pi}(K(x-t) - T(x-t))g(t)dt\right| = \max_{x\in\mathbb{R}}\|K(x-\cdot) - T(x-\cdot)\|_{L_q} =$$

$$= \|K - T\|_{L_q} \ge E(K, H^T_{2n-1})_{L_q}.$$

Теорема 4 доказана.

В заключение приведем теорему, которая дает оценку сверху для наилучшего приближения класса многозначных функций обобщенными полиномами вида (4), значения которых при каждом $x \in \mathbb{R}$ содержат в качестве подмножества значение аппроксимируемой функции.

Теорема 5. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $p, q \in [1,\infty]$ и $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Если $K \in L_q$, то*

$$\mathcal{E}^+\left(K*\Phi_p, \widetilde{SVH}^T_{2n-1}\right)_{L^A_\infty} \le 2E_n\left(K, H^T_{2n-1}\right)_{L_q}.$$

Доказательство. Пусть $T^* \in H^T_{2n-1}$ — полином наилучшего L_q-приближения для K. Пусть также задана функция $f = K*\Phi_p$. В силу теоремы 1 для любого $x \in \mathbb{R}$

$$\delta(K*g(x), T^* * g(x)) \le E(K, H^T_{2n-1})_{L_q} =: e.$$

Положим

$$\widetilde{\tau}(x) = T^* * g(x) + B_e(\theta).$$

Нетрудно видеть, что

$$K*g(x) \subset \widetilde{\tau}(x)$$

и

$$\delta(K*g(x), \widetilde{\tau}(x)) = \delta(K*g(x), T^**g(x) + B_e(\theta)) \le$$

$$\le \delta(K*g(x), T^**g(x)) + \delta(B_e(\theta), \theta) \le 2E(K, H^T_{2n-1})_{L_q}.$$

Отсюда и следует утверждение теоремы.

Литература

1. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – **10**, № 3. – С. 207 – 256.
2. *Дзядык В. К.* О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых интегралами от линейной комбинации абсолютно монотонных ядер // Мат. заметки. – 1974. – **16**, № 5. – С. 691 – 701.
3. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближений. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
4. *Корнейчук Н. П., Лигун А. А., Доронин В. Г.* Аппроксимация с ограничениями. – Киев: Наук. думка, 1982. – 252 с.
5. *Бабенко В. Ф.* Приближение классов сверток // Сиб. мат. журн. – 1987. – **28**, № 5. – С. 6 – 21.
6. *Бабенко В. Ф., Лигун А. А.* Развитие исследований по точному решению экстремальных задач теории наилучшего приближения // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 1. – С. 4 – 17.
7. *Бабенко В. Ф., Пичугов С. А.* О наилучшем линейном приближении некоторых классов дифференцируемых периодических функций // Мат. заметки. – 1980. – **27**, № 5. – С. 683 – 689.
8. *Vitale R. A.* Approximations of convex set-valued functions // J. Approxim. Theory. – 1979. – **26**. – P. 301 – 316.
9. *Artstein Z.* Piecewise linear approximations of set-valued maps // J. Approxim. Theory. – 1989. – **56**. – P. 41 – 47.
10. *Dyn N., Farkhi E.* Approximations of set-valued functions with compact images – an overview, approximation and probability // Banach Center Publ. – 2006. – **72**. – P. 1 – 14.
11. *Dyn N., Farkhi E., Mokhov A.* Approximation of set-valued functions: adaptation of classical approximation operators. – Hackensack: Imperial College Press, 2014. – 153 p.
12. *Половинкин Е. С., Балашов М. В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. – М.: Физматлит, 2004. – 416 с.
13. *Aubin J. P., Frankowska H.* Set-valued analysis. – Boston: Birkhäuser, 1990. – 461 p.
14. *Hu S., Papageorgiou N.* Handbook of multivalued analysis. Vol. 1. Theory. – Kluwer Acad. Publ., 1997. – 964 p.
15. *Aumann R. J.* Integrals of set-valued functions // J. Math. Anal. and Appl. – 1965. – **12**, № 1. – P. 1 – 12.
16. *Асеев С. М.* Квазилинейные операторы и их применение в теории многозначных отображений // Труды Мат. ин-та АН СССР. – 1985. – **167**. – С. 25 – 52.

Получено 03.05.15