УДК 517.8

**М. Є. Дудкін, В. І. Козак** (Нац. техн. ун-т України „КПІ”, Київ)

# БЛОЧНІ МАТРИЦІ ТИПУ ЯКОБІ, ЩО ВІДПОВІДАЮТЬ ДВОВИМІРНІЙ ПРОБЛЕМІ МОМЕНТІВ: ПОЛІНОМИ ДРУГОГО РОДУ ТА ФУНКЦІЯ ВЕЙЛЯ

We continue our investigations of Jacobi-type symmetric matrices corresponding to the two-dimensional real power moment problem. We introduce polynomials of second kind and the corresponding analog of the Weyl function.

Продолжены начатые авторами ранее исследования симметричных матриц типа Якоби, соответствующих двумерной действительной проблеме моментов. Введены полиномы второго рода и соответствующий аналог функции Вейля.

**1. Вступ.** Велику і значну частину наукової діяльності Ю. М. Березанського присвячено вивченню властивостей матриць типу Якобі та їх блокових аналогів [2 – 4, 6, 7]. Основним інструментом дослідження тут є створений Ю. М. Березанським і доведений ним до досконалості метод розкладу за узагальненими власними векторами [2 – 5, 7]. Деякі із таких типу Якобі (зокрема, симетричних) блокових матриць досліджувалися в [6, 7, 9 – 11, 17]. У [13] не тільки досліджувались, але й застосовувалися блокові матриці до інтегрування деяких диференціально-різницевих рівнянь (блокових аналогів ланцюжків Тода, де блоки відповідають матрицям, що пов’язані з комплексною проблемою моментів). Матриці з [17] відносяться до двовимірної дійсної проблеми моментів і є безпосереднім узагальненням звичайних матриць Якобі, що відповідають класичній проблемі моментів Гамбургера та виникаючим при цьому поліномам [1, 2, 20]. У [17] побудовано поліноми першого роду, які відповідають двовимірній дійсній проблемі моментів. Тепер, як доповнення до попередніх досліджень, ми пропонуємо поліноми другого роду та відповідну функцію типу Вейля.

Для блокових матриць, що відповідають двовимірній дійсній проблемі моментів, на відміну від випадку комплексної проблеми моментів можливі фізичні застосування зі зв’язаними маятниками.

Зауважимо, що відомі різні узагальнення поліномів другого роду, наприклад у випадку матричної проблеми моментів і відповідних матричних поліномів [14, 15, 18, 19, 22 – 24]. Але всі відомі узагальнення стосуються лише випадку однієї змінної.

Для опису поліномів першого і другого роду необхідною є побудова відповідної спектральної теорії. Таку побудову широко розвинено в роботах Ю. М. Березанського [2, 5, 7, 12] і, зокрема, вичерпно викладено в [7]. У подальших дослідженнях можливі використання поліномів другого роду для з’ясування питань, традиційних для класичної проблеми моментів Гамбургера, а саме: чи однозначно задані матриці визначають відповідну пару комутуючих самоспряжених операторів? У разі неоднозначності можна буде описати всі такі пари.

**2. Попередні відомості.** З метою введення основних об’єктів дослідження та їх взаємозв’язків опишемо спочатку коротко двовимірну дійсну проблему моментів та відповідну їй спектральну теорію блокових матриць типу Якобі, детально описану в [17].

Взагалі дійсна двовимірна проблема моментів полягає у пошуку умов для заданої двоіндексної послідовності $\{s_{m,n}\}$, $m, n \in \mathbb{N}_0$, дійсних чисел так, щоб існувала міра $d\rho(x, y)$ на дійсній площині $\mathbb{R}^2$ і виконувалися рівності

$$s_{m,n} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} x^m y^n d\rho(x,y), \qquad m,n \in \mathbb{N}_0. \tag{1}$$

Як відомо, для зображення (1) необхідною є додатна визначеність послідовності $\{s_{m,n}\}_{m,n=0}^{\infty}$, тобто

$$\sum_{j,k,m,n=0}^{\infty} f_{j,k}\bar{f}_{m,n}s_{j+m,k+n} \geq 0$$

для всіх фінітних (скінченних) послідовностей комплексних чисел $(f_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$, $f_{j,k} \in \mathbb{C}$.

Така міра $d\rho(x,y)$ існує і зображення (1) є єдиним для заданої послідовності $\{s_{m,n}\}_{m,n=0}^{\infty}$, якщо крім додатної визначеності виконується умова [17]

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[p]{\sum_{k=0}^{p} C_p^k \sqrt{s_{4p-4k,4k}}}} = \infty.$$

Побудови відповідних матриць аналогічні одновимірному випадку [1], але замість звичайного простору $l_2$ використовується простір

$$\mathbf{l}_2 = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \ldots, \qquad \mathcal{H}_n = \mathbb{C}^{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$

$$\mathbf{l}_2 \ni f = (f_n)_{n=0}^{\infty}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{\mathcal{H}_n}^2 < \infty. \tag{2}$$

Вектор $x_n$ із простору $\mathcal{H}_n = \mathbb{C}^{n+1}$ має вигляд $x_n = (x_{n;0},\ldots,x_{n;n})$. Для кожного $\alpha \in \in \{0,\ldots,n\}$ число $x_{n;\alpha}$ є координатою базисного вектора $\delta_{n;\alpha} = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0) \in \mathcal{H}_n \in \in \mathbf{l}_2$ (одиниця занаходиться на $\alpha$-му місті), $\delta_0 \equiv \delta_{0;0} = (1)$. Узагальнення звичайної матриці Якобі, що відповідає класичній проблемі моментів Гамбургера, набирає вигляду пари блокових матриць:

$$J_A = \begin{bmatrix} b_0 & c_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_0 & b_1 & c_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_1 & b_2 & c_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \qquad \begin{array}{lcl} a_n & : & \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}, \\ b_n & : & \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_n, \\ c_n & : & \mathcal{H}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{H}_n,\ n \in \mathbb{N}_0, \end{array} \tag{3}$$

$$J_B = \begin{bmatrix} w_0 & v_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ u_0 & w_1 & v_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & u_1 & w_2 & v_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \qquad \begin{array}{lcl} u_n & : & \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}, \\ w_n & : & \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_n, \\ v_n & : & \mathcal{H}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{H}_n,\ n \in \mathbb{N}_0. \end{array} \tag{4}$$

Матриці (3) і (4) на фінітних векторах $\mathbf{l}_{\mathrm{fin}} \subset \mathbf{l}_2$ задають два оператори

$$\begin{gathered} \mathbf{l}_2 \supset \mathbf{l}_{\mathrm{fin}} \ni f \longrightarrow J_A f = ((J_A f)_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbf{l}_2, \\ (J_A f)_n = a_{n-1}f_{n-1} + b_n f_n + c_n f_{n+1}, \\ \mathbf{l}_2 \supset \mathbf{l}_{\mathrm{fin}} \ni f \longrightarrow J_B f = ((J_B f)_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbf{l}_2, \\ (J_B f)_n = u_{n-1}f_{n-1} + w_n f_n + v_n f_{n+1}, \end{gathered} \tag{5}$$

де для зручності вважаємо $f_{-1} := 0$. Без втрати загальності матриці $J_A$, $J_B$ та відповідні оператори позначимо тими самими символами $J_A$ і $J_B$.

Далі, припустимо, що ці матриці мають особливу внутрішню структуру, а саме, матриці $a_n$ і $c_n$ мають певну форму та їхні коефіцієнти задовольняють деякі властивості:

$$a_n = \left.\underbrace{\begin{bmatrix} a_{n;0,0} & * & * & \ldots & * \\ a_{n;1,0} & * & * & \ldots & * \\ 0 & a_{n;2,1} & * & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n;n+1,n} \end{bmatrix}}_{n+1}\right\} {\scriptstyle n+2},$$

$$c_n = \left.\underbrace{\begin{bmatrix} c_{n;0,0} & c_{n;0,1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ * & * & c_{n;1,2} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \ldots & c_{n;n-1,n} & 0 \\ * & * & * & \ldots & * & c_{n;n,n+1} \end{bmatrix}}_{n+2}\right\} {\scriptstyle n+1}, \tag{6}$$

$$a_{n;1,0}, a_{n;2,1}, \ldots, a_{n;n+1,n} > 0, \quad c_{n;0,1}, c_{n;1,2}, \ldots, c_{n;n,n+1} > 0, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

$$u_n = \left.\underbrace{\begin{bmatrix} u_{n;0,0} & * & * & \ldots & * \\ 0 & u_{n;1,1} & * & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & u_{n;n,n} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}}_{n+1}\right\} {\scriptstyle n+2},$$

$$v_n = \left.\underbrace{\begin{bmatrix} v_{n;0,0} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ * & v_{n;1,1} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & \ldots & v_{n;n-1,n-1} & 0 & 0 \\ * & * & \ldots & * & v_{n;n,n} & 0 \end{bmatrix}}_{n+2}\right\} {\scriptstyle n+1}, \tag{7}$$

$$u_{n;0,0}, u_{n;1,1}, \ldots, u_{n;n,n} > 0, \quad v_{n;0,0}, v_{n;1,1}, \ldots, v_{n;n,n} > 0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

У формулах (3) і (4) блоки $b_n$ і $w_n$ є симетричними $((n+1) \times (n+1))$-матрицями, $n \in \mathbb{N}_0$.

Оскільки мова йде про симетричні матриці, то $a_{n;\alpha,\beta} = c_{n;\beta,\alpha}$, $\alpha = 0, 1, \ldots, n$, $\beta = 0, 1, \ldots, n+1$, $n \in \mathbb{N}$, і $u_{n;\alpha,\beta} = v_{n;\beta,\alpha}$, $\beta = 0, 1, \ldots, n$, $\alpha = 0, 1, \ldots, n+1$, $n \in \mathbb{N}_0$.

За додаткових умов на блоки $a_n$, $b_n$, $c_n$ і $u_n$, $w_n$, $v_n$, $n \in \mathbb{N}_n$ (див. розділ 6 [17]), матриці $J_A$ і $J_B$ є переставними: $J_A J_B = J_B J_A$ (на фінітних векторах $\mathbf{l}_{\text{fin}} \subset \mathbf{l}_2$).

Для подальших досліджень припустимо, що породжені виразами (3) і (4) оператори є самоспряженими і комутують у строгому резольвентному сенсі, або, якщо оператори необмежені і симетричні із нетривіальними індексами дефекту, вважатимемо, що вони мають комутуючі самоспряжені розширення.

У такому (двовимірному) випадку узагальнені власні вектори $P(x,y)$ мають вигляд послідовності $P(x,y) = P_n(x,y)_{n=0}^{\infty}$, де $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $P_n(x,y) \in \mathcal{H}_n$ — вектор, коефіцієнтами якого є поліноми $n$-го порядку за змінними $x$ та $y$, а саме

$$P_n(x,y) = (P_{n;0}(x,y), P_{n;1}(x,y), \ldots, P_{n;n}(x,y)), \tag{8}$$

де $P_{n,\alpha}$ — лінійна комбінація елементів

$$x^0y^0; \quad x^0y^1, x^1y^0; \quad x^0y^2, x^1y^1, x^2y^0; \quad \ldots\,; \quad x^0y^n, x^1y^{n-1}, \ldots, x^{n-\alpha}y^{\alpha}, \quad \ldots$$

для $\alpha = 0, \ldots, n$.

Поліноми (8) є розв'язками системи двох різницевих рівнянь

$$J_A P(x,y) = xP(x,y), \qquad J_B P(x,y) = yP(x,y). \tag{9}$$

Тут у двовимірному випадку виникають два рівняння, на відміну від класичного випадку, де існує лише одне. Умови (6) і (7) гарантують розв'язність системи (9).

Тепер коротко зауважимо, як утворилися матриці (3) і (4) із властивостями (6) і (7). У даному випадку для побудови $P_n(x,y)$ проводиться ортогоналізація за Шмідтом системи $x^n y^m$, $m,n \in \mathbb{N}_0$, відносно скалярного добутку простору $L_2 = L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y))$ функцій, інтегровних із квадратом на $\mathbb{R}^2$ відносно міри Бореля $d\rho(x,y)$.

Припустимо, що функції

$$\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \longmapsto x^m y^n, \; m,n \in \mathbb{N}_0, \tag{10}$$

є лінійно незалежними і утворюють тотальну множину в $L_2$, тобто, використовуючи порядок [25]

$$x^0y^0; \quad x^0y^1, x^1y^0; \quad x^0y^2, x^1y^1, x^2y^0; \quad \ldots\,; \quad x^0y^n, x^1y^{n-1}, \ldots, x^ny^0; \quad \ldots \quad , \tag{11}$$

отримуємо систему ортогональних поліномів, поданих у вигляді таблиці

$$\begin{array}{lllll} P_{0;0}(x,y); & P_{1;0}(x,y), & P_{2;0}(x,y), \quad \ldots; & P_{n;0}(x,y), & \ldots \\ & P_{1;1}(x,y); & P_{2;1}(x,y), & P_{n;1}(x,y), & \\ & & P_{2;2}(x,y); & P_{n;2}(x,y), & \\ & & & \quad \ldots & \\ & & & P_{n;n}(x,y), & \end{array} \tag{12}$$

де кожний поліном має вигляд

$$P_{n;\alpha}(x,y) = k_{n;\alpha} x^{\alpha} y^{n-\alpha} + \ldots, \quad n \in \mathbb{N}_0, \qquad \alpha = 0, 1, \ldots, n, \qquad k_{n;\alpha} > 0. \tag{13}$$

Тут $+\ldots$ позначає наступну частину відповідного полінома і для визначеності покладено $P_{0;0}(x,y) := 1$. Таким чином, $P_{n;\alpha}(x,y)$ є лінійною комбінацією елементів

$$\{1;\ x^0y^1, x^1y^0;\ \ldots;\ x^0y^n, x^1y^{n-1}, \ldots, x^{\alpha}y^{n-\alpha}\}. \tag{14}$$

Кожний стовпець у (12) — це вектор $P_n(x,y)$, який є розв'язком (9).

Отже, тепер образи операторів зсуву $J_A x^m y^n = x^{m+1} y^n$ та $J_B x^m y^n = x^m y^{n+1}$ (позначені для простоти також через $J_A$ та $J_B$) у базисі (12) мають вигляд матриць (3) і (4) з властивостями (6) і (7).

Для подальшого запису перетворення Фур'є запишемо скалярний добуток:

$$(f_n, P_n(x,y))_{\mathcal{H}_n} = f_{n;0} P_{n;0}(x,y) + f_{n;1} P_{n;1}(x,y) + \ldots + f_{n;n} P_{n;n}(x,y) \qquad \forall f_n \in \mathcal{H}_n, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

де $f_{n;\alpha}$ — координати вектора $f_n$, $\alpha = 0, 1, \ldots, n$, $k_{n;\alpha} > 0$.

Тепер сформулюємо спектральну теорему для операторів $J_A$ і $J_B$.

**Теорема 1.** *Нехай $J_A$ і $J_B$ — дві блочні симетричні матриці* (3) *і* (4) *з умовами на блоки* (*коефіцієнти*) (6) *і* (7) *відповідно. Припустимо, що ці матриці породжують обмежені самоспряжені комутуючі оператори* (*зі строго циклічним вектором*) *після замикання за неперервністю у просторі* $\mathbf{l}_2$.

*Тоді перетворення Фур'є за узагальненими власними векторами операторів $J_A$ і $J_B$ має вигляд*

$$\mathbf{l}_2 \supset \mathbf{l}_{\mathrm{fin}} \ni f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \longmapsto \hat{f}(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} (f_n, P_n(x,y))_{\mathcal{H}_n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\alpha=0}^{n} \overline{P_{n;\alpha}(x,y)} f_{n;\alpha} \in L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y)) = L_2, \tag{15}$$

*де $d\rho(x,y)$ — спектральна міра операторів $J_A$ і $J_B$. У* (15) *$P_n(x,y) = (P_n(x,y))_{n=0}^{\infty}$ є узагальненим власним вектором пари операторів $J_A$ і $J_B$, $P_n(x,y)$ — вектор, коефіцієнти якого є поліномами за змінними $x$ і $y$ вигляду* (12), (13).

*Після замикання за неперервністю оператор* (15) *є унітарним з $\mathbf{l}_2$ в $L_2$. Образи операторів $J_A$ і $J_B$ є операторами множення на $x$ і $y$ в $L_2$.*

*Рівність Парсеваля має вигляд*

$$(f,g)_{\mathbf{l}_2} = \int_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(x,y)\overline{\hat{g}(x,y)}\, d\rho(x,y),$$

$$(J_A f, g)_{\mathbf{l}_2} = \int_{\mathbb{R}^2} x \hat{f}(x,y)\overline{\hat{g}(x,y)}\, d\rho(x,y), \tag{16}$$

$$(J_B f, g)_{\mathbf{l}_2} = \int_{\mathbb{R}^2} y \hat{f}(x,y)\overline{\hat{g}(x,y)}\, d\rho(x,y)$$

$$\forall f, g \in \mathbf{l}_{\mathrm{fin}}.$$

*Поліноми* $P_{n;\alpha}(x,y)$, $n\in\mathbb{N}$, $\alpha=0,\ldots,n$, *і* $P_{0;0}=1$ *утворюють ортонормовану систему в* $L_2$ *у сенсі*

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\sum_{i=1}^{j}\overline{P_{j;i}(x,y)}f_{j;i}\sum_{i=l}^{k}P_{k;l}(x,y)\overline{f_{k;l}}=\delta_{j,k}(f_j,g_k)_{\mathcal{H}_j},$$

*де* $f_j\in\mathcal{H}_j$, $g_k\in\mathcal{H}_k$, $j,k\in\mathbb{N}_0$. *Матриці* $J_A=(\tau_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$, $\tau_{j,k}=(\tau_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{j,k}$, $J_B=(\theta_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$, $\theta_{j,k}=(\theta_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{j,k}$, *відновлюються за формулами*

$$\begin{gathered}\tau_{j,k;\alpha,\beta}=(J_A\delta_{k,\beta},\delta_{j,\alpha})_{\mathbf{l}_2}=\iint\limits_{\mathbb{R}^2}x\overline{P_{k;\beta}(x,y)}P_{j;\alpha}(x,y)d\rho(x,y),\\ \theta_{j,k;\alpha,\beta}=(J_B\delta_{k,\beta},\delta_{j,\alpha})_{\mathbf{l}_2}=\iint\limits_{\mathbb{R}^2}y\overline{P_{k;\beta}(x,y)}P_{j;\alpha}(x,y)d\rho(x,y).\end{gathered}\tag{17}$$

*Тут* $b_n=\tau_{j,j}$, $c_n=\tau_{j,j+1}$, $a_n=\tau_{j+1,j}$ *і* $w_n=\theta_{j,j}$, $v_n=\theta_{j,j+1}$, $u_n=\theta_{j+1,j}$, $j\in\mathbb{N}_0$.

Детальне доведення теореми 1 див. у [17].

Таким чином, пряма спектральна задача для матриць $J_A$ і $J_B$ полягає у знаходженні (відновленні) спектральної міри операторів $J_A$ і $J_B$. З цією метою шукаються узагальнені власні вектори $P(x,y)=(P_n(x,y))_{n=0}^{\infty}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, які є розв'язками системи (9).

Обернена спектральна задача полягає у знаходженні операторів $J_A$ і $J_B$, тобто відповідних їм матриць вигляду (3) і (4) з внутрішньою структурою (6) і (7), які мають спектральну міру $d\rho(x,y)$ в $\mathbb{R}^2$. У даному випадку це теорема, аналогічна теоремі 2 щодо комплексної проблеми моментів із [13].

**Теорема 2.** *Нехай спектральну міру* $d\rho(x,y)$ *задано так, що система функцій* (10) *є лінійно незалежною і тотальною в* $L_2(\mathbb{R}^2,d\rho(x,y))$ (*наприклад, носій міри* $d\rho(x,y)$ *є обмеженим і містить відкриту підмножину* $\mathbb{R}^2$).

*Тоді ця міра є спектральною мірою пари комутуючих обмежених самоспряжених операторів* $J_A$ *і* $J_B$, *які породжені блоковими тридіагональними* (*типу Якобі*) *матрицями* (3) *і* (4) *з умовами на коефіцієнти* (*блоки*) (6) *і* (7).

*Елементи матриць відновлюються за формулами* (17), *де* $P_{n;\alpha}(x,y)$, $\alpha=0,\ldots,n$, $n\in\mathbb{N}_0$, *отримано за процедурою ортогоналізації за Шмідтом.*

*Якщо задана міра* $d\rho(x,y)$ *є спектральною для пари обмежених комутуючих самоспряжених операторів* $J_A$ *і* $J_B$, *породжених блоковими тридіагональними* (*типу Якобі*) *матрицями* (3) *і* (4) *з умовами* (6) *і* (7), *то відновлені за* $d\rho(x,y)$ *матриці збігаються з* $J_A$ *і* $J_B$.

Доведення теореми 2 відновлюється за матеріалами роботи [17].

**3. Поліноми другого роду.** Отже, розглядаються матриці $J_A$, $J_B$ типу (3) і (4) з умовами (6) і (7) відповідно. Припускається, що матриці $J_A$ і $J_B$ комутують: $J_AJ_bf=J_BJ_Af$, $f\in\mathbf{l}_{\mathrm{fin}}$. Також вважаємо, що породжені матрицями оператори $J_A$ і $J_B$ є обмеженими.

У попередньому пункті йшлося про поліноми першого роду, які є аналогом поліномів першого роду класичної теорії якобієвих матриць. У даному випадку також можна ввести аналог поліномів другого роду.

Поліноми другого роду $Q_n(z_1,z_2)$ визначимо виразом, який узагальнює відомий вираз для поліномів другого роду у класичному випадку, а саме, покладемо

$$Q_n(z_1,z_2) := \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{P_n(\lambda,\mu) - P_n(\lambda,z_2) - P_n(z_1,\mu) + P_n(z_1,z_2)}{(\lambda - z_1)(\mu - z_2)}\, d\rho(\lambda,\mu), \tag{18}$$

де $z_1, z_2 \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}_0$, і $d\rho(\lambda,\mu)$ — міра на $\mathbb{R}^2$ із компактним носієм, що відповідає парі обмежених самоспряжених комутуючих операторів $J_A,\ J_B$.

**Теорема 3.** *Послідовність* $Q(z_1,z_2) = (Q_n(z_1,z_2))_{n=0}^{\infty}$, $z_1,z_2\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, *де* $Q_n(z_1,z_2)$ *задано формулою* (18), *є розв'язком системи різницевих рівнянь із початковими даними*

$$a_{n-1}Q_{n-1}(z_1,z_2) + b_nQ_n(z_1,z_2) + c_nQ_{n+1}(z_1,z_2) = z_1Q_n(z_1,z_2),$$

$$u_{n-1}Q_{n-1}(z_1,z_2) + w_nQ_n(z_1,z_2) + v_nQ_{n+1}(z_1,z_2) = z_2Q_n(z_1,z_2), \tag{19}$$

$$Q_{0;0}(z_1,z_2) = 0, \qquad n\in\mathbb{N}, \quad z_1,z_2\in\mathbb{C},$$

*а отже, і* $Q_{n;0}(z_1,z_2) = Q_{0;n}(z_1,z_2) = 0$, $n\in\mathbb{N}$.

***Доведення.*** Оскільки $P_{0;0}(z_1,z_2)=1$, то з (18) безпосередньо отримуємо

$$Q_{0;0}(z) = 0, \quad z\in\mathbb{C}. \tag{20}$$

Обчислимо $Q_{1;0}(z_1,z_2)$. З (11), (12), (18) і $P_{1;0}(z_1,z_2) = P_{1;0}(z_1)$ робимо висновок, що

$$Q_{1;0}(z_1,z_2) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{P_n(\lambda) - P_n(\lambda) - P_n(z_1) + P_n(z_1)}{(\lambda - z_1)(\mu - z_2)}\, d\rho(\lambda,\mu) \equiv 0 \qquad \forall z_1,z_2\in\mathbb{C}. \tag{21}$$

Обчислимо $Q_{1;1}(z_1,z_2)$. З (11), (12) і (18) маємо $P_{1;1}(z_1,z_2) = \mathrm{l.c.}(1,z_1,z_2) = c_0+c_1z_1+c_2z_2$, де через "l.c." позначено лінійну комбінацію відповідних елементів. Отже, маємо

$$Q_{1;1}(z_1,z_2) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(\lambda - z_1)(\mu - z_2)}\Big((c_0+c_1\lambda+c_2\mu) - (c_0+c_1\lambda+c_2z_2) -$$

$$-(c_0+c_1z_1+c_2\mu) + (c_0+c_1z_1+c_2z_2)\Big)\, d\rho(\lambda,\mu) \equiv 0 \qquad \forall z_1,z_2\in\mathbb{C}. \tag{22}$$

Покажемо, що $Q_{n;0}(z_1,z_2)=0$. Поліном $P_{n;0}(z_1,z_2)$, згідно з (11), (12), має вигляд

$$P_{n;0}(z_1,z_2) = k_{n;0}z_1^n + \tilde{R}_{n-1}(z_1,z_2),$$

де коефіцієнти $k_{n;0}>0$ і

$$\tilde{R}_{n-1}(z_1,z_2) := \mathrm{l.c.}\{P_{0;0}(z_1,z_2), P_{1;0}(z_1,z_2), ..., P_{n-1;n-1}(z_1,z_2)\}.$$

Отже, завдяки (11), (12) і (18) поліном $Q_{n;0}(z_1,z_2)$ можна подати у вигляді

$$Q_{n;0}(z_1,z_2) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(\lambda - z_1)(\mu - z_2)}\Big((k_{n;0}\lambda^n + \tilde{R}_{n-1}(\lambda,\mu)) - (k_{n;0}\lambda^n + \tilde{R}_{n-1}(\lambda,z_2)) -$$

$$-(k_{n;0}z_1^n + \tilde{R}_{n-1}(z_1,\mu)) + (k_{n;0}z_1^n + \tilde{R}_{n-1}(z_1,z_2))\Big)\, d\rho(\lambda,\mu) =: \tilde{Q}_{n-1;n-1}(z_1,z_2),$$

де

$$\tilde{Q}_{n-1;n-1}(z_1, z_2) = \text{l.c.}\{Q_{0;0}(z_1, z_2), Q_{1;0}(z_1, z_2), ..., Q_{n-1;n-1}(z_1, z_2)\}.$$

А оскільки поліноми $Q_{n;\alpha}(z_1, z_2)$ лінійно незалежні, то $Q_{n;0}(z_1, z_2) = 0$.

Покажемо також, що $Q_{n;n}(z_1, z_2) = 0$. Поліном $P_{n;n}(z_1, z_2)$, згідно з (11), (12), має вигляд

$$P_{n;0}(z_1, z_2) = k_{n;n} z_2^n + \tilde{R}_{n-1}(z_1, z_2),$$

де коефіцієнти $k_{n;n} > 0$ і

$$\tilde{R}_{n-1}(z_1, z_2) := \text{l.c.}\{P_{0;0}(z_1, z_2), P_{1;0}(z_1, z_2), ..., P_{n;n-1}(z_1, z_2)\}.$$

Отже, завдяки (11), (12) і (18), поліном $Q_{n;n}(z_1, z_2)$ можна записати у вигляді

$$Q_{n;n}(z_1, z_2) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(\lambda - z_1)(\mu - z_2)} \Big( (k_{n;n}\mu^n + \tilde{R}_{n-1}(\lambda, \mu)) - (k_{n;n} z_2^n + \tilde{R}_{n-1}(\lambda, z_2)) -$$

$$- (k_{n;n}\mu^n + \tilde{R}_{n-1}(z_1, \mu)) + (k_{n;n} z_2^n + \tilde{R}_{n-1}(z_1, z_2)) \Big)\, d\rho(\lambda, \mu) =: \tilde{Q}_{n;n-1}(z_1, z_2),$$

де

$$\tilde{Q}_{n;n-1}(z_1, z_2) = \text{l.c.}\{Q_{0;0}(z_1, z_2), Q_{1;0}(z_1, z_2), ..., Q_{n-1;n}(z_1, z_2)\}.$$

Але оскільки поліноми $Q_n(z_1, z_2)$ є лінійно незалежними, то $Q_{n;n}(z_1, z_2) = 0$.

Останній вираз дає початкові дані з (19).

Для завершення доведення залишилося перевірити, що $Q_n(z_1, z_2)$, $n \in \mathbb{N}$, задовольняє обидва рівняння (19). Розглянемо перше рівняння. Згідно з (18), (11) і (12) маємо

$$(J_A Q(z_1, z_2))_n =$$

$$= \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{(J_A P(\lambda, \mu))_n - (J_A P(\lambda, z_2))_n - (J_A P(z_1, \mu))_n + (J_A P(z_1, z_2))_n}{(\lambda - z_1)(\mu - z_2)}\, d\rho(\lambda, \mu) =$$

$$= \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\lambda P_n(\lambda, \mu) - \lambda P_n(\lambda, z_2) - z_1 P_n(z_1, \mu) + z_1 P_n(z_1, z_2)}{(\lambda - z_1)(\mu - z_2)}\, d\rho(\lambda, \mu) =$$

$$= z_1 \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{P_n(\lambda, \mu) - P_n(\lambda, z_2) - P_n(z_1, \mu) + P_n(z_1, z_2)}{(\lambda - z_1)(\mu - z_2)}\, d\rho(\lambda, \mu) +$$

$$+ \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{P_n(\lambda, \mu) - P_n(\lambda, z_2)}{(\mu - z_2)}\, d\rho(\lambda, \mu) =$$

$$= z_1 Q_n(z_1, z_2) + \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \hat{P}_n(\lambda, \mu, z_2)\, d\rho(\lambda, \mu) \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{23}$$

Згідно з (11) і (12) останній інтеграл у (23) дорівнює нулю, отже, (23) приводить до $(J_A Q(z_1, z_2))_n = z_1 Q_n(z_1, z_2)$, $n \in \mathbb{N}$. Це означає, що перша з рівностей (19) виконується.

Аналогічно,

$$(J_B Q(z_1, z_2))_n =$$

$$= \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{(J_B P(\lambda,\mu))_n - (J_B P(\lambda, z_2))_n - (J_B P(z_1,\mu))_n + (J_B P(z_1, z_2))_n}{(\lambda - z_1)(\mu - z_2)}\, d\rho(\lambda,\mu) =$$

$$= \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\mu P_n(\lambda,\mu) - z_2 P_n(\lambda, z_2) - \mu P_n(z_1,\mu) + z_2 P_n(z_1, z_2)}{(\lambda - z_1)(\mu - z_2)}\, d\rho(\lambda,\mu) =$$

$$= z_2 \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{P_n(\lambda,\mu) - P_n(\lambda, z_2) - P_n(z_1,\mu) + P_n(z_1, z_2)}{(\lambda - z_1)(\mu - z_2)}\, d\rho(\lambda,\mu) +$$

$$+ \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{P_n(\lambda,\mu) - P_n(z_1,\mu)}{(\lambda - z_1)}\, d\rho(\lambda,\mu) =$$

$$= z_2 Q_n(z_1, z_2) + \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \hat{P}_n(\lambda,\mu, z_1)\, d\rho(\lambda,\mu). \tag{24}$$

Згідно з (11) і (12) останній інтеграл у (24) також дорівнює нулю. Отже, (24) дає $(J_B Q(z_1, z_2))_n = z_2 Q_n(z_1, z_2)$, $n \in \mathbb{N}$. Це означає, що друга з рівностей (19) також виконується.

Теорему 3 доведено.

Як результат, для поліномів $Q_n(z_1, z_2)$ другого роду маємо ситуацію, аналогічну поліномам першого роду: їх послідовність є розв'язком системи (19) для $n = 1, 2, \ldots$ із заданими в (19) початковими умовами $Q_0(z_1, z_2) = 0$. Взагалі ці поліноми не ортогональні у просторі $L^2(\mathbb{R}, d\rho(\lambda))$ відносно міри $d\rho(\lambda)$, породженої обмеженими комутуючими самоспряженими операторами $J_A$ і $J_B$.

Зауважимо також, що запропонований підхід дозволяє записати поліноми другого роду і для випадку комплексної проблеми моментів, яких немає в [11, 13].

Як у випадку класичної проблеми моментів Гамбургера, поліноми другого роду разом із поліномами першого роду можна використати для опису всіх спектральних мір, породжених самоспряженими розширеннями в $\mathrm{l}_2$ операторів $J_A$ і $J_B$ у випадку, коли $J_A$ і $J_B$ не є обмеженими і самоспряженими, а лише ермітовими, але мають самоспряжені розширення, що комутують у строгому резольвентному сенсі. Проте реалізація такого проекту не є простою у зв'язку із відсутністю внутрішнього опису матриць вигляду (3) та (4) із властивостями (6) і (7) (як це відомо для матриць, що відповідають тригонометричній проблемі моментів (CMV-матриць) [21], або для матриць, що відповідають сильній проблемі моментів Гамбургера [16]). Також є невідомим внутрішній опис матриць, що відповідають нормальній проблемі моментів [11]. Дослідження цих питань планується у подальшому.

**4. Відповідний аналог функції Вейля.** Нехай $J_A$ і $J_B$ — блокові матриці типу Якобі. Аналогічно тому, як у [13] введено функцію Вейля для комплексної проблеми моментів, уведемо аналог функції Вейля для двовимірної дійсної проблеми моментів.

Використовуючи вираз (18), отримуємо

$$M(z_1,z_2)=(R_{z_1}(A)\delta_0,R_{\bar{z}_2}(B)\delta_0)_{\mathbf{l}_2}=\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{(\lambda-z_1)(\mu-z_2)}\,d\rho(\lambda,\mu),\quad z_1,z_2\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}. \tag{25}$$

Як і у класичній проблемі моментів Гамбургера, наступна теорема характеризує функцію (25).

**Теорема 4.** *Нехай $J_A$ і $J_B$ — блокові матриці типу Якобі, які породжують в $\mathbf{l}_2$ обмежені комутуючі самоспряжені оператори, $R_{z_1}(A)$ і $R_{z_2}(B)$ — їх резольвенти* ($\mathrm{Im} z_i\neq 0,\ i=1,2$). *Тоді функція $M(z_1,z_2)=(R_{z_1}(A)\delta_0,R_{\bar{z}_2}(B)\delta_0)_{\mathbf{l}_2}$ однозначно визначає спектральну міру цих операторів.*

***Доведення.*** Завдяки спектральним теоремам 1 і 2 отримуємо

$$M(z_1,z_2)=(R_{z_1}(A)\delta_0,R_{\bar{z}_2}(B)\delta_0)_{\mathbf{l}_2}=\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{(\lambda-z_1)(\mu-z_2)}\,d\rho(\lambda,\mu).$$

Оскільки оператори $J_A$ і$J_B$ вважаються обмеженими, то спектр $J_A$ і $J_B$ є обмеженим, а отже, для $z_1,z_2\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ можемо записати

$$M(z_1,z_2)=\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{(\lambda-z_1)(\mu-z_2)}\,d\rho(\lambda,\mu)=\frac{1}{z_1z_2}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{(1-\frac{\lambda}{z_1})(1-\frac{\mu}{z_2})}\,d\rho(\lambda,\mu)=$$

$$=\frac{1}{z_1z_2}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{z_1}\right)^m\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{z_2}\right)^n\right)\,d\rho(\lambda,\mu)=$$

$$=\frac{1}{z_1z_2}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\left(\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{1}{z_1^mz_2^n}\lambda^m\mu^n\right)\,d\rho(\lambda,\mu)=$$

$$=\frac{1}{z_1z_2}\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{1}{z_1^mz_2^n}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\lambda^m\mu^n\,d\rho(\lambda,\mu)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{s_{m,n}}{z_1^{m+1}z_2^{n+1}},$$

де (див. (1))

$$s_{m,n}=\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\lambda^m\mu^n\,d\rho(\lambda,\mu),\qquad m,n\in\mathbb{N}_0.$$

З попереднього запису функції $M(z_1,z_2)$ у вигляді ряду по $z_1^mz_2^n$ випливає, що коефіцієнти $s_{m,n}$ цього ряду по $M(z_1,z_2)$ відновлюються однозначно. Але ці коефіцієнти є моментами міри $d\rho(\lambda,\mu)$ і задовольняють оцінку $|s_{n,m}|\leq\|J_A\|^m\|J_B\|^n$. Оскільки міра $d\rho(\lambda,\mu)$ відновлюється однозначно за моментами $s_{m,n}$, то і функція $M(z_1,z_2)$ також відновлюється однозначно.

Теорему 4 доведено.

## Література

1. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов. – М.: Физматгиз, 1961. – 312 с.
2. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям уравнений в частных разностях второго порядка // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1956. – **5**. – С. 203 – 268.

3. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 450 с.
4. *Березанский Ю. М., Кондратьев Ю. Г.* Спектральные методы в бесконечномерном анализе. – Киев: Наук. думка, 1988. – 800 с.
5. *Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г.* Функциональный анализ: Курс лекций. – Київ: Вища шк., 1990. – 600 с.
6. *Berezansky Yu. M.* Spectral theory of commutative Jacobi fields: direct and inverse problems // Fields Inst. Commun. – 2000. – **25**. – P. 211 – 224.
7. *Berezansky Yu. M.* Some generalizations of the classical moment problem // Integr. Equat. Oper. Theory. – 2002. – **44**. – P. 255 – 289.
8. *Березанский Ю. М.* Обобщенная проблема моментов, связанная с корреляционными мерами // Функцион. анализ и прил. – 2003. – **37**, № 4. – С. 86 – 91.
9. *Berezansky Yu. M., Dudkin M. E.* The complex moment problem in the exponential form // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2004. – № 4. – P. 1 – 10.
10. *Berezansky Yu. M., Dudkin M. E.* The direct and inverse spectral problems for the block Jacobi type unitary matrices // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2005. – **11**, № 4. – P. 327 – 345.
11. *Berezansky Yu. M., Dudkin M. E.* The complex moment problem and direct and inverse spectral problems for the block Jacobi type bounded normal matrices // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2006. – **12**, № 1. – P. 1 – 32.
12. *Berezansky Yu. M., Mierzejewski D. A.* The investigation of generalized moment problem associated with correlation measures // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2007. – **13**, № 2. – P. 124 – 151.
13. *Березанский Ю. М., Мохонько А. А.* Интегрирование некоторых дифференциально-разностных нелинейных уравнений с помощью спектральной теории блочных якобиевых нормальных матриц // Функцион. анализ и прил. – 2008. – **42**, № 1. – С. 1 – 21.
14. *Derevyagin M. S., Derkach V. A.* Spectral problems for generalized Jacobi matrices // Linear Algebra and Appl. – 2004. – **384**. – P. 1 – 24.
15. *Деревягин М. С., Деркач В. А.* О сходимости аппроксимаций Паде обобщенных неванлиновских функций // Тр. Моск. мат. о-ва. – 2007. – **68**. – С. 135 – 184.
16. *Dudkin M. E.* The exact inner structure of the block Jacobi type unitary matrices connected with the corresponding direct and inverse spectral problems matrices // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2008. – **14**, № 2. – P. 168 – 176.
17. *Dudkin M. E., Kozak V. I.* Direct and inverse spectral problems for the block Jacobi type bounded symmetric matrices related to the two dimensional real moment problem // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2014. – **21**, № 3. – P. 219 – 251.
18. *Дюкарев Ю. М.* О дефектных числах симметрических операторов, порожденных блочными матрицами Якоби // Мат. сб. – 2006. – № 8. – С. 73 – 100.
19. *Крейн М. Г.* Бесконечные $J$-матрицы и матричная проблема моментов // Докл. АН СССР. – 1949. – **69**. № 2. – С. 125 – 128.
20. *Simon B.* The classical moment problem as a self-adjoint finite differential operator // Adv. Math. – 1998. – **137**. – P. 82 – 203.
21. *Simon B.* Orthogonal polynomials on the unite circle. – Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2005. – Pts 1 and 2.
22. *Simonov K. K.* Strong matrix moment problem of Hamburger // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2006. – **12**, № 2. – P. 183 – 196.
23. *Симонов К. К.* Ортогональные матричные полиномы Лорана // Мат. заметки. – 2006. – **79**, № 2. – С. 316 – 320.
24. *Симонов К. К.* Ортогональные матричные полиномы Лорана на вещественной оси // Укр. мат. вестн. – 2006. – **3**, № 2. – С. 275 – 299.
25. *Суетин П. К.* Ортогональные многочлены по двум переменным. – М.: Наука, 1988. – 384 с.

Одержано 30.03.15,
після доопрацювання — 25.11.15