УДК 517.53

М. В. Заболоцький, М. Р. Мостова (Львів. нац. ун-т ім. І. Франка)

ДОСТАТНІ УМОВИ ІСНУВАННЯ КУТОВОЇ v-ЩІЛЬНОСТІ НУЛІВ ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ НУЛЬОВОГО ПОРЯДКУ

We select the subclasses of zero-order entire functions f for which we present sufficient conditions for the existence of v-density for zeros of f in terms of the asymptotic behavior of the logarithmic derivative F and regular growth of the Fourier coefficients of F.

Выделены подклассы целых функций f нулевого порядка, для которых в терминах асимптотического поведения логарифмической производной F и регулярного роста коэффициентов Фурье F приведены достаточные условия существования v-плотности нулей f.

1. Вступ. Нехай f — ціла функція скінченного додатного порядку ρ, $0 < \rho < +\infty$, $\rho(r)$ — її уточнений порядок [1, с. 47, 48, 69]. Цілу функцію f називаємо функцією цілком регулярного зростання (ц. р. зр.) в розумінні Левіна – Пфлюгера [1, с. 183], якщо існує границя

$$\lim_{z\to\infty}{}^{*}\,\frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^{\rho(r)}} = h_f(\theta)$$

для всіх $\theta \in [0, 2\pi]$. Тут $\lim^*{}_{z\to\infty}$ означає, що $z = re^{i\theta} \to \infty,\ z \notin E$, де E — деяка C_0^1-множина. Клас функцій ц. р. зр. позначатимемо через $H_+^*(\rho(r))$. Будемо говорити, що множина $E \subset \mathbb{C}$ є C_0^α-множиною, $0 < \alpha \le 2$, і писати $E \in C_0^\alpha$, якщо її можна покрити зліченною послідовністю кругів $\{z\colon |z - z_j| < r_j\}$, $j = 1, 2, \ldots$, $z_j \to \infty$, таких, що $\sum_{|z_j|\le r} r_j^\alpha = o(r^\alpha),\ r \to +\infty$.

Відомо, що у випадку нецілого порядку ρ ц. р. зр. функції f еквівалентне існуванню кутової щільності її нулів відносно функції порівняння $r^{\rho(r)}$ [1, с. 119, 205].

Позначимо через $F(z) = z\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ логарифмічну похідну функції f. У [2, 3] показано, що $f \in$ $\in H_+^*(\rho(r))$ тоді і лише тоді, коли існують функція $g \in L^1[0, 2\pi]$ і множина $E \in C_0^\alpha,\ 1 < \alpha \le 2$, такі, що

$$F(re^{i\theta}) = g(\theta)r^{\rho(r)} + o(r^{\rho(r)}), \qquad r \to +\infty, \qquad re^{i\theta} \notin E.$$

Якщо для цілої функції нульового порядку аналогічно ввести поняття ц. р. зр., то, як показано в [4], знайдеться така множина $E \in C_0^1$, що

$$\ln|f(re^{i\theta})| = N(r, 0, f) + o(r^{\rho(r)}), \qquad r \to +\infty, \qquad re^{i\theta} \notin E,$$

де $N(r, 0, f) = N(r) = \displaystyle\int_1^r n(t)/t\, dt$, $n(r) = n(r, 0, f)$ — кількість нулів f у крузі $\{z\colon |z| \le r\}$. Звідси видно, що ц. р. зр. функції f не залежить від аргументів її нулів, а тільки від їх модулів. У [5] було введено поняття сильно регулярного зростання (с. р. зр.) для цілих функцій нульового порядку, яке має властивості, подібні до властивостей цілих функцій ц. р. зр.

Нехай L — клас невід'ємних неспадних необмежених неперервно диференційовних на $[0, +\infty)$ функцій v таких, що $rv'(r)/v(r) \to 0$ при $0 < r_0 \le r \to +\infty$. Відомо [6, с. 15], що з точністю до еквівалентних функцій клас L збігається з класом повільно зростаючих функцій. Через $H_0(v)$, $v \in L$, позначимо клас цілих функцій f нульового порядку, для яких $0 < \Delta = \overline{\lim}_{r\to+\infty} n(r)/v(r) < +\infty$. Не зменшуючи загальності вважатимемо, що $f(0) = 1$.

© М. В. ЗАБОЛОЦЬКИЙ, М. Р. МОСТОВА, 2016

Будемо говорити, що нулі $f\in H_0(\upsilon)$, $\upsilon\in L$, мають кутову υ-щільність, якщо існує границя

$$\Delta(\alpha,\beta)=\lim_{r\to+\infty}\frac{n(r,\alpha,\beta)}{\upsilon(r)}$$

для всіх α і β, що не належать деякій не більш ніж зліченній множині з $[0,2\pi]$. Тут $n(r,\alpha,\beta)$ — кількість нулів a_n функції f, які лежать у секторі $\{z\colon |z|\le r,\ \alpha\le\arg z<\beta\}$, $0\le\alpha<\beta<2\pi$.

Теорема A [7]. *Нехай $\upsilon\in L$, $f\in H_0(\upsilon)$ і нулі функції f мають кутову υ-щільність. Тоді існує така множина $E\in C_0^\alpha$, $1<\alpha\le2$, що*

$$F(re^{i\theta})=\Delta\upsilon(r)+o(\upsilon(r))=n(r)+o(\upsilon(r)),\qquad r\to+\infty,\qquad re^{i\theta}\notin E. \tag{1}$$

Зауваження. У статті [7] наведено приклад цілої функції $f\in H_0(\upsilon)$ такої, що

$$F(z)=n(r)+o(1),\qquad r\to+\infty,\qquad z\notin E,\qquad E\in C_0^2,$$

і нулі f не мають кутової υ-щільності.

Позначимо через $c_k(r,F)$ коефіцієнти Фур'є функції F, $\Omega=\{|a_n|: n\in\mathbb{N}\}$, де a_n — нулі $f\in H_0(\upsilon)$.

Теорема B [7]. *Нехай $\upsilon\in L$, $f\in H_0(\upsilon)$ і виконується співвідношення* (1). *Тоді існує множина $E\subset\mathbb{R}_+$, $\operatorname{mes}\{E\cap[0,r)\}/r\to0$, $r\to+\infty$, така, що для $k\in\mathbb{Z}$ існують границі*

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{c_0(r,F)}{\upsilon(r)}=\Delta,\qquad \lim_{r\to+\infty,r\notin E}\frac{c_k(r,F)}{\upsilon(r)}=0,\qquad k\ne0. \tag{2}$$

У теоремах A, B співвідношення (1), (2) є необхідними умовами для існування кутової υ-щільності нулів f. У цій статті буде виділено підкласи цілих функцій f класу $H_0(\upsilon)$, для яких в термінах логарифмічної похідної та у термінах коефіцієнтів Фур'є функції F вказано достатні умови для існування кутової υ-щільності нулів f.

2. Формулювання основних результатів. Позначимо через

$$\Gamma_m=\bigcup_{j=1}^m\{z\colon \arg z=\theta_j\}=\bigcup_{j=1}^m l_{\theta_j},\qquad -\pi\le\theta_1<\theta_2<\ldots<\theta_m<\pi,$$

скінченну систему променів, $n(r,\theta_j;f)=n(r,\theta_j)$ — кількість нулів функції $f\in H_0(\upsilon)$, що лежать на промені $l_{\theta_j}=\{z\colon \arg z=\theta_j\}$, модулі яких не перевищують r. Нехай $h_j(\theta)=$ $=(\theta-\pi-\theta_j)$, $\theta_j<\theta<\theta_j+2\pi$, а $\widehat{h}_j(\theta)$ — її періодичне продовження з $(\theta_j,\theta_j+2\pi)$ на $\mathbb{R}$, $j=\overline{1,m}$. Для $\widetilde{\upsilon}\in L$ покладемо

$$\upsilon(r)=\int\limits_0^r\frac{\widetilde{\upsilon}(t)}{t}dt.$$

Легко бачити, що $\upsilon\in L$ і $\widetilde{\upsilon}(r)=o(\upsilon(r))$, $r\to+\infty$.

Теорема 1. *Нехай $\widetilde{\upsilon}\in L$, $f\in H_0(\upsilon)$, нулі функції f розташовані на скінченній системі променів Γ_m і для кожного $j=\overline{1,m}$*

$$n(r,\theta_j)=\Delta_j\upsilon(r)+o(\widetilde{\upsilon}(r)),\qquad r\to+\infty. \tag{3}$$

Тоді для $\theta\ne\theta_j$

$$F(re^{i\theta})=\Delta\upsilon(r)+iH_f(\theta)\widetilde{\upsilon}(r)+o(\widetilde{\upsilon}(r)),\qquad r\to+\infty,$$

де $\Delta=\sum_{j=1}^m\Delta_j$, $H_f(\theta)=\sum_{j=1}^m\Delta_j\widehat{h}_j(\theta)$, $\Delta_j\ge0$, $j=\overline{1,m}$.

Теорема 2. *Нехай* $G \in L^1[0, 2\pi]$, $\Delta > 0$, $\widetilde{\upsilon} \in L$, $f \in H_0(\upsilon)$, *нулі функції* f *розташовані на скінченній системі променів* Γ_m *і*

$$F(re^{i\theta}) = \Delta\upsilon(r) + iG(\theta)\widetilde{\upsilon}(r) + o(\widetilde{\upsilon}(r)), \qquad r \to +\infty. \tag{4}$$

Тоді нулі f *мають кутову* υ*-щільність, причому для всіх* $\alpha, \beta \in [-\pi, \pi) \setminus \left\{ \bigcup_{j=1}^{m} \theta_j \right\}$ *виконується*

$$\Delta(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi} \left(G(\alpha) - G(\beta) + \Delta(\beta - \alpha) \right). \tag{5}$$

Теорема 3. *Нехай* $\widetilde{\upsilon} \in L$, $f \in H_0(\upsilon)$, *нулі функції* f *розташовані на скінченній системі променів* Γ_m *і виконуються співвідношення* (3). *Тоді*

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{c_0(r, F) - \Delta\upsilon(r)}{\widetilde{\upsilon}(r)} = 0, \qquad \lim_{r \to +\infty, r \notin \Omega} \frac{c_k(r, F)}{\widetilde{\upsilon}(r)} = \delta_k, \qquad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

де $\delta_k = -\dfrac{1}{k} \sum_{j=1}^{m} \Delta_j e^{-ik\theta_j}$.

Теорема 4. *Нехай* $\widetilde{\upsilon} \in L$, $f \in H_0(\upsilon)$, *нулі функції* f *розташовані на скінченній системі променів* Γ_m *і для* m *послідовних цілих чисел* $k = \overline{k_0, k_0 + m - 1}$, $k_0 \in \mathbb{Z}$, *існують границі*

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{c_0(r, F)}{\upsilon(r)} = \Delta, \qquad \lim_{r \to +\infty, r \notin \Omega} \frac{c_k(r, F)}{\widetilde{\upsilon}(r)} = \delta_k, \qquad k \neq 0. \tag{6}$$

Тоді нулі функції f *мають кутову* υ*-щільність.*

3. Допоміжні результати. При доведенні теорем 1 – 4 використовуватимемо результати, які сформулюємо у вигляді лем.

Лема 1. *Нехай* $\upsilon \in L$, ε — *довільна неперервна на* $[0, +\infty)$ *функція така, що* $\varepsilon(r) \to 0$ *при* $r \to +\infty$. *Тоді для* $z = re^{i\theta}$, $-\pi < \theta < \pi$,

$$z \int_0^{+\infty} \frac{\varepsilon(t)\upsilon(t)}{(t+z)^2} dt = o(\upsilon(r)), \qquad r \to +\infty.$$

Покладемо $a_k(r) = \int_0^r t^k \widetilde{\upsilon}(t) dt$, $b_k(r) = \int_r^{+\infty} t^{-k-2} \widetilde{\upsilon}(t) dt$, $\widetilde{\upsilon} \in L$.

Лема 2. *Нехай* $\widetilde{\upsilon} \in L$. *Тоді для* $z = re^{i\theta}$, $-\pi < \theta < \pi$, *виконується*

$$z \int_0^{r} \frac{\upsilon(t)}{(t+z)^2} dt = \frac{1}{1 + e^{i\theta}} \upsilon(r) + \Sigma_1, \tag{7}$$

$$z \int_r^{+\infty} \frac{\upsilon(t)}{(t+z)^2} dt = \frac{e^{i\theta}}{1 + e^{i\theta}} \upsilon(r) + \Sigma_2, \tag{8}$$

де $\Sigma_1 = -\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k a_k(r)}{z^{k+1}}$, $\Sigma_2 = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k z^{k+1} b_k(r)$.

Лема 3. *Нехай* $\widetilde{\upsilon} \in L$, Σ_1 *і* Σ_2 *такі, як у лемі* 2. *Тоді для* $z = re^{i\theta}$, $-\pi < \theta < \pi$,

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 = i\theta\widetilde{\upsilon}(r) + o(\widetilde{\upsilon}(r)), \qquad r \to +\infty. \tag{9}$$

Доведення лем 1 – 3 проводяться за схемою доведення відповідних тверджень із робіт [8, 9].

Нагадаємо, що множина $E \subset \mathbb{R}_+$ називається E_0-множиною, якщо E — вимірна множина і $\mathrm{mes}(E \cap [0, r]) = o(r)$, $r \to +\infty$. З результатів роботи [5] отримуємо наступне твердження.

Лема 4. *Нехай* $\upsilon \in L$, $f \in H_0(\upsilon)$. *Тоді існує* E_0*-множина* E *така, що для довільного* $\delta > 0$

$$r \int\limits_{\theta-\delta}^{\theta+\delta} \left| \frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})} \right| d\varphi = O(\upsilon(r)) \left(\delta + \delta \ln\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)\right), \qquad r \to +\infty, \qquad r \notin E.$$

Нехай $a_n = |a_n|e^{i\alpha_n}$ — нулі $f \in H_0(\upsilon)$. Покладемо $n_k(r) = \sum_{|a_n| \le r} e^{-ik\alpha_n}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Лема 5 [7, 10]**.** *Нехай* $\upsilon \in L$, $f \in H_0(\upsilon)$. *Тоді*

$$c_k(r, F) = n_k(r) - kr^k \int\limits_r^{+\infty} \frac{n_k(t)}{t^{k+1}} dt, \qquad c_k(r, \ln f) = -r^k \int\limits_r^{+\infty} \frac{n_k(t)}{t^{k+1}} dt, \qquad k \in \mathbb{N},$$

$$c_k(r, F) = n_k(r) + kr^k \int\limits_0^{r} \frac{n_k(t)}{t^{k+1}} dt, \qquad c_k(r, \ln f) = r^k \int\limits_0^{r} \frac{n_k(t)}{t^{k+1}} dt, \qquad k \in \mathbb{Z}_-,$$

$$c_0(r, F) = n(r, 0, f) = n(r).$$

Лема 6 [6, с. 63 – 66]**.** *Нехай* $\upsilon \in L$. *Тоді для* $k \in \mathbb{N}$

$$r^k \int\limits_r^{+\infty} \frac{\upsilon(t)}{t^{k+1}} dt = \frac{1}{k}\upsilon(r) + o(\upsilon(r)), \qquad r \to +\infty,$$

$$r^{-k} \int\limits_0^{r} \frac{\upsilon(t)}{t^{-k+1}} dt = \frac{1}{k}\upsilon(r) + o(\upsilon(r)), \qquad r \to +\infty.$$

Лема 7. *Нехай* $\upsilon \in L$, $\varepsilon(t)$ — *локально інтегровна на* $[1, +\infty)$, $\varepsilon(t) \to 0$ *при* $t \to +\infty$. *Тоді для* $k \in \mathbb{N}$

$$r^k \int\limits_r^{+\infty} \frac{\varepsilon(t)\upsilon(t)}{t^{k+1}} dt = o(\upsilon(r)), \qquad r \to +\infty,$$

$$r^{-k} \int\limits_0^{r} \frac{\varepsilon(t)\upsilon(t)}{t^{-k+1}} dt = o(\upsilon(r)), \qquad r \to +\infty.$$

Для невід'ємної локально інтегровної на $[1, +\infty)$ функції γ покладемо

$$I_k(r;\gamma) = \begin{cases} -r^k \int\limits_r^{+\infty} \dfrac{\gamma(t)}{t^{k+1}}dt, & k \in \mathbb{N}, \\ r^k \int\limits_1^{r} \dfrac{\gamma(t)}{t^{k+1}}dt, & k = -1, -2, \ldots, \end{cases}$$

$$J_k(r;\gamma_1,\ldots,\gamma_m) = \sum_{p=1}^m a_{kp} I_k(r;\gamma_p), \qquad k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}, \qquad J_0(r;\gamma_1,\ldots,\gamma_m) = \sum_{p=1}^m \gamma_p(r),$$

де $a_{kp} \in \mathbb{C}$, $a_{0p} = 1$, $p = \overline{1,m}$.

Лема 8. *Нехай* $\mathcal{I} = \{k_1, k_2, \ldots, k_m\} \in \mathbb{Z}^m$, $\widetilde{J}_k(r;\gamma_1,\ldots,\gamma_m) = rJ'_k(r;\gamma_1,\ldots,\gamma_m) - k\,J_k(r;\gamma_1,\ldots,\gamma_m)$, $k \in \mathcal{I}$, *де* $J_k(r;\gamma_1,\ldots,\gamma_m)$ *такі, як вище, і матриця* $A = (a_{kp})$, $k \in \mathcal{I}$, $1 \le p \le m$, *є невиродженою. Тоді існують* $b_{kp} \in \mathbb{C}$ *такі, що*

$$\gamma_p(r) = \sum_{k\in\mathcal{I}} b_{kp} \widetilde{J}_k(r;\gamma_1,\ldots,\gamma_m), \qquad p = \overline{1,m}. \tag{10}$$

Доведення. Для $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ маємо

$$rJ'_k(r;\gamma_1,\ldots,\gamma_m) = \sum_{p=1}^m a_{kp}(kI_k(r;\gamma_p) + \gamma_p(r)) = kJ_k(r;\gamma_1,\ldots,\gamma_m) + \sum_{p=1}^m a_{kp}\gamma_p(r).$$

Звідси

$$\sum_{p=1}^m a_{kp}\gamma_p(r) = \widetilde{J}_k(r;\gamma_1,\ldots,\gamma_m), \qquad k \in \mathcal{I},$$

де

$$a_{0p} = 1, \qquad p = \overline{1,m}, \qquad \widetilde{J}_0(r;\gamma_1,\ldots,\gamma_m) = J_0(r;\gamma_1,\ldots,\gamma_m),$$

$$\widetilde{J}_k(r;\gamma_1,\ldots,\gamma_m) = rJ'_k(r;\gamma_1,\ldots,\gamma_m) - kJ_k(r;\gamma_1,\ldots,\gamma_m).$$

Оскільки $\det A \neq 0$, то, обчисливши b_{kp} за правилом Крамера, отримуємо (10), а отже, лему доведено.

4. Доведення результатів. Нехай Γ_m — скінченна система променів така, як вище, $\widetilde{l}_{\theta_j} = \{z\colon \arg z = \theta_j, |z| \ge r_j > 0\}$, де r_j — найменший модуль нуля, що лежить на промені l_{θ_j}, $j = \overline{1,m}$, $D = \mathbb{C}\setminus\left(\bigcup_{j=1}^m \widetilde{l}_{\theta_j}\right)$ — однозв'язна область. Через $\ln f$ позначимо однозначну гілку функції $\mathrm{Ln}\, f$ в області D таку, що $\ln f(0) = 0$. Легко бачити, що

$$\ln f(z) = \int\limits_0^z \frac{f'(w)}{f(w)}dw, \qquad z \in D,$$

де інтеграл береться вздовж відрізка $[0, z]$.

***Доведення теореми* 1.** Нехай $\widetilde{v} \in L$, $f \in H_0(v)$, нулі функції f розташовані на від'ємному промені $l_{-\pi}$, тобто

$$f(z) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{a_k}\right),$$

де $0 < a_n \nearrow +\infty$. Якщо $n(r, -\pi) = n(r) = v(r) + o(\widetilde{v}(r))$, $r \to +\infty$, то для $z = re^{i\theta}$, $-\pi < \theta < \pi$, маємо $\ln f(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \dfrac{z}{a_k}\right)$ і

$$F(z) = z\frac{f'(z)}{f(z)} = z\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{z + a_k} = z\int_0^{+\infty} \frac{1}{z+t} dn(t) = z\int_0^{+\infty} \frac{n(t)dt}{(z+t)^2} =$$

$$= z\int_0^{+\infty} \frac{n(t) - v(t)}{(z+t)^2} dt + z\int_0^{+\infty} \frac{v(t)}{(z+t)^2} dt = I_1 + I_2. \tag{11}$$

Враховуючи умову (3) та лему 1, для $z = re^{i\theta}$, $-\pi < \theta < \pi$, отримуємо

$$I_1 = z\int_0^{+\infty} \frac{\varepsilon(t)\widetilde{v}(t)}{(z+t)^2} dt = o(\widetilde{v}(r)), \qquad r \to +\infty, \tag{12}$$

де $\varepsilon(r) = (n(r) - v(r))/\widetilde{v}(r) \to 0$, $r \to +\infty$.

За лемою 2 маємо

$$I_2 = z\int_0^{r} \frac{v(t)}{(z+t)^2} dt + z\int_r^{+\infty} \frac{v(t)}{(z+t)^2} dt = \frac{1}{1 + e^{i\theta}} v(r) + \frac{e^{i\theta}}{1 + e^{i\theta}} v(r) + \Sigma_1 + \Sigma_2 =$$

$$= v(r) + \Sigma_1 + \Sigma_2, \tag{13}$$

де Σ_1, Σ_2 такі, як у (7), (8).

З рівностей (9), (11)–(13) отримуємо

$$F(z) = v(r) + i\theta\widetilde{v}(r) + o(\widetilde{v}(r)), \qquad z \to \infty.$$

У випадку, коли нулі функції f лежать на промені $l_{\theta_j} = \{z\colon \arg z = \theta_j\}$, $-\pi < \theta_j < \pi$, для $\theta_j < \theta < 2\pi + \theta_j$ і $n(r, \theta_j) = \Delta_j v(r) + o(\widetilde{v}(r))$, $r \to +\infty$, одержуємо ($\Delta_j \geq 0$)

$$F(re^{i\theta}) = \Delta_j v(r) + i\Delta_j(\theta - \theta_j - \pi)\widetilde{v}(r) + o(\widetilde{v}(r)) = \Delta_j v(r) + i\Delta_j h_j(\theta)\widetilde{v}(r) + o(\widetilde{v}(r)),\ z \to \infty.$$

Нехай f задовольняє умови теореми 1, тобто нулі функції f розташовані на скінченній системі променів Γ_m і виконується (3). Запишемо f у вигляді добутку $f = f_1 \ldots f_m$, де f_j — ціла функція з нулями на промені l_{θ_j}. Тоді для $z \in D$ маємо $\ln f(z) = \ln f_1(z) + \ldots + \ln f_m(z)$ і, використавши останнє співвідношення для $\theta \in [-\pi, \pi) \setminus \left\{\bigcup_{j=1}^{m} \theta_j\right\}$, отримуємо

$$F(re^{i\theta}) = re^{i\theta} \sum_{j=1}^{m} \frac{f_j'(re^{i\theta})}{f_j(re^{i\theta})} = \Delta v(r) + i\sum_{j=1}^{m} \Delta_j \widehat{h}_j(\theta)\widetilde{v}(r) + o(\widetilde{v}(r)), \qquad r \to +\infty,$$

де $\widehat{h}_j(\theta)$ такі, як вище.

Теорему 1 доведено.

***Доведення теореми* 2.** Нехай $\widetilde{v} \in L$, $f \in H_0(v)$, нулі функції f лежать на системі променів Γ_m. Покладемо $S_r(\alpha, \beta) = \{z : |z| \le r, \alpha \le \arg z \le \beta\}$, $-\pi \le \theta_1 < \ldots < \theta_{k_0 - 1} < \alpha < \theta_{k_0} < \ldots \ldots < \theta_{l_0} < \beta < \theta_{l_0+1} < \ldots < \theta_m < \pi$, $r \notin \Omega$, $\partial S_r^+(\alpha, \beta) = I_r(\alpha) \bigcup C_r(\alpha, \beta) \bigcup I_r^-(\beta)$ — додатна орієнтація межі сектора $S_r(\alpha, \beta)$, де

$$I_r(\alpha) = \{z_1(t) = te^{i\alpha}, 0 \le t \le r\}, \qquad I_r(\beta) = \{z_2(t) = te^{i\beta}, 0 \le t \le r\},$$

$$C_r(\alpha, \beta) = \{z_3(t) = re^{it}, \alpha \le t \le \beta\}.$$

Нехай $z = \widetilde{f}(t)$, $a \le t \le b$, — однозначна гілка багатозначної функції Arg $f(z)$ на кривій $\partial S_r^+(\alpha, \beta)$. Тоді за принципом аргументу функції f маємо

$$n(r, \alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial S_r^+(\alpha,\beta)} \widetilde{f}(t) = \frac{1}{2\pi} \left(\Delta_{I_r(\alpha)} \widetilde{f}(t) + \Delta_{C_r(\alpha,\beta)} \widetilde{f}(t) - \Delta_{I_r(\beta)} \widetilde{f}(t) \right). \tag{14}$$

Оскільки $\ln f(z) = \ln |f(z)| + i \arg f(z)$ — аналітична функція в області D, то з умов Коші – Рімана випливає, що

$$\frac{\partial \arg f(re^{i\theta})}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \ln |f(re^{i\theta})|}{\partial \theta} = -\frac{1}{r} \text{Re} \left(\frac{\partial \ln f(re^{i\theta})}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{r} \text{Im } F(re^{i\theta}).$$

За умови (4) отримуємо ($\widetilde{v}(t) = tv'(t)$)

$$\Delta_{I_r(\alpha)} \widetilde{f}(t) = \Delta_{I_r(\alpha)} \arg f(z_1(t)) = \int\limits_0^r \frac{\partial \arg f(te^{i\alpha})}{\partial t} dt = \int\limits_0^r \frac{1}{t} \text{Im } F(te^{i\alpha}) dt =$$

$$= \int\limits_0^r \left(G(\alpha) v'(t) + o(v'(t)) \right) dt = G(\alpha) v(r) + o(v(r)), \qquad r \to +\infty, \tag{15}$$

і, аналогічно,

$$\Delta_{I_r(\beta)} \widetilde{f}(t) = G(\beta) v(r) + o(v(r)), \qquad r \to +\infty. \tag{16}$$

Оскільки завдяки умовам Коші – Рімана виконується

$$\frac{\partial \arg f(re^{i\theta})}{\partial \theta} = r \frac{\partial \ln |f(re^{i\theta})|}{\partial r} = r \text{Re} \left(\frac{\partial \ln f(re^{i\theta})}{\partial r} \right) = \text{Re } F(re^{i\theta}),$$

то $\left| \dfrac{\partial \arg f(re^{i\theta})}{\partial \theta} \right| \le r \left| \dfrac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} \right|$.

З останньої нерівності та леми 4 випливає, що існує E_0-множина E така, що для $\delta > 0$

$$\left| \Delta_{C_r(\theta_j - \delta, \theta_j + \delta)} \widetilde{f}(t) \right| \le r \int\limits_{\theta_j - \delta}^{\theta_j + \delta} \left| \frac{f'(re^{it})}{f(re^{it})} \right| dt = O\left(v(r)\right) \left(\delta + \delta \ln \left(1 + \frac{1}{\delta} \right) \right), \ r \to +\infty, \ r \notin E.$$

Покладемо

$$C_r(\delta) = C_r(\alpha, \theta_{k_0} - \delta) \bigcup \left(\bigcup_{j=k_0}^{l_0} C_r(\theta_j + \delta, \theta_{j+1} - \delta) \right) \bigcup C_r(\theta_{l_0} + \delta, \beta)$$

і нехай

$$0 < \delta < \min \left\{ \frac{\theta_{k_0} - \alpha}{2}, \frac{\beta - \theta_{l_0}}{2}, \frac{\theta_{j+1} - \theta_j}{2} \right\}, \quad \text{де} \quad j = \overline{k_0, l_0 - 1}.$$

Тоді

$$\Delta_{C_r(\delta)} \widetilde{f}(t) = \Delta_{C_r(\delta)} \arg f(z_3(t)) = \left(\int\limits_{\alpha}^{\theta_{k_0} - \delta} + \sum_{j=k_0}^{l_0 - 1} \int\limits_{\theta_j + \delta}^{\theta_{j+1} - \delta} + \int\limits_{\theta_{l_0} + \delta}^{\beta} \right) \frac{\partial \arg f(z_3(t))}{\partial t} dt =$$

$$= \left(\int\limits_{\alpha}^{\theta_{k_0} - \delta} + \sum_{j=k_0}^{l_0 - 1} \int\limits_{\theta_j + \delta}^{\theta_{j+1} - \delta} + \int\limits_{\theta_{l_0} + \delta}^{\beta} \right) \mathrm{Re} F(re^{it}) dt =$$

$$= \left(\int\limits_{\alpha}^{\theta_{k_0} - \delta} + \sum_{j=k_0}^{l_0 - 1} \int\limits_{\theta_j + \delta}^{\theta_{j+1} - \delta} + \int\limits_{\theta_{l_0} + \delta}^{\beta} \right) (\Delta \upsilon(r) + o(\widetilde{\upsilon}(r))) dt =$$

$$= \Delta(\beta - \alpha - 2\delta(l_0 - k_0 + 1))\upsilon(r) + o(\widetilde{\upsilon}(r)), \qquad r \to +\infty,$$

а отже,

$$\Delta_{C_r(\alpha,\beta)} \widetilde{f}(t) = \Delta_{C_r(\delta)} \widetilde{f}(t) + \sum_{j=k_0}^{l_0} \Delta_{C_r(\theta_j - \delta, \theta_j + \delta)} \widetilde{f}(t) = \Delta(\beta - \alpha - 2\delta(l_0 - k_0 + 1))\upsilon(r) +$$

$$+ O\left(\upsilon(r)\right) \left(\delta + \delta \ln \left(1 + \frac{1}{\delta} \right) \right) + o(\upsilon(r)), \qquad r \to +\infty, \qquad r \notin E. \tag{17}$$

З (14)–(17), спрямовуючи δ до нуля, маємо

$$n(r, \alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi} \left(G(\alpha) - G(\beta) + \Delta(\beta - \alpha) \right) \upsilon(r) + o(\upsilon(r)), \qquad r \to +\infty, \qquad r \notin E.$$

Нехай $r \in E \cup \Omega$. Тоді існують такі r', r'', що $r/2 < r' < r < r'' < 2r$, $r' \notin E$, $r'' \notin E$. Оскільки

$$\frac{n(r', \alpha, \beta)}{\upsilon(r')} \frac{\upsilon(r')}{\upsilon(r)} \le \frac{n(r, \alpha, \beta)}{\upsilon(r)} \le \frac{n(r'', \alpha, \beta)}{\upsilon(r'')} \frac{\upsilon(r'')}{\upsilon(r)},$$

$$\upsilon(r') \sim \upsilon(r'') \sim \upsilon(r), \qquad r \to +\infty,$$

то

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{n(r, \alpha, \beta)}{\upsilon(r)} = \frac{1}{2\pi} \left(G(\alpha) - G(\beta) + \Delta(\beta - \alpha) \right),$$

що доводить теорему 2.

Наслідок. *Нехай виконуються умови теореми* 2 *з*

$$G(\theta) = \sum_{j=1}^{m} \Delta_j \widehat{h}_j(\theta), \qquad \Delta = \sum_{j=1}^{m} \Delta_j, \qquad \Delta_j \geq 0.$$

Тоді

$$\Delta(\alpha, \beta) = \sum_{j=k_0}^{l_0} \Delta_j,$$

де $-\pi \leq \theta_1 < \ldots < \theta_{k_0-1} < \alpha < \theta_{k_0} < \ldots < \theta_{l_0} < \beta < \theta_{l_0+1} < \ldots < \theta_m < \pi.$

Доведення. Для $\theta \in [-\pi, \pi)$ маємо

$$\widehat{h}_j(\alpha) = \begin{cases} \alpha - \theta_j - \pi, & 1 \leq j \leq k_0 - 1, \\ \alpha - \theta_j + \pi, & k_0 \leq j \leq m, \end{cases} \quad \widehat{h}_j(\beta) = \begin{cases} \beta - \theta_j - \pi, & 1 \leq j \leq l_0, \\ \beta - \theta_j + \pi, & l_0 + 1 \leq j \leq m. \end{cases}$$

Звідси завдяки (5) отримуємо

$$\Delta(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{m} \Delta_j (\widehat{h}_j(\alpha) - \widehat{h}_j(\beta) + (\beta - \alpha)) = \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{j=1}^{k_0-1} \Delta_j (\alpha - \theta_j - \pi) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=k_0}^{m} \Delta_j (\alpha - \theta_j + \pi) - \sum_{j=1}^{l_0} \Delta_j (\beta - \theta_j - \pi) - \sum_{j=l_0+1}^{m} \Delta_j (\beta - \theta_j + \pi) + \Delta(\beta - \alpha) \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{j=1}^{k_0-1} \Delta_j (\alpha - \beta) + \sum_{j=k_0}^{l_0} \Delta_j (\alpha - \beta + 2\pi) + \sum_{j=l_0+1}^{m} \Delta_j (\alpha - \beta) - \Delta(\alpha - \beta) \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\Delta(\alpha - \beta) + 2\pi \sum_{j=k_0}^{l_0} - \Delta(\alpha - \beta) \right) = \sum_{j=k_0}^{l_0} \Delta_j.$$

***Доведення теореми* 3.** Оскільки

$$n_k(r) = \sum_{j=1}^{m} e^{-ik\theta_j} n(r, \theta_j) = \left(\sum_{j=1}^{m} \Delta_j e^{-ik\theta_j} \right) \upsilon(r) + o(\widetilde{\upsilon}(r)) = -k\delta_k \upsilon(r) + o(\widetilde{\upsilon}(r)),$$

$$n_0(r) = n(r) = \Delta \upsilon(r) + o(\widetilde{\upsilon}(r)), \qquad r \to +\infty,$$

то за лемами 5–7 для $k > 0$ маємо

$$c_k(r, F) = -k\delta_k \upsilon(r) + o(\widetilde{\upsilon}(r)) + k^2 \delta_k r^k \int_r^{+\infty} \frac{\upsilon(t) + o(\widetilde{\upsilon}(r))}{t^{k+1}} dt = -k\delta_k \upsilon(r) + k^2 \delta_k r^k \times$$

$$\times \left(\frac{\upsilon(r)}{kr^k} + \int_r^{+\infty} \frac{t\upsilon'(t)}{kt^{k+1}} dt \right) + o(\widetilde{\upsilon}(r)) = k\delta_k r^k \int_r^{+\infty} \frac{\widetilde{\upsilon}(t)}{t^{k+1}} dt + o(\widetilde{\upsilon}(r)) = \delta_k \widetilde{\upsilon}(r) + o(\widetilde{\upsilon}(r))$$

при $r \to +\infty$, $r \notin \Omega$ і

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{c_0(r,F) - \Delta\upsilon(r)}{\widetilde{\upsilon}(r)} = \lim_{r\to+\infty} \frac{n(r) - \Delta\upsilon(r)}{\widetilde{\upsilon}(r)} = 0.$$

Аналогічно, для $k < 0$ отримуємо $c_k(r,F) = \delta_k \widetilde{\upsilon}(r) + o(\widetilde{\upsilon}(r))$, $r \to +\infty$.

***Доведення теореми* 4.** Не зменшуючи загальності вважаємо, що умови теореми виконано для $k_0 = 0$. Оскільки для коефіцієнтів Фур'є $c_k(r, \ln f)$ функції $\ln f$ справджуються рівності

$$c_k(r, \ln f) = \int\limits_0^r \frac{c_k(t,F)}{t} dt, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

то з умов (6) одержуємо

$$\lim_{r\to+\infty, r\notin\Omega} \frac{c_k(r, \ln f)}{\upsilon(r)} = \delta_k, \qquad k = \overline{1, m-1}. \tag{18}$$

За лемою 5 у випадку розташування нулів на скінченній системі променів Γ_m маємо

$$c_0(r,F) = J_0(r; n(r,\theta_1), \ldots, n(r,\theta_m)),$$

$$c_k(r, \ln f) = J_k(r; n(r,\theta_1), \ldots, n(r,\theta_m)), \qquad k = \overline{1, m-1}.$$

Оскільки

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ e^{-i\theta_1} & e^{-i\theta_2} & \ldots & e^{-i\theta_m} \\ . & . & . & . \\ e^{-i(m-1)\theta_1} & e^{-i(m-1)\theta_2} & \ldots & e^{-i(m-1)\theta_m} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то за лемою 8 отримуємо

$$n(r,\theta_j) = \sum_{k=0}^{m-1} b_{kj} \widetilde{J}_k(r; n(r,\theta_1, \ldots, \theta_m)), \qquad b_{kj} \in \mathbb{C}, \qquad j = \overline{1, m}. \tag{19}$$

Завдяки умовам (6), (18) і співвідношенню $\widetilde{\upsilon}(r) = o(\upsilon(r))$, $r \to +\infty$ $(k = \overline{1, m-1})$,

$$\widetilde{J}_k(r; n(r,\theta_1, \ldots, \theta_m)) = k c_k(r, \ln f) - c_k(r,F) = (1 + o(1)) k \delta_k \upsilon(r) + o(\upsilon(r)), \qquad r \to +\infty,$$

$$\widetilde{J}_0(r; n(r,\theta_1, \ldots, \theta_m)) = J_0(r; n(r,\theta_1, \ldots, \theta_m)) = (1 + o(1)) \Delta\upsilon(r), \qquad r \to +\infty.$$

Звідси з урахуванням співвідношень (19) отримуємо, що для $j = \overline{1, m}$ існують границі

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{n(r,\theta_j)}{\upsilon(r)} = \Delta_j,$$

а отже, нулі функції f мають кутову υ-щільність.

Теорему 4 доведено.

Література

1. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. – М.: Гостехиздат, 1956. – 632 с.
2. *Гольдберг А. А., Коренков Н. Е.* Асимптотика логарифмической производной целой функции вполне регулярного роста // Сиб. мат. журн. – 1980. – **21**, № 3. – С. 63 – 79.
3. *Гольдберг А. А., Строчик Н. Н.* Асимптотическое поведение мероморфных функций вполне регулярного роста и их логарифмических производных // Сиб. мат. журн. – 1985. – **26**, № 6. – С. 29 – 38.
4. *Гольдберг А. А., Заболоцкий Н. В.* Индекс концентраций субгармонической функции нулевого порядка // Мат. заметки. – 1983. – **34**, № 2. – С. 227 – 236.
5. *Заболоцкий Н. В.* Сильно регулярный рост целых функций нулевого порядка // Мат. заметки. – 1998. – **63**, № 2. – С. 196 – 208.
6. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 142 с.
7. *Заболоцький М. В., Мостова М. Р.* Логарифмічна похідна і кутова щільність нулів цілої функції нульового порядку // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 4. – С. 473 – 481.
8. *Заболоцький М. В.* Теореми типу Валірона та Валірона – Тітчмарша для цілих функцій нульового порядку // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 3. – С. 315 – 325.
9. *Заболоцький М. В.* Асимптотика логарифмічної похідної цілої функції нульового порядку // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 1. – С. 32 – 40.
10. *Боднар О. В., Заболоцький М. В.* Критерії регулярності зростання логарифма модуля та аргументу цілої функції // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 7. – С. 885 – 893.

Одержано 06.05.15