УДК 517.5

В. Ф. Бабенко, М. С. Гунько (Днепропетр. нац. ун-т им. О. Гончара)

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВОССТАНОВЛЕНИИ СВЕРТКИ n ФУНКЦИЙ ПО ЛИНЕЙНОЙ ИНФОРМАЦИИ

We determine the optimal linear information and the optimal method of its application to the recovery of convolution of n functions on some convex and centrally symmetric classes of 2π-periodic functions.

Знайдено оптимальну лінійну інформацію та оптимальний метод її використання для відновлення згортки n функцій на деяких опуклих центрально-симетричних множинах 2π-періодичних функцій.

Пусть C и L_p, $1 \le p \le \infty$, — пространства 2π-периодических функций $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с соответствующими нормами $\|\cdot\|_C$ и $\|\cdot\|_{L_p}$. Пусть также $M_1, M_2, \ldots, M_n \subset L_1$ — некоторые классы функций; $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \ldots, x_n \in M_n$;

$$(x_1 * x_2)(\tau) = \int\limits_0^{2\pi} x_1(\tau - t) x_2(t) dt$$

— свертка двух функций x_1 и x_2, а

$$(x_1 * x_2 * \ldots * x_n)(\tau) = (x_1 * (x_2 * \ldots * x_n))(\tau) =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \cdots \int\limits_0^{2\pi} x_1(\tau - t_1 - \ldots - t_{n-1}) x_2(t_1) \ldots x_n(t_{n-1}) dt_1 dt_2 \ldots dt_{n-1}$$

— свертка n функций $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Будем предполагать, что для $j = 1, \ldots, n$ на множествах $\operatorname{span}(M_j)$ заданы наборы T_j, $T_j = (T_{j,1}, T_{j,2}, \ldots, T_{j,m_j})$, линейных непрерывных функционалов

$$T_{j,l}\colon \operatorname{span}(M_j) \to \mathbb{R}, \quad l = 1, \ldots, m_j.$$

Векторы

$$T_j(x_j) = (T_{j,1}(x_j), T_{j,2}(x_j), \ldots, T_{j,m_j}(x_j)) \in \mathbb{R}^{m_j}, \quad x_j \in M_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$

будем называть линейной информацией об $x_1, x_2, \ldots, x_n$ типа $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ (или $(m_1, m_2, \ldots$ $\ldots, m_n)$-информацией). Произвольное отображение

$$\Phi\colon \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2} \times \ldots \times \mathbb{R}^{m_n} \to L_p$$

будем называть методом восстановления свертки $x_1 * x_2 * \ldots * x_n$ по $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$-информации в пространстве L_p.

Положим

$$R(x_1, x_2, \ldots, x_n; T_1, T_2, \ldots, T_n; \Phi)(t) =$$

$$= (x_1 * x_2 * \ldots * x_n)(t) - \Phi(T_1(x_1), T_2(x_2), \ldots, T_n(x_n))(t),$$

$$R(M_1, M_2, \ldots, M_n; T_1, T_2, \ldots, T_n; \Phi; L_p) =$$

$$= \sup_{\substack{x_j \in M_j \\ j=1,\ldots,n}} \|R(x_1, x_2, \ldots, x_n; T_1, T_2, \ldots, T_n; \Phi)(\cdot)\|_{L_p}, \tag{1}$$

$$R(M_1, M_2, \ldots, M_n; T_1, T_2, \ldots, T_n; L_p) = \inf_{\Phi} R(M_1, M_2, \ldots, M_n; T_1, T_2, \ldots, T_n; \Phi; L_p), \tag{2}$$

$$R_{m_1,m_2,\ldots,m_n}(M_1, M_2, \ldots, M_n; L_p) = \inf_{T_1,T_2,\ldots,T_n} R(M_1, M_2, \ldots, M_n; T_1, T_2, \ldots, T_n; L_p) \tag{3}$$

($\inf\limits_{\Phi}$ берется по всевозможным методам восстановления, а $\inf\limits_{T_1,T_2,\ldots,T_n}$ — по всевозможным наборам функционалов, дающим $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$- информацию об $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;

$$R_N(M_1, M_2, \ldots, M_n; L_p) = \inf_{m_1+m_2+\ldots+m_n=N} R_{m_1,m_2,\ldots,m_n}(M_1, M_2, \ldots, M_n; L_p). \tag{4}$$

Величину (1) назовем погрешностью метода Φ восстановления свертки n функций $x_1 * x_2 * \ldots * x_n$ на классах $M_1, M_2, \ldots, M_n$ по информации $T_1, T_2, \ldots, T_n$ в пространстве L_p; величину (2) — оптимальной погрешностью восстановления $x_1 * x_2 * \ldots * x_n$ на классах $M_1, M_2, \ldots, M_n$ по заданной информации типа $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$, величину (3) — оптимальной погрешностью восстановления $x_1 * x_2 * \ldots * x_n$ на $M_1, M_2, \ldots, M_n$ по $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$-информации, и, наконец, величину (4) — оптимальной погрешностью восстановления $x_1 * x_2 * \ldots * x_n$ на $M_1, M_2, \ldots, M_n$ по информации суммарного объема N.

Если при заданных $T_1, T_2, \ldots, T_n$ существует метод Φ^*, реализующий $\inf\limits_{\Phi}$ в правой части (2), то будем называть Φ^* оптимальным методом использования данной информации. Если существуют $T_1^*, T_2^*, \ldots, T_n^*$, реализующие нижнюю грань в правой части (3), то будем их называть оптимальной $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$-информацией для восстановления $x_1 * x_2 * \ldots * x_n$ на $M_1, M_2, \ldots, M_n$ в пространстве L_p.

Числа $m_1^0, m_2^0, \ldots, m_n^0$, реализующие $\inf$ в (4), будем называть оптимальными объемами информации об $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а оптимальную $(m_1^0, m_2^0, \ldots, m_n^0)$-информацию — оптимальной информацией суммарного объема N об $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Будем изучать следующую задачу оптимального восстановления свертки n функций по линейной информации о сворачиваемых функциях.

Пусть заданы классы функций $M_1, M_2, \ldots, M_n$ и $p \in [1, \infty]$, $N \in \mathbb{N}$. Требуется найти величину (4), оптимальные объемы $m_1^*, m_2^*, \ldots, m_n^*$ информации $(m_1^* + m_2^* + \ldots + m_n^* = N)$, оптимальную $(m_1^*, m_2^* \ldots, m_n^*)$-информацию $T_1^*, T_2^*, \ldots, T_n^*$, а также оптимальный метод Φ^* ее использования.

Задача об оптимальном восстановлении свертки двух функций из различных функциональных классов была рассмотрена в [1]. Там же приведены первые результаты по ее решению. По поводу дальнейших результатов в этом направлении см. [2].

Определим множества $M_j(T_j)$ так:

$$M_j(T_j) = \{x_j \in M_j : T_j(x_j) = 0\}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

и пусть

$$M(T_j)\colon = M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_{j-1} \times M_j(T_j) \times M_{j+1} \times \ldots \times M_n, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Оценку снизу для величины (1), а, следовательно, и величины (2), дает следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть множества $M_1, M_2, \ldots, M_n$ выпуклы и центрально- симметричны. Тогда для любых наборов функционалов $T_1, T_2, \ldots, T_n$ и любого метода восстановления Φ*

$$R(M_1, M_2, \ldots, M_n; T_1, T_2, \ldots, T_n; \Phi; L_p) \geq \max_{j=1,\ldots,n} \sup_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in M(T_j)} \|(x_1 * x_2 * \ldots * x_n)(\cdot)\|_{L_p}.$$

Доказательство. Покажем, что

$$R(M_1, M_2, \ldots, M_n; T_1, T_2, \ldots, T_n; \Phi; L_p) \geq \sup_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in M(T_1)} \|(x_1 * x_2 * \ldots * x_n)(\cdot)\|_{L_p}.$$

Имеем (ниже θ — нулевой элемент пространства $\mathbb{R}^{m_1}$)

$$R(M_1, M_2, \ldots, M_n; T_1, T_2, \ldots, T_n; \Phi; L_p) \geq$$

$$\geq \sup_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in M(T_1)} \Big\|(x_1 * x_2 * \ldots * x_n)(\cdot) - \Phi(\theta, T_2(x_2), \ldots, T_n(x_n))(\cdot)\Big\|_{L_p} \geq$$

$$\geq \sup_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in M(T_1)} \max\Big\{\big\|(x_1 * x_2 * \ldots * x_n)(\cdot) - \Phi(\theta, T_2(x_2), \ldots, T_n(x_n))(\cdot)\big\|_{L_p},$$

$$\big\|-(x_1 * x_2 * \ldots * x_n)(\cdot) - \Phi(\theta, T_2(x_2), \ldots, T_n(x_n))(\cdot)\big\|_{L_p}\Big\} \geq$$

$$\geq \sup_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in M(T_1)} \big\|(x_1 * x_2 * \ldots * x_n)(\cdot)\big\|_{L_p}.$$

Аналогично доказывается, что для произвольного $j = 2, \ldots, n$

$$R(M_1, M_2, \ldots, M_n; T_1, T_2, \ldots, T_n; \Phi; L_p) \geq \sup_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in M(T_j)} \big\|(x_1 * x_2 * \ldots * x_n)(\cdot)\big\|_{L_p}.$$

Отсюда и следует утверждение леммы.

Лемма доказана.

Пусть F_p — единичный шар в L_p, $K \in L_1$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} K dt \neq 0$. Через $K * F_p$ обозначим класс функций вида $x = K * \psi$, $\psi \in F_p$. В дальнейшем будем предполагать, что $M_j = K_j * F_{p_j}$, $j = 1, \ldots, n$, где $K_j \in L_1$.

Пусть $d_N(M, C)$ обозначает n-поперечник по Колмогорову множества M в пространстве C (см., например, [3, с. 109]).

Теорема 1. *Пусть $K_1, K_2, \ldots, K_n \in L_1$. Тогда для любых наборов функционалов $T_j = (T_{j,1}, T_{j,2}, \ldots, T_{j,m_j})$, $j = 1, \ldots, n$, $T_{j,l}\colon \mathrm{span}\,(K_j * F_1) \to \mathbb{R}$, $l = 1, \ldots, m_j$, и любого метода восстановления Φ*

$$R(K_1 * F_1, K_2 * F_1, \ldots, K_n * F_1; T_1, T_2, \ldots, T_n; \Phi; L_1) \geq$$

$$\geq d_{\min\{m_1,m_2,\ldots,m_n\}}((K_1 * K_2 * \ldots * K_n)(-\cdot) * F_\infty, C).$$

Доказательство. Пусть, для определенности, $\min\{m_1, m_2, \ldots, m_n\} = m_1$. В силу леммы 1 достаточно установить неравенство

$$A_1 : = \sup_{\substack{x_1 \in (K_1 * F_1)(T_1) \\ x_2 \in K_2 * F_1, \ldots, x_n \in K_n * F_1}} \|(x_1 * x_2 * \ldots * x_n)(\cdot)\|_{L_1} \geq d_{m_1}(K_1 * K_2 * \ldots * K_n * F_\infty, C).$$

Имеем

$$A_1 = \sup_{\substack{\psi_j \in F_1, j=1,\ldots,n \\ T_1(K*\psi_1)=\theta}} \left\|(K_1 * \psi_1) * (K_2 * \psi_2) * \ldots * (K_n * \psi_n)(\cdot)\right\|_{L_1} =$$

$$= \sup_{\substack{\psi_j \in F_1, j=1,\ldots,n \\ T_1(K*\psi_1)=\theta}} \left\|(K_1 * K_2 * \ldots * K_n * \psi_1 * \psi_2 * \ldots * \psi_n)(\cdot)\right\|_{L_1} =$$

$$= \sup_{\substack{\psi_j \in F_1, j=1,\ldots,n \\ T_1(K*\psi_1)=\theta}} \sup_{\phi \in F_\infty} \int\limits_0^{2\pi} (K_1 * K_2 * \ldots * K_n * \psi_1 * \psi_2 * \ldots * \psi_n)(t)\phi(t)dt =$$

$$= \sup_{\phi \in F_\infty} \sup_{\substack{\psi_j \in F_1, j=1,\ldots,n \\ T_1(K*\psi_1)=\theta}} \int\limits_0^{2\pi} ((K_1 * K_2 * \ldots * K_n)(-\cdot) * \phi)(u)(\psi_1 * \psi_2 * \ldots * \psi_n)(u)du =$$

$$= \sup_{\phi \in F_\infty} \sup_{\substack{\psi_j \in F_1, j=1,\ldots,n-1 \\ T_1(K*\psi_1)=\theta}} \max_t \int\limits_0^{2\pi} ((K_1 * K_2 * \ldots * K_n)(-\cdot) * \phi)(u)(\psi_1 * \psi_2 * \ldots * \psi_{n-1})(u-t)du =$$

$$= \sup_{\phi \in F_\infty} \sup_{\substack{\psi_j \in F_1, j=1,\ldots,n-1 \\ T_1(K*\psi_1)=\theta}} \int\limits_0^{2\pi} ((K_1 * K_2 * \ldots * K_n)(-\cdot) * \phi)(u)(\psi_1 * \psi_2 * \ldots * \psi_{n-1})(u)du = \ldots =$$

$$= \sup_{\phi \in F_\infty} \sup_{\substack{\psi_j \in F_1, j=1,2 \\ T_1(K*\psi_1)=\theta}} \int\limits_0^{2\pi} ((K_1 * K_2 * \ldots * K_n)(-\cdot) * \phi)(u)(\psi_1 * \psi_2)(u)du =$$

$$= \sup_{\phi \in F_\infty} \sup_{\substack{\psi_j \in F_1 \\ T_1(K*\psi_1)=\theta}} \int\limits_0^{2\pi} ((K_1 * K_2 * \ldots * K_n)(-\cdot) * \phi)(u)\psi_1(u)du.$$

Функционалы $T_{1,1}, T_{1,2}, \ldots, T_{1,m_1}$ допускают непрерывные продолжения $T'_{1,1}, T'_{1,2}, \ldots, T'_{1,m_1}$ на все пространство L_1. Пусть функционалы $T'_{1,j}$ имеют вид

$$T'_{1,j}(x_1) = \int\limits_0^{2\pi} x_1(t)g_{1,j}(t)dt, \quad j = 1, \ldots, m_1,$$

где $g_{1,j}$ — фиксированные функции из L_∞.

Условие $T_1(K_1 * \psi_1) = \theta$ означает, что для $j = 1, \ldots, m_1$

$$\int\limits_0^{2\pi} (K_1 * \psi_1)(t)g_{1,j}(t)dt = 0,$$

или

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} K_1(t-\tau)\psi_1(\tau)d\tau g_{1,j}(t)dt = 0,$$

или

$$\int_0^{2\pi}\psi_1(\tau)\int_0^{2\pi} K_1(t-\tau)g_{1,j}(t)dtd\tau = 0.$$

Таким образом, условие $T_1(K_1 * \psi_1) = \theta$ означает, что $\psi_1 \perp K_1(-\cdot) * g_{1,j}$ для любого $j = 1, \ldots, m_1$. Поэтому, учитывая теорему двойственности С. М. Никольского (см. [3, с. 120], предложение 3.4.4), получаем

$$A_1 = \sup_{\phi\in F_\infty} \sup_{\substack{\psi_1\in F_1 \\ \psi_1\perp K_1(-\cdot)*g_{1,j},\, j=1,\ldots,m_1}} \int_0^{2\pi}((K_1 * K_2 * \ldots * K_n)(-\cdot) * \phi)(u)\psi_1(u)du =$$

$$= \sup_{\phi\in F_\infty} E((K_1 * K_2 * \ldots * K_n)(-\cdot) * \phi); H(T_1))_C,$$

где $E(x; H(T_1))_C$ — наилучшее приближение функции x подпространством

$$H(T_1) = \operatorname{span}\{K_1(-\cdot) * g_{1,1}, K_1(-\cdot) * g_{1,2}, \ldots, K_1(-\cdot) * g_{1,m_1}\}$$

в пространстве C.

Поскольку $\dim H(T_1) \leq m_1$, учитывая определения поперечника по Колмогорову, имеем

$$A_1 \geq d_{m_1}((K_1 * K_2 * \ldots * K_n)(-\cdot) * F_\infty, C).$$

Теорема 1 доказана.

Обозначим через H^T_{2s-1}, $s \in \mathbb{N}$, множество тригонометрических полиномов порядка не выше $s-1$. Непрерывное на $(0, 2\pi)$ и не являющееся тригонометрическим полиномом ядро K будем называть CVD-ядром (и писать $K \in CVD$), если $\nu(K * \phi) \leq \nu(\phi)$ для любых $\phi \in C$, где $\nu(g)$ — число перемен знака функции g на периоде. Ряд вопросов теории CVD ядер изложен в [4, 5].

Пусть $K \in CVD$. Тогда это ядро удовлетворяет условиям теоремы 4.1 из [6] и, следовательно, если $\varphi_s(t) = \operatorname{sign}\sin st$, σ — точка абсолютного максимума или абсолютного минимума функции $K * \varphi_s$, то существует единственный полином $P_s = P_s(K) \in {H^T}_{2s-1}$, интерполирующий $K(t)$ в точках $\sigma + \dfrac{m\pi}{s}$, $m \in \mathbb{Z}$, если все точки $\sigma + \dfrac{m\pi}{s}$, $m \in \mathbb{Z}$, являются точками непрерывности K. Если же K разрывно в нуле и $0 \in \left\{\sigma + \dfrac{m\pi}{s}\middle| m \in \mathbb{Z}\right\}$, то существует единственный полином $P_s = P_s(K) \in {H^T}_{2s-1}$, интерполирующий $K((t)$ в точках $\sigma + \dfrac{m\pi}{s} \not\equiv 0$ $(\operatorname{mod} 2\pi)$. Полином $P_s = P_s(K)$ (см. [6], теоремы 2.4, 4.2 и § 5, [7]) является полиномом наилучшего L_1 приближения для K и при этом

$$\|K - P_s\|_{L_1} = \|K(-\cdot) - P_s(-\cdot)\|_{L_1} = \|K * \varphi_s\|_\infty =$$

$$= d_{2s-1}(K * F_\infty; C) = d_{2s-1}(K(-\cdot) * F_\infty; C). \tag{5}$$

Ниже, рассматривая задачу оптимального восстановления свертки $x_1 * x_2 * \ldots * x_n$, где $x_1 \in K_1 * F_1, x_2 \in K_2 * F_1, \ldots, x_n \in K_n * F_1$, будем предполагать, что ядра $K_1, K_2, \ldots, K_n$ таковы, что $K_1 * K_2 * \ldots * K_n \in CVD$.

Пусть $a_j(x)$, $b_j(x)$ — коэффициенты Фурье функции $x \in L_1$, т. е.

$$a_j(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} x(t)\cos jt dt, \qquad b_j(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} x(t)\sin jt dt,$$

$$c_j(x) = \frac{a_j(x) - ib_j(x)}{2}, \qquad c_{-j}(x) = \frac{a_j(x) + ib_j(x)}{2}, \quad j = 0, 1, \ldots.$$

Положим

$$\alpha_j = \frac{c_j(P_{n,\sigma}(K_1 * K_2 * \ldots * K_n))}{c_j(K_1)c_j(K_2)\ldots c_j(K_n)}, \quad j = 0, \pm 1, \ldots, \pm(s-1).$$

Отметим, что из предположения $K_1 * K_2 * \ldots * K_n \in CVD$ следует, что все коэффициенты $c_j(K_1), c_j(K_2), \ldots, c_j(K_n)$ при любом $j \in \mathbb{Z}$ отличны от нуля.

Пусть

$$T_l{}^*(x_l) = (a_0(x_l), a_1(x_l), \ldots, a_{N-1}(x_l), b_1(x_l), \ldots, b_{N-1}(x_l)), l = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

$$\Phi^*(T_1{}^*(x_1), T_2{}^*(x_2), \ldots, T_n{}^*(x_n))(t) = \sum_{j=-(s-1)}^{s-1} \alpha_j c_j(x_1)c_j(x_2)\ldots c_j(x_n)e^{ijt}. \tag{7}$$

Тогда, если $x_1 = K_1 * \psi_1 \in K_1 * F_1$, $x_2 = K_2 * \psi_2 \in K_2 * F_1, \ldots$, $x_n = K_n * \psi_n \in K_n * F_1$, то учитывая тот факт, что для $g_1, g_2, \ldots, g_n \in L_1$

$$c_j(g_1 * g_2 * \ldots * g_n) = (2\pi)^{n-1} c_j(g_1)c_j(g_2)\ldots c_j(g_n), \quad j \in \mathbb{Z},$$

и действуя, как при преобразовании величины A_1 в доказательстве теоремы 1, получаем

$$\|x_1 * x_2 * \ldots * x_n - \Phi^*(T_1{}^*(x_1), T_2{}^*(x_2), \ldots, T_n{}^*(x_n))\|_{L_1} =$$

$$= \|K_1 * K_2 * \ldots * K_n * \psi_1 * \psi_2 * \ldots * \psi_n -$$

$$-P_s(K_1 * K_2 * \ldots * K_n) * \psi_1 * \psi_2 * \ldots * \psi_n\|_{L_1} =$$

$$= \sup_{\phi \in F_\infty} \int\limits_0^{2\pi} [(K_1 * K_2 * \ldots * K_n * \psi_1 * \psi_2 * \ldots * \psi_n)(t) -$$

$$-P_s(K_1 * K_2 * \ldots * K_n) * \psi_1 * \psi_2 * \ldots * \psi_n]\phi(t) dt =$$

$$= \sup_{\phi \in F_\infty} \int\limits_0^{2\pi} ([(K_1 * K_2 * \ldots * K_n)(-\cdot) -$$

$$-(P_s(K_1 * K_2 * \ldots * K_n))(-\cdot)] * \phi)(t) \cdot (\psi_1 * \psi_2 * \ldots * \psi_n)(t) dt.$$

Отсюда следует, что

$$\|x_1 * x_2 * \ldots * x_n - \Phi^*(T_1{}^*(x_1), T_2{}^*(x_2), \ldots, T_n{}^*(x_n))\|_{L_1} \leq$$

$$\leq \sup_{\phi \in F_\infty} \|[(K_1 * K_2 * \ldots * K_n)(-\cdot)-$$

$$-(P_s(K_1 * K_2 * \ldots * K_n))(-\cdot)] * \phi\|_C \|\psi_1 * \psi_2 * \ldots * \psi_n\|_{L_1} \leq$$

$$\leq \sup_{\phi \in F_\infty} \|[(K_1 * K_2 * \ldots * K_n)(-\cdot) - (P_s(K_1 * K_2 * \ldots * K_n))(-\cdot)] * \phi\|_C \leq$$

$$\leq \|(K_1 * K_2 * \ldots * K_n)(-\cdot) - (P_s(K_1 * K_2 * \ldots * K_n))(-\cdot)\|_{L_1} \leq$$

$$\leq \|K_1 * K_2 * \ldots * K_n - P_s(K_1 * K_2 * \ldots * K_n)\|_{L_1}.$$

Учитывая соотношения (5), имеем

$$\|x_1 * x_2 * \ldots * x_n - \Phi^*(T_1{}^*(x_1), T_2{}^*(x_2), \ldots, T_n{}^*(x_n)\|_{L_1} \leq$$

$$\leq d_{2s-1}(K_1 * K_2 * \ldots * K_n * F_\infty; C).$$

Таким образом,

$$R(K_1 * F_1, K_2 * F_1, \ldots, K_n * F_1; T_1, T_2, \ldots, T_n; \Phi^*; L_1) \leq$$

$$\leq d_{2s-1}(K_1 * K_2 * \ldots * K_n * F_\infty; C) = \|K_1 * K_2 * \ldots * K_n * \varphi_s\|_C.$$

Учитывая оценку снизу, даваемую теоремой 1 и монотонное невозрастание поперечников $d_m(M, C)$ с ростом m, убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть ядра* $K_1, K_2, \ldots, K_n$ *таковы, что* $K_1 * K_2 * \ldots * K_n \in CVD$, *пусть* $s \in \mathbb{N}$ *и пусть* $N = n(2s-1)$. *Тогда*

$$R_{n(2s-1)}(K_1 * F_1, K_2 * F_1, \ldots, K_n * F_1; L_1) =$$

$$= R_{2s-1,\ldots,2s-1}(K_1 * F_1, K_2 * F_1, \ldots, K_n * F_1; L_1) =$$

$$= d_{2s-1}(K_1 * K_2 * \ldots * K_n * F_\infty, C) = \|K_1 * K_2 * \ldots * K_n * \varphi_s\|_C.$$

При этом оптимальная информация определяется равенством (6), *а оптимальный метод ее использования — равенством* (7).

Литература

1. *Бабенко В. Ф.* Оптимальные вычисления сверток функций из различных классов // Тез. междунар. конф. по конструктивной теории функций (Варна, май 1989 г.). – София: Изд-во БАН, 1989. – С. 5 – 6.
2. *Бабенко В. Ф., Руденко А. А.* Об оптимальном восстановлении сверток и скалярных произведений функций из различных классов // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 10. – С. 1305 – 1310.
3. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
4. *Mairhuber J. C., Schoenberg I. J., Williamson R. E.* On variation diminishing transformations on the circle // Rend. Circ. mat. Polermo. – 1959. – **8**, № 2. – P. 241 – 270.
5. *Karlin S.* Total positivity. – Stranford, Calif.: Stanford univ. Press, 1968. – Vol. I. – 540 p.
6. *Бабенко В. Ф.* Приближение классов сверток // Сиб. мат. журн. – 1987. – **28**, № 5. – С. 6 – 21.
7. *Pinkus A.* On n-width of periodic functions // J. Anal. Math. – 1979. – **35**. – P. 209 – 235.

Получено 10.05.15