УДК 512.534.5

В. Д. Дереч (Вінниц. нац. техн. ун-т)

КЛАСИФІКАЦІЯ СКІНЧЕННИХ НІЛЬНАПІВГРУП, ДЛЯ ЯКИХ ІНВЕРСНИЙ МОНОЇД ЛОКАЛЬНИХ АВТОМОРФІЗМІВ Є ПЕРЕСТАВНОЮ НАПІВГРУПОЮ

A semigroup S is called permutable if $\rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$ for any pair of congruences ρ, σ on S. A local automorphism of the semigroup S is defined as an isomorphism between two subsemigroups of this semigroup. The set of all local automorphisms of a semigroup S with respect to an ordinary operation of composition of binary relations forms an inverse monoid of local automorphisms. In the proposed paper, we present a classification of all finite nilsemigroups for which the inverse monoid of local automorphisms is permutable.

Полугруппа S называется перестановочной, если для любой пары конгруэнций ρ, σ на S имеет место равенство $\rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$. Локальным автоморфизмом полугруппы S называют изоморфизм между двумя ее подполугруппами. Множество всех локальных автоморфизмов полугруппы S относительно обычной операции композиции бинарных отношений образует инверсный моноид локальных автоморфизмов. В данной статье приведена классификация конечных нильполугрупп, для которых инверсный моноид локальных автоморфизмов является перестановочным.

Напівгрупа S називається інверсною, якщо для будь-якого елемента a існує єдиний елемент a^{-1} такий, що $aa^{-1}a = a$ і $a^{-1}aa^{-1} = a^{-1}$. Відомо (див. [1]), що напівгрупа є інверсною тоді і лише тоді, коли вона регулярна і два її довільні ідемпотенти комутують. Напівгрупа називається моноїдом, якщо вона містить одиницю. Найбільш природним чином інверсний моноїд з'являється у вигляді моноїда всіх локальних автоморфізмів тієї чи іншої математичної структури. (Під локальним автоморфізмом математичної структури розуміють ізоморфізм між її підструктурами.) Нехай S — довільна напівгрупа. Через $L\operatorname{Aut}(S)$ позначимо інверсний моноїд всіх локальних автоморфізмів напівгрупи S. У більшості статей, що стосуються напівгрупи $L\operatorname{Aut}(S)$, розглядається проблема опису таких напівгруп B, що $L\operatorname{Aut}(B) \cong L\operatorname{Aut}(S)$ для даної напівгрупи S. Важливою також є проблема знаходження взаємозв'язків між властивостями напівгрупи S і властивостями інверсної напівгрупи $L\operatorname{Aut}(S)$. Зокрема, у статті [2] (крім іншого) знайдено структуру групи G, для якої інверсний моноїд $L\operatorname{Aut}(G)$ є кліффордовим. У роботі [3] дано опис інверсних напівгруп S, для яких інверсний моноїд всіх локальних автоморфізмів між інверсними піднапівгрупами напівгрупи S є цілком напівпростим або фундаментальним. У статтях [4] і [5] відповідно класифіковано скінченні комутативні напівгрупи, для яких інверсний моноїд локальних автоморфізмів є переставним, і скінченні комутативні напівгрупи, для яких інверсний моноїд локальних автоморфізмів є Δ-напівгрупою (тобто напівгрупою, конгруенції якої утворюють ланцюг відносно включення).

Основний результат даної статті — це повна класифікація скінченних нільнапівгруп, для яких інверсний моноїд локальних автоморфізмів є переставним (див. теорему 6).

1. Означення. Термінологія. Формулювання потрібних результатів. Напівгрупа називається переставною, якщо для будь-яких двох її конгруенцій ρ і σ виконується рівність $\rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$, де $\circ$ — позначення композиції бінарних відношень.

Комутативну напівгрупу, кожний елемент якої є ідемпотентом, називають напіврешіткою. Нетривіальну напіврешітку називають примітивною, якщо кожний її ненульовий елемент є атомом.

Нехай S — довільна напівгрупа. Ізоморфізм між піднапівгрупами напівгрупи S називають *локальним автоморфізмом* напівгрупи S. Множина всіх локальних автоморфізмів напівгрупи S відносно звичайної операції композиції бінарних відношень утворює інверсний моноїд, який ми позначимо через $L\,\mathrm{Aut}(S)$. Якщо $\xi \in L\,\mathrm{Aut}(S)$, то через $\mathrm{dom}(\xi)$ і $\mathrm{im}(\xi)$ будемо позначати відповідно область визначення і множину значень локального автоморфізму ξ.

Нехай S — довільна напівгрупа. Решітку всіх її піднапівгруп будемо позначати через $\mathrm{Sub}(S)$. Якщо напівгрупа S містить найменшу непорожню піднапівгрупу (наприклад, одинична підгрупа в групі), то найменшим елементом $\mathrm{Sub}(S)$ вважається саме ця піднапівгрупа. Якщо ж найменшої непорожньої піднапівгрупи в S не існує, то найменшим елементом $\mathrm{Sub}(S)$ будемо вважати порожню множину $\varnothing$, і в цьому випадку порожнє перетворення є нулем інверсного моноїда $L\,\mathrm{Aut}(S)$. Якщо $A \in \mathrm{Sub}(S)$, то через Δ_A позначимо відношення рівності на піднапівгрупі A. Зрозуміло, що Δ_A є ідемпотентом моноїда $L\,\mathrm{Aut}(S)$. Кожний ідемпотент напівгрупи $L\,\mathrm{Aut}(S)$ має таку форму. Якщо $A \in \mathrm{Sub}(S)$, то через $h(A)$ будемо позначати висоту піднапівгрупи A в решітці $\mathrm{Sub}(S)$.

Нехай S — довільна інверсна напівгрупа перетворень скінченної множини. Якщо $f \in S$, то згідно з класичним означенням $\mathrm{rank(f)} = |\mathrm{im(f)}|$. Таке означення рангу перетворення в багатьох випадках є цілком прийнятним. Проте (взагалі кажучи) воно має низку недоліків. По-перше, при такому означенні ранг не зберігається при автоморфізмі. Для прикладу на множині $\{1, 2, 3\}$ розглянемо такі перетворення: $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\varnothing$. Тоді $\mathrm{rank}(\alpha) = 1$, $\mathrm{rank}(\beta) = 2$, $\mathrm{rank}(\varnothing) = 0$. Зрозуміло, що $\Psi = \begin{pmatrix} \varnothing & \alpha & \beta \\ \varnothing & \beta & \alpha \end{pmatrix}$ є автоморфізмом напіврешітки $\{\varnothing, \alpha, \beta\}$. Як ми бачимо, $(\alpha)\Psi = \beta$, але $1 = \mathrm{rank}(\alpha) \neq \mathrm{rank}(\beta) = 2$. По-друге, таке означення не застосовується, якщо мова йде про інверсну напівгрупу всіх локальних автоморфізмів скінченного лінійного простору. Тобто воно не є універсальним навіть для скінченної інверсної напівгрупи перетворень. По-третє, якщо інверсна напівгрупа містить 0, то доцільно вимагати, щоб $\mathrm{rank}(0) = 0$. Проте для класичного означення це не так. Розглянемо для прикладу інверсну напівгрупу всіх локальних автоморфізмів скінченної групи G. Зрозуміло, що перетворення $\begin{pmatrix} e \\ e \end{pmatrix}$ (де e — одиниця групи G) є нулем інверсного моноїда $L\,\mathrm{Aut}(G)$. За класичним означенням рангу $\mathrm{rank}\left(\begin{pmatrix} e \\ e \end{pmatrix}\right) = 1$. всі перелічені недоліки класичного означення рангу зникають, якщо дати таке означення (див. [7]). Отже, нехай S — інверсна напівгрупа скінченної довжини (відносно звичайного канонічного порядку на S). Якщо $a \in S$, то (за означенням) $\mathrm{rank(a)} = \mathrm{h(aa^{-1})}$, де $h(aa^{-1})$ — висота ідемпотента aa^{-1} у напіврешітці $E(S)$. Легко перевірити, що при такому означенні рангу елемента виконується характеристична нерівність, а саме: $\mathrm{rank(a \cdot b)} \leq \min\{\mathrm{rank(a)}, \mathrm{rank(b)}\}$. Зазначимо, що таке означення рангу елемента інверсної напівгрупи скінченної довжини в багатьох випадках (наприклад, у випадку скінченної симетричної інверсної напівгрупи) тотожне класичному означенню. Конкретизуємо наше означення рангу для інверсного моноїда $L\,\mathrm{Aut}(S)$ у випадку, коли S — скінченна напівгрупа. Отже, нехай $f \in L\,\mathrm{Aut}(S)$, тоді (за означенням) $\mathrm{rank(f)} = \mathrm{h(im(f))}$, де $h(\mathrm{im(f)})$ — висота піднапівгрупи $\mathrm{im(f)}$ у решітці $\mathrm{Sub}(S)$.

Напівгрупа називається уніпотентною, якщо вона містить точно один ідемпотент.

Напівгрупу S, що містить 0, називають нільнапівгрупою, якщо для довільного $x \in S$ існує таке натуральне число n, що $x^n = 0$.

Нехай S — нільнапівгрупа. Визначимо на ній бінарне відношення $\leq$ таким чином: $x \leq y \Leftrightarrow \Leftrightarrow S^1xS^1 \subseteq S^1yS^1$. Легко перевірити, що відношення $\leq$ є порядком (не обов'язково стабільним). Цей порядок назвемо канонічним.

Нехай $\mathcal{H}$ — скінченна множина, що містить щонайменше 4 елементи. Нехай 0 і z два різні фіксовані елементи з множини $\mathcal{H}$. Визначимо операцію на $\mathcal{H}$ таким чином:

a) $0 * x = x * 0 = 0$ для довільного $x \in \mathcal{H}$;

b) $x * x = 0$ для будь-якого $x \in \mathcal{H}$;

c) якщо $x \neq y$ і $\{x, y\} \cap \{0, z\} = \varnothing$, то $x * y = y * x = z$;

d) $x * z = z * x = 0$ для довільного $x \in \mathcal{H}$.

Легко перевірити, що $(\mathcal{H}, *)$ є нільнапівгрупою. Клас таких напівгруп позначимо через $\mathcal{N}$.

Тепер сформулюємо кілька тверджень, які ми будемо застосовувати у даній статті.

Твердження 1 (див. [6], теорема 2)**.** *Нехай S — інверсна напівгрупа скінченного рангу з нулем. Тоді S є переставною в тому і лише в тому випадку, коли виконуються такі умови*:

1) *якщо* $\mathrm{rank(a)} = \mathrm{rank(b)}$ *для будь-яких* $a, b \in S$, *то* $SaS = SbS$;

2) *для будь-якого* $e \in E(S)(\mathrm{rank(e)} \geq 2)$ *існують ідемпотенти* f *і* g *такі, що* $f \neq g$, $f < e$, $g < e$ *і* $\mathrm{rank(f)} = \mathrm{rank(g)} = \mathrm{rank(e)} - 1$.

Зауваження **1** (див. [6], теорема 1)**.** Якщо ранг довільного елемента нетривіальної інверсної напівгрупи S з нулем не перевищує 1, то напівгрупа S переставна тоді і лише тоді, коли вона є напівгрупою Брандта.

Зауваження **2** (див. [7], теорема 2)**.** Зазначимо, що умова 1 твердження 1 еквівалентна лінійній впорядкованості (відносно включення)множини ідеалів напівгрупи S .

Зауваження **3** (див. [6], лема 1)**.** Умовою 2 часто зручніше користуватися в еквівалентній формі. А саме: якщо $u < v$, де $u, v \in E(S)$ і $\mathrm{rank(u)} \geq 1$, то існує елемент $w \in E(S)$ такий, що $u \neq w, w < v$ і $\mathrm{rank(u)} = \mathrm{rank(w)}$.

Твердження 2 (див. [8], теорема 1)**.** *Нехай S — скінченна напівгрупа. Множина ідеалів напівгрупи $L\,\mathrm{Aut}(S)$ лінійно впорядкована відносно включення тоді і тільки тоді, коли в решітці $\mathrm{Sub}(S)$ неізоморфні піднапівгрупи мають різні висоти.*

2. Скінченна в'язка, для якої інверсний моноїд локальних автоморфізмів є переставним. Напівгрупа, кожний елемент якої є ідемпотентом, називається в'язкою. В цьому пункті ми класифікуємо скінченні в'язки, для яких інверсний моноїд локальних автоморфізмів є переставним.

Лема 1. *Якщо скінченна напівгрупа S містить щонайменше два ідемпотенти і інверсний моноїд $L\,\mathrm{Aut}(S)$ є переставним, то кожний елемент напівгрупи S є ідемпотентом.*

Доведення. Насамперед зазначимо, що найменшим елементом решітки $\mathrm{Sub}(S)$ є порожня множина, тому висота кожного ідемпотента напівгрупи S у решітці $\mathrm{Sub}(S)$ дорівнює одиниці. Припустимо, що напівгрупа S містить елемент a, який не є ідемпотентом. Тоді в решітці $\mathrm{Sub}(S)$ висота циклічної напівгрупи $\langle a \rangle$ не менша за два. Відомо, що кожна скінченна циклічна напівгрупа містить точно один ідемпотент. Позначимо через e ідемпотент, що належить $\langle a \rangle$. Згідно з твердженням 1 (див. також зауваження 3 і твердження 2), існує така піднапівгрупа $B \in \mathrm{Sub}(S)$, що $B \subset \langle a \rangle$, $B \neq \{e\}$ і $B \cong \{e\}$. Отже, піднапівгрупа B є одноелементною і цей елемент є ідемпотентом, який відмінний від e. Таким чином, циклічна напівгрупа $\langle a \rangle$ містить більш ниж один ідемпотент. Суперечність.

Лему 1 доведено.

У статті [8] доведено таку теорему.

Теорема 1. *Нехай S — скінченна в'язка. Інверсний моноїд $L\,\mathrm{Aut}(S)$ є переставним в таких і лише в таких випадках*:

(1) *S — лінійно впорядкована напіврешітка*;

(2) *S — примітивна напіврешітка*;

(3) *S — напівгрупа правих нулів*;

(4) *S — напівгрупа лівих нулів.*

Из теореми 1 і леми 1 випливає такий результат.

Теорема 2. *Нехай скінченна напівгрупа S містить щонайменше два ідемпотенти. Її інверсний моноїд локальних автоморфізмів $L\,\mathrm{Aut}(S)$ є переставним тоді і лише тоді, коли S*:

(1) *або лінійно впорядкована напіврешітка*;

(2) *або примітивна напіврешітка*;

(3) *або напівгрупа правих нулів*;

(4) *або напівгрупа лівих нулів.*

3. Скінченна нільнапівгрупа, що містить піднапівгрупу K_1 і для якої інверсний моноїд локальних автоморфізмів є переставним. Наступні дві леми ми віднесемо до математичного фольклору і сформулюємо без доведення.

Лема 2. *Якщо S— скінченна нільнапівгрупа, то $S - S^2$ є найменшою (відносно включення) твірною множиною напівгрупи S.*

Лема 3. *Якщо S — скінченна нільнапівгрупа і $S = S^2$, то $S = \{0\}$.*

Лема 4. *Нехай S — скінченна нільнапівгрупа. Якщо піднапівгрупа A_k містить $k+1$ елемент, то $h(A_k) = k$.*

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції за порядком піднапівгрупи. Очевидно, що $h(\{0\}) = 0$. Припустимо, що для довільної піднапівгрупи A_{k-1}, що містить k елементів, $h(A_{k-1}) = k-1$. Нехай піднапівгрупа A_k містить $k+1$ елемент. Якщо $a_k \in A_k - A_k^2$, то (за припущенням) $h(A_k - \{a_k\}) = k-1$. Отже, $h(A_k) \geq k$. Крім того, очевидно, що $h(A_k) \not> k$. Таким чином, $h(A_k) = k$.

Лему 4 доведено.

Наступна лема дає критерій, за яким ми можемо встановити чи утворюють ідеали інверсного моноїда $L\,\mathrm{Aut}(S)$ (де S — скінченна нільнапівгрупа) ланцюг відносно включення чи ні.

Лема 5. *Нехай S — скінченна нільнапівгрупа. Множина ідеалів інверсного моноїда $L\,\mathrm{Aut}(S)$ лінійно впорядкована відносно включення тоді і лише тоді, коли піднапівгрупи напівгрупи S з однаковою кількістю елементів є ізоморфними.*

Доведення. Безпосередньо випливає з твердження 2 і леми 4.

Лема 6. *Нехай S — скінченна нільнапівгрупа. Інверсний моноїд $L\,\mathrm{Aut}(S)$ задовольняє умову* 2 *твердження* 1 *тоді і лише тоді, коли для довільного $x \in S$ виконується рівність $x^2 = 0$.*

Доведення. Припустимо, що $x^2 = 0$ для будь-якого елемента $x \in S$. Нехай $A \in \mathrm{Sub}(S)$, до того ж $|A| \geq 3$. Тоді A не є циклічною піднапівгрупою напівгрупи S, а отже, твірна множина $A - A^2$ (див. лему 2) містить щонайменше два різні елементи a_1 і a_2. Очевидно, що піднапівгрупи $A - \{a_1\}$ і $A - \{a_2\}$ такі, що $A - \{a_1\} \neq A - \{a_2\}$, $A - \{a_1\} \subset A$, $A - \{a_2\} \subset A$ і $|A - \{a_1\}| = |A - \{a_2\}| = |A| - 1$. Тобто для ідемпотентів інверсного моноїда $L\,\mathrm{Aut}(S)$ виконується умова 2 твердження 1.

Нехай тепер напіврешітка $\mathrm{Sub}(S)$ задовольняє умову 2 твердження 1. Покажемо, що $x^2 = 0$ для будь-якого елемента $x \in S$. Припустимо протилежне, тобто існує елемент a такий, що циклічна напівгрупа $\langle a \rangle$ містить щонайменше три елементи. Позначимо піднапівгрупу $\langle a \rangle - \{a\}$

через C. Тоді існує (див. зауваження 3) піднапівгрупа $B \subset \langle a \rangle$ така, що $B \neq C$ і $|B| = |C|$. Оскільки $B \subset \langle a \rangle$ і $B \neq \langle a \rangle$, то $B \subset \langle a \rangle - \{a\} = C$. Звідси $B = C$. Суперечність.

Лему 6 доведено.

Леми 5 і 6 дають нам можливість сформулювати наступне твердження.

Твердження 3. *Нехай S — скінченна нільнапівгрупа. Інверсний моноїд $L\operatorname{Aut}(S)$ є переставним тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови*:

(i) *для довільного елемента x має місце рівність $x^2 = 0$;*

(ii) *піднапівгрупи з однаковою кількістю елементів є ізоморфними.*

Лема 7. *Якщо скінченна напівгрупа S є уніпотентною і інверсний моноїд $L\operatorname{Aut}(S)$ є переставним, то напівгрупа S є або групою або нільнапівгрупою.*

Доведення. Позначимо через K найменший ідеал напівгрупи S. Відомо, що K є простою напівгрупою. Проста скінченна напівгрупа є регулярною. Як відомо, регулярна напівгрупа з єдиним ідемпотентом є групою. Якщо K — одноелементна група, то S є нільнапівгрупою. Припустимо тепер, що $|K| \geq 2$ і $K \neq S$. Тоді, згідно з твердженням 1 (див. також зауваження 3), існує піднапівгрупа B така, що $K \neq B$ і $K \cong B$. Позначимо через e ідемпотент напівгрупи S. Зрозуміло, що $e \in K \cap B$. Оскільки B — група, то для довільного елемента $b \in B$ маємо $be = eb = b$. Оскільки $e \in K$, то $b \in K$. Звідси $B = K$. Суперечність. Таким чином, у цьому випадку $K = S$, тобто S — група.

Лему 7 доведено.

Далі ми зосередимося на вивченні структури скінченних нільнапівгруп, для яких інверсний моноїд локальних автоморфізмів є переставним. Перше питання, яке виникає: чи існує скінченна некомутативна нільнапівгрупа, що задовольняє умови (i) і (ii) (див. твердження 3)? Відповідь є ствердною. Наведемо приклад.

Приклад. Розглянемо множини $K_1 = \{0, a, x, y\}$ і $K_2 = \{0, a, b, x, y\}$. На цих множинах задамо операції $*$ і $\star$ за допомогою відповідно таблиць множення.

$*$	**0**	**a**	**x**	**y**
0	0	0	0	0
a	0	0	0	0
x	0	0	0	a
y	0	0	0	0

$\star$	**0**	**a**	**b**	**x**	**y**
0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0
b	0	0	0	0	0
x	0	0	0	0	a
y	0	0	0	b	0

Легко перевірити, що $(K_1, *)$ і $(K_2, \star)$ є некомутативними нільнапівгрупами. Перелічимо піднапівгрупи визначених напівгруп. Список піднапівгруп напівгрупи K_1: $0 = \{0\}$, $\alpha = \{0, x\}$, $\beta = \{0, a\}$, $\xi = \{0, y\}$, $\eta = \{0, x, a\}$, $\tau = \{0, y, a\}$, $\sigma = \{0, x, y, a\}$. (Діаграму решітки $\operatorname{Sub}(K_1)$ див. на рис. 1.)

Список піднапівгруп напівгрупи K_2: $0 = \{0\}$, $\chi = \{0, x\}$, $\alpha = \{0, a\}$, $\beta = \{0, b\}$, $\upsilon = \{0, y\}$, $\eta = \{0, x, a\}$, $\tau = \{0, x, b\}$, $\omega = \{0, a, b\}$, $\lambda = \{0, y, a\}$, $\xi = \{0, y, b\}$, $\rho = \{0, x, a, b\}$, $\varphi = \{0, y, a, b\}$, $\sigma = \{0, x, y, a, b\}$. (Діаграму решітки $\operatorname{Sub}(K_2)$ див. на рис. 2.)

Легко перевірити, що кожна власна піднапівгрупа напівгруп K_1 і K_2 є напівгрупою з нульовим множенням. Звідси зрозуміло, що дві власні піднапівгрупи з однаковою кількістю елементів є ізоморфними, тобто виконується умова (ii) твердження 3. Також очевидно, що виконується і умова (i). Отже, інверсні моноїди $L\operatorname{Aut}(K_1)$ і $L\operatorname{Aut}(K_2)$ є переставними.

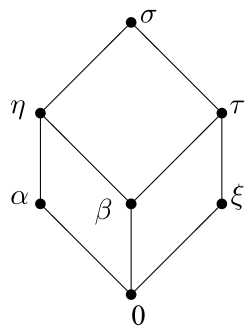

Рис. 1

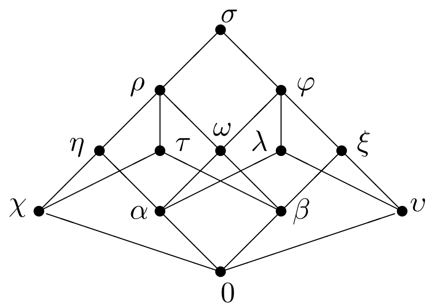

Рис. 2

Твердження 4. *Нехай некомутативна скінченна нільнапівгрупа S така, що інверсний моноїд $L\,\mathrm{Aut}(S)$ є переставним. Тоді напівгрупа S містить або піднапівгрупу, яка ізоморфна напівгрупі K_1 або напівгрупу, яка ізоморфна напівгрупі K_2.*

Доведення. Оскільки за умовою напівгрупа S є некомутативною, то існують елементи x і y такі, що $xy \neq yx$.

1-й *випадок*: $xy = 0$ або $yx = 0$.

Для конкретності нехай $yx = 0$. Тоді чотириелементна множина $\{0, x, y, xy\}$ утворює піднапівгрупу, яка ізоморфна напівгрупі K_1.

2-й *випадок*: $xy \neq 0$ і $yx \neq 0$.

Покажемо, що $xyx = 0$. Припустимо, що $xyx \neq 0$. Тоді легко переконатися, що множина $A = \{0, x, xy, xyx\}$ утворює піднапівгрупу, яка ізоморфна K_1.

Тепер розглянемо множину $B = \{0, xy, yx, xyx\}$. Легко перевірити, що B — напівгрупа з нульовим множенням. Оскільки $|A| = |B|$, то, згідно з лемою 5, $A \cong B$. Суперечність. Таким чином, $xyx = 0$.

Аналогічно можна довести, що $yxy = 0$. Тепер ми можемо стверджувати, що $\{0, x, y, xy, yx\}$ — п'ятиелементна піднапівгрупа напівгрупи S. Легко перевірити, що вона ізоморфна напівгрупі K_2.

Зазначимо, що напівгрупа K_2 містить чотириелементну піднапівгрупу з нульовим множенням. Тому ситуація, коли напівгрупа S містить і піднапівгрупу, що ізоморфна K_1, і піднапівгрупу, яка ізоморфна K_2, є неможливою.

Твердження 4 доведено.

Лема 8. *Нехай скінченна нільнапівгрупа S містить піднапівгрупу K_1 і інверсний моноїд $L\,\mathrm{Aut}(S)$ є переставним. Якщо $xy = yx$, то $xy = 0$.*

Доведення. Якщо $x = 0$ або $y = 0$, то твердження леми є очевидним. Якщо $x = y$, то $xy = x^2 = 0$. Нехай тепер $x \neq 0$ і $y \neq 0$. Припустимо, що $xy \neq 0$. Розглянемо множину $\{0, x, y, xy\}$. Очевидно, що $xy \neq x$ і $xy \neq y$. Тобто множина $\{0, x, y, xy\}$ є чотириелементною. Вона утворює комутативну піднапівгрупу. Отже, $\{0, x, y, xy\} \ncong K_1$, що суперечить твердженню 3.

Лему 8 доведено.

Лема 9. *Нехай скінченна нільнапівгрупа S містить піднапівгрупу K_1, $S^2 = \{0, a\}$ і інверсний моноїд $L\,\mathrm{Aut}(S)$ є переставним. Якщо $x, y \notin S^2$ і $x \neq y$, то виконується еквівалентність $xy = a \Leftrightarrow yx = 0$.*

Доведення. Нехай $xy = a$. За умовою $yx = 0$ або $yx = a$. Якщо припустити, що $yx = a$, то $xy = yx = a$, що суперечить лемі 8. Отже, $yx = 0$.

Нехай тепер $yx = 0$. Доведемо, що $xy = a$. Припустимо протилежне, тобто $xy = 0$. Тоді $\{0, a, x, y\}$ — піднапівгрупа з нульовим множенням. Отже, $\{0, a, x, y\} \ncong K_1$, що суперечить твердженню 3.

Лему 9 доведено.

Лема 10. *Нехай скінченна нільнапівгрупа S складається щонайменше з п'яти елементів і містить піднапівгрупу, що ізоморфна K_1. Крім того, інверсний моноїд $L\,\mathrm{Aut}(S)$ є переставним. Тоді $|S - S^2| \geq 3$.*

Доведення. Згідно з лемою 2 множина $S - S^2$ є найменшою твірною множиною напівгрупи S. Розглянемо можливі випадки.

1-й *випадок*: $|S - S^2| = 1$. Тоді напівгрупа S є моногенною. Оскільки за лемою 5 для довільного x маємо $x^2 = 0$, то в даному випадку $|S| = 2$. Суперечність.

2-й *випадок*: $|S - S^2| = 2$. Нехай $S - S^2 = \{x, y\}$. Тоді $S = \{0, x, y, xy, yx, xyx, yxy\}$.

Якщо припустити, що $xy = 0$ або $yx = 0$, то $S = \{0, x, y, xy\}$ або $S = \{0, x, y, yx\}$, тобто $|S| \leq 4$. Суперечність.

Нехай тепер $xy \neq 0$ і $yx \neq 0$. Покажемо, що $xyx = 0$ і $yxy = 0$. Припустимо, що $xyx \neq 0$. Розглянемо множину $\{0, xy, yx, xyx\}$. Згідно з лемою 8 $xy \neq yx$. Крім того, $xy \neq xyx$ і $yx \neq$ $\neq xyx$. Отже, $A = \{0, xy, yx, xyx\}$ — чотириелементна піднапівгрупа з нульовим множенням. За умовою напівгрупа S містить піднапівгрупу, яка ізоморфна K_1. Крім того, $|K_1| = 4$. Отже, згідно з твердженням 3 $A \cong K_1$. Суперечність. Аналогічно одержуємо суперечність, якщо припустити, що $yxy \neq 0$.

Якщо ж $xyx = yxy = 0$, то $\{0, x, xy, yx\}$ — чотириелементна піднапівгрупа з нульовим множенням. Очевидно, вона не ізоморфна K_1, що суперечить твердженню 3.

Лему 10 доведено.

Нехай скінченна нільнапівгрупа P_m така, що:

$|P_m| = m + 4$, де $m \geq 1$;

інверсний моноїд $L\,\mathrm{Aut}(P_m)$ є переставним;

напівгрупа P_m містить піднапівгрупу, яка ізоморфна K_1.

Виконаємо такі дії:

1) з напівгрупи P_m вилучимо довільний елемент z_m, що належить твірній множині $P_m - P_m^2$; одержимо піднапівгрупу P_{m-1};

2) з напівгрупи P_{m-1} вилучимо довільний елемент z_{m-1}, що належить $P_{m-1} - P_{m-1}^2$; отримаємо піднапівгрупу P_{m-2}.

Аналогічно діємо і далі, аж поки не дійдемо до чотириелементної піднапівгрупи $\{0, a, x, y\}$, яка ізоморфна K_1. (Далі піднапівгрупу $\{0, a, x, y\}$ позначатимемо через K_1.)

Розглянемо п'ятиелементну напівгрупу $P_1 = \{0, a, x, y, z_1\}$. Зазначимо, що K_1 є ідеалом напівгрупи P_1.

Лема 11. *У напівгрупі P_1 виконується рівність $az_1 = z_1a = 0$.*

Доведення. Якщо $az_1 = x$, то $az_1y = xy = a$. Звідси $a = 0$. Суперечність.

Якщо $az_1 = y$, то $xaz_1 = xy = a$. Звідси $x^2az_1^2 = xaz_1 = a = 0$. Суперечність.

Аналогічно доводимо, що $z_1a \neq x$ і $z_1a \neq y$. Крім того, $az_1 \neq z_1$, $az_1 \neq a$, $z_1a \neq z_1$, $z_1a \neq a$.

Отже, $az_1 = z_1a = 0$.

Лема 12. $P_1^2 = \{0, a\}$.

Доведення. Згідно з лемою 10 $|P_1 - P_1^2| \geq 3$. Зрозуміло, що $0 \notin P_1 - P_1^2$ і $a \notin P_1 - P_1^2$. Звідси $P_1 - P_1^2 = \{x, y, z_1\}$. Отже, $P_1^2 = \{0, a\}$.

Лема 13. *Якщо* $P_{k-1}^2 = \{0, a\}$, *де* $k \geq 2$, *то* $P_k^2 = \{0, a\}$.

Доведення. Очевидно, що $\{0, a\} \subset P_k^2$. Доведемо зворотне включення. Нехай $u, v \in P_k$. Згідно з лемою 10 $|P_k - P_k^2| \geq 3$. Отже, існує такий елемент $w \in P_k - P_k^2$, що $w \neq u$ і $w \neq v$. Піднапівгрупу $P_k - \{w\}$ позначимо через B. Оскільки $|P_{k-1} \cap B| \geq 4$, то існують такі $x_1, x_2 \in P_{k-1} \cap B$, що $x_1 x_2 = a$ і $x_2 x_1 = 0$ (див. лему 9). Отже, $\{0, a\} \subset B^2$. Позаяк $|P_{k-1}| = |B|$, то, згідно з твердженням 3, $P_{k-1} \cong B$. Звідси випливає, що $|P_{k-1}^2| = |B^2|$. Оскільки $P_{k-1}^2 = \{0, a\} \subset B^2$, то $B^2 = \{0, a\}$. Отже, $uv \in \{0, a\}$. Тобто $P_k^2 \subset \{0, a\}$. Таким чином, $P_k^2 = \{0, a\}$.

Лема 14. $P_m^2 = \{0, a\}$.

Доведення. Згідно з лемою 12 $P_1^2 = \{0, a\}$. Крім того, з умови $P_{k-1}^2 = \{0, a\}$ випливає $P_k^2 = \{0, a\}$ (див. лему 13). Використовуючи індукцію, одержуємо $P_m^2 = \{0, a\}$.

Нехай п'ятиелементна нільнапівгрупа $S = \{0, a, x, y, z\}$ така, що:

(i) $\{0, a, x, y\} \cong K_1$ (де $K_1^2 = \{0, a\}$);

(ii) інверсний моноїд $L\,\mathrm{Aut}(S)$ є переставним.

Згідно з лемою 14 $S^2 = \{0, a\}$. Тому множина $\{0, a, z\}$ є піднапівгрупою, яка (згідно з твердженням 3) ізоморфна піднапівгрупі $\{0, a, x\}$. Оскільки $\{0, a, x\}$ — напівгрупа з нульовим множенням, то $az = za = 0$.

Всього п'ятиелементних нільнапівгруп, що задовольняють умови (i) та (ii), буде чотири. Наведемо їх:

$*_1$	**0**	**a**	**x**	**y**	**z**
0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0
x	0	0	0	a	0
y	0	0	0	0	a
z	0	0	a	0	0

$*_2$	**0**	**a**	**x**	**y**	**z**
0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0
x	0	0	0	a	a
y	0	0	0	0	0
z	0	0	0	a	0

$*_3$	**0**	**a**	**x**	**y**	**z**
0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0
x	0	0	0	a	a
y	0	0	0	0	a
z	0	0	0	0	0

$*_4$	**0**	**a**	**x**	**y**	**z**
0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0
x	0	0	0	a	0
y	0	0	0	0	0
z	0	0	a	a	0

Лема 15. 1. *Напівгрупи* $(S, *_2)$, $(S, *_3)$, $(S, *_4)$ *попарно ізоморфні.*

2. $(S, *_1) \ncong (S, *_4)$.

Доведення. Позначимо через $\psi_{i,j}$ відображення з напівгрупи $(S, *_i)$ у напівгрупу $(S, *_j)$. Перевірка показує, що функції $\psi_{4,2} = \begin{pmatrix} 0 & a & x & y & z \\ 0 & a & z & y & x \end{pmatrix}$ і $\psi_{4,3} = \begin{pmatrix} 0 & a & x & y & z \\ 0 & a & y & z & x \end{pmatrix}$ є ізоморфізмами.

Також легко перевірити, що $(S, *_1) \ncong (S, *_4)$.

Нільнапівгрупу $(S, *_1)$ позначимо через B_1. Покажемо, що напівгрупа B_1 має екстремальну властивість. А саме, має місце таке твердження.

Твердження 5. *Якщо нільнапівгрупа S містить власну піднапівгрупу, ізоморфну B_1, то інверсний моноїд $L\operatorname{Aut}(S)$ не є переставним.*

Доведення. Припустимо протилежне, тобто інверсний моноїд $L\operatorname{Aut}(S)$ є переставним. Нехай $\{0, a, x, y, z\}$ — множина всіх елементів напівгрупи B_1, до того ж $B_1^2 = \{0, a\}$ і $B_1 \subset S$. Виберемо довільний елемент $u \in S$ такий, що $u \notin B_1$. Згідно з лемою 14 $S^2 = \{0, a\}$. Звідси випливає, що множина $A = \{0, a, x, y, u\}$ є піднапівгрупою напівгрупи S. Розглянемо всі відображення ψ з B_1 в A такі, що $(0)\psi = 0$ і $(a)\psi = a$. Таких буде 6. Легко перевірити, що відображення

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 0 & a & x & y & z \\ 0 & a & x & u & y \end{pmatrix}, \quad \psi_2 = \begin{pmatrix} 0 & a & x & y & z \\ 0 & a & y & x & u \end{pmatrix}, \quad \psi_3 = \begin{pmatrix} 0 & a & x & y & z \\ 0 & a & u & y & x \end{pmatrix}$$

не є ізоморфізмами. Припустимо, що $\psi_4 = \begin{pmatrix} 0 & a & x & y & z \\ 0 & a & x & y & u \end{pmatrix}$ — ізоморфізм, тоді $yu = a$. Розглянемо піднапівгрупу $C = \{0, a, y, z, u\}$. Переглянувши всі шість відображень $\xi\colon B_1 \to C$ таких, що $(0)\xi = 0$ і $(a)\xi = a$ переконуємося, що $B_1 \ncong C$. Одержуємо суперечність з твердженням 3. Отже, відображення ψ_4 не є ізоморфізмом. Аналогічними міркуваннями приходимо до суперечності з твердженням 3, припустивши, що

$$\psi_5 = \begin{pmatrix} 0 & a & x & y & z \\ 0 & a & y & u & x \end{pmatrix} \qquad \text{або} \qquad \psi_6 = \begin{pmatrix} 0 & a & x & y & z \\ 0 & a & u & x & y \end{pmatrix}$$

є ізоморфізмами. Отже, всі шість відображень $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5, \psi_6$ не є ізоморфізмами. Тобто $A \ncong B_1$, що суперечить твердженню 3.

Твердження 5 доведено.

Перелічимо всі піднапівгрупи напівгрупи B_1: $\{0\}, \{0, a\}, \{0, x\}, \{0, y\}, \{0, z\}, \{0, a, x\}, \{0, a, y\}, \{0, a, z\}, \{0,$ Легко перевірити, що будь-які дві піднапівгрупи з однаковою кількістю елементів є ізоморфними. Інверсний моноїд $L\operatorname{Aut}(B_1)$ містить 47 елементів. Група автоморфізмів напівгрупи B_1 (тобто група одиниць моноїда $L\operatorname{Aut}(B_1)$) триелементна:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & x & y & z \\ 0 & a & x & y & z \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & a & x & y & z \\ 0 & a & y & z & x \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & a & x & y & z \\ 0 & a & z & x & y \end{pmatrix}.$$

Вище ми вже показали, що існують лише дві (з точністю до ізоморфізму) п'ятиелементні нільнапівгрупи, які містять напівгрупу K_1 і у яких інверсний моноїд локальних автоморфізмів є переставним. В сенсі твердження 5 нільнапівгрупа B_1 є максимальною. Тепер розглянемо нільнапівгрупу $(S, *_4)$, яка ізоморфна (див. лему 15) напівгрупам $(S, *_2)$ і $(S, *_3)$.

Конструкція 1

Зафіксуємо двоелементну множину $\{0, a\}$. Нехай скінченна множина X така, що $\{0, a\} \cap X = \varnothing$ і $|X| \geq 3$. На X задаємо строгий лінійний порядок $<$. Визначимо бінарну операцію на множині $\{0, a\} \cup X$:

$0y = y0 = 0$ для будь-якого $y \in \{0, a\} \cup X$;

$ay = ya = 0$ для будь-якого $y \in \{0, a\} \cup X$;

якщо $x_k, x_m \in X$ і $x_k < x_m$, то $x_k x_m = 0$ і $x_m x_k = a$;

$z^2 = 0$ для довільного $z \in \{0, a\} \cup X$.
Відносно визначеної операції множина $\{0, a\} \cup X$ стає нільнапівгрупою, яка включає в себе напівгрупу, що ізоморфна нільнапівгрупі $(S, *_4)$.

Щоб переконатися, що інверсний моноїд локальних автоморфізмів напівгрупи $\{0, a\} \cup X$ є переставним, потрібно перевірити виконання умов (i) та (ii) (див. твердження 3). Виконання умови (i) забезпечується за означенням. Щоб перевірити виконання умови (ii), зазначимо, що всі дво- і триелементні піднапівгрупи напівгрупи $\{0, a\} \cup X$ є напівгрупами з нульовим множенням. Очевидно, що такі напівгрупи з однаковою кількістю елементів є ізоморфними. Далі, якщо рівнопотужні піднапівгрупи $\{0, a, x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{im}\}$ і $\{0, a, x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{km}\}$ містять щонайменше по чотири елемента, до того ж $x_{i1} < x_{i2} < \ldots < x_{im}$ і $x_{k1} < x_{k2} < \ldots < x_{km}$, то, як легко перевірити, відображення $\begin{pmatrix} 0 & a & x_{i1} & x_{i2} & \ldots & x_{im} \\ 0 & a & x_{k1} & x_{k2} & \ldots & x_{km} \end{pmatrix}$ є ізоморфізмом. Отже, згідно з твердженням 3 інверсний моноїд $L\,\mathrm{Aut}(\{0, a\} \cup X)$ є переставним.

Лема 16. *Нехай скінченна нільнапівгрупа S містить піднапівгрупу, що ізоморфна $(S, *_4)$ і інверсний моноїд $L\,\mathrm{Aut}(S)$ є переставним. Тоді напівгрупа S має структуру, опис якої дано в конструкції* 1.

Доведення. Згідно з лемою 14 $S^2 = \{0, a\}$. На множині $S - S^2$ визначимо бінарне відношення Ω таким чином: $(x, y) \in \Omega \Leftrightarrow xy = 0$. Покажемо, що відношення Ω є лінійним порядком. Оскільки для довільного елемента $x \in S$ маємо $x^2 = 0$ (див. твердження 3), то відношення Ω рефлексивне. З леми 9 безпосередньо випливає, що Ω є антисиметричним бінарним відношенням. Доведемо транзитивність відношення Ω. Отже, нехай $xy = 0$ і $yz = 0$. Покажемо, що $xz = 0$. Якщо $x = y$ або $y = z$, то, очевидно, $xz = 0$. Припустимо, що $x \neq y$ і $y \neq z$. Якщо припустити, що $xz = a$, то легко встановити ізоморфізм піднапівгрупи $\{0, a, x, y, z\}$ і напівгрупи $(S, *_1)$. За умовою напівгрупа S містить піднапівгрупу, що ізоморфна $(S, *_4)$. Згідно з лемою 15 $(S, *_1) \not\cong (S, *_4)$. Тобто напівгрупа S містить дві неізоморфні рівнопотужні піднапівгрупи, що суперечить твердженню 3. Таким чином, ми встановили транзитивність бінарного відношення Ω. Отже, Ω — порядок. З леми 9 безпосередньо випливає, що Ω є лінійним порядком. Отже, нільнапівгрупа S має саме таку структуру, опис якої наведено в конструкції 1.

Лему 16 доведено.

Підсумуємо результати третього пункту у вигляді теореми.

Теорема 3. *Нехай нільнапівгрупа S містить піднапівгрупу, яка ізоморфна K_1. Інверсний моноїд $L\,\mathrm{Aut}(S)$ є переставним в таких і лише таких випадках*:

нільнапівгрупа S ізоморфна K_1;

нільнапівгрупа S ізоморфна B_1;

нільнапівгрупа S має структуру, опис якої дано у кострукції 1.

4. Скінченна нільнапівгрупа, що містить піднапівгрупу K_2 і для якої інверсний моноїд локальних автоморфізмів є переставним.

Лема 17. *Нехай скінченна нільнапівгрупа S містить піднапівгрупу, яка ізоморфна K_2, і інверсний моноїд $L\,\mathrm{Aut}(S)$ є переставним. Якщо $xy = yx$, то $xy = 0$.*

Доведення. Твердження леми є тривіальним у випадку, коли $x = 0$ або $y = 0$, а також у випадку, коли $x = y$. Припустимо тепер, що $x \neq 0, y \neq 0$ і $x \neq y$. Якщо припустити, що $xy \neq 0$, то множина $\{0, x, y, xy\}$ — чотириелементна піднапівгрупа напівгрупи S. Легко перевірити, що будь-яка чотириелементна піднапівгрупа напівгрупи K_2 є напівгрупою з нульовим множенням. Позаяк піднапівгрупа $\{0, x, y, xy\}$ не є напівгрупою з нульовим множенням, отримуємо суперечність з твердженням 3.

Лема 18. *Нехай скінченна нільнапівгрупа S містить піднапівгрупу, яка ізоморфна K_2, і інверсний моноїд $L\,\mathrm{Aut}(S)$ є переставним. Крім того, $S^2 = \{0, a, b\}$. Якщо x, $y \in S - S^2$ і $x \neq y$, то $xy = a \Leftrightarrow yx = b$.*

Доведення. Нехай $xy = a$. Покажемо, що $yx = b$. Припустимо, що $yx \neq b$, тоді $yx = 0$ або $yx = a$. Нехай $yx = a$, тоді $xy = yx$. Отже, згідно з лемою 17 $xy = 0$. Суперечність.

Тепер припустимо, що $yx = 0$. Легко перевірити, що $\{0, x, y, xy\}$ — чотириелементна піднапівгрупа, яка не є напівгрупою з нульовим множенням. Оскільки будь-яка чотириелементна піднапівгрупа напівгрупи K_2 є напівгрупою з нульовим множенням, то одержуємо суперечність з твердженням 3. Отже, $yx = b$.

Припускаючи $yx = b$, аналогічними міркуваннями одержуємо рівність $xy = a$.

Лема 19. *Нехай скінченна нільнапівгрупа S містить піднапівгрупу, що ізоморфна K_2, і інверсний моноїд $L\,\mathrm{Aut}(S)$ є переставним. Якщо піднапівгрупа C напівгрупи S така, що $|C| = |S| - 1$ і $|C^2| = 3$, то $S^2 = C^2$.*

Доведення. Нехай $S = C \cup \{z\}$, $C = \{0, a, b, x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, $C^2 = \{0, a, b\}$.

1. Якщо $x_i z = z$, то $0 = x_i^2 z = x_i z = z$. Суперечність. Аналогічно приходимо до суперечності у випадках, коли $x_i z = x_i$, $zx_i = x_i$, $zx_i = z$.

2. Припустимо, що $x_i z = x_j$, де $x_i \neq x_j$. Згідно з твердженням 3 піднапівгрупа $\{0, a, b, x_i, x_j\}$ ізоморфна K_2. Звідси $x_i x_j = a$ і $x_j x_i = b$ (або $x_j x_i = a$ і $x_i x_j = b$). Позаяк $x_i z = x_j$, то $0 = x_i^2 z = x_i x_j = a$. Суперечність. Аналогічно отримуємо суперечність, якщо $zx_i = x_j$. Отже, для довільного x_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, $zx_i \in C^2$ і $x_i z \in C^2$.

3. Припустимо, що $az = x_i$. Якщо $x_i x_j = a$, то $azx_j = x_i x_j = a$. Звідси $0 = a(zx_j)^2 = azx_j = a$. Суперечність. Припустимо тепер, що $x_i x_j = b$. Тоді $azx_j = x_i x_j = b$. Оскільки $zx_j \in C^2$, то $b = 0$. Суперечність. Аналогічно приходимо до суперечності у випадку, коли $za \in \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, або $bz \in \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, або $zb \in \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$.
Робимо остаточний висновок: $S^2 = C^2 = \{0, a, b\}$.

Лема 20. *Нехай скінченна нільнапівгрупа S містить піднапівгрупу, яка ізоморфна K_2, і інверсний моноїд $L\,\mathrm{Aut}(S)$ є переставним. Тоді $|S^2| = 3$.*

Доведення. Нехай $S = S_n$, до того ж $|S_n| = 5 + n$ (де $n \geq 0$). З напівгрупи S_n вилучаємо елемент a_n (де $a_n \in S_n - S_n^2$). Одержуємо піднапівгрупу S_{n-1}. З піднапівгрупи S_{n-1} вилучаємо елемент a_{n-1} (де $a_{n-1} \in S_{n-1} - S_{n-1}^2$). Одержуємо піднапівгрупу S_{n-2}. І так далі. Таким чином отримуємо ланцюг піднаівгруп: $S_0 \subset S_1 \subset S_2 \subset \ldots \subset S_{n-1} \subset S_n = S$, де $S_0 \cong K_2$, $|S_i| = |S_{i-1}| + 1, i = 1, 2, \ldots, n$. Далі застосовуємо лему 19. Одержуємо $S^2 = S_0^2$. Отже, $|S^2| = 3$.

Лема 21. *Нехай скінченна нільнапівгрупа S містить піднапівгрупу, яка ізоморфна K_2, і інверсний моноїд $L\,\mathrm{Aut}(S)$ є переставним. Тоді $S^3 = \{0\}$.*

Доведення. Згідно з лемою 20 $S^2 = \{0, a, b\}$. Легко показати, що для будь-якого $x \in S$ рівності $ax = a$, $xa = a$, $xb = b$, $bx = b$ неможливі. Припустимо, що $ax = b$. Оскільки $a \in S^2$, то існують такі u, $v \in S$, що $a = uv$. Отже, $(uv)x = u(vx) = b$. Припустимо, що $vx = b$, то $ub = b$. Звідси $0 = u^2 b = ub = b$. Суперечність. Якщо $vx = a$, то $b = ax = vx^2 = 0$. Суперечність. Тобто $ax \neq b$. Аналогічно доводимо, що $xa \neq b$, $xb \neq a$, $bx \neq a$. Таким чином, $\{0, a, b\} \cdot S = S \cdot \{0, a, b\} = \{0\}$.

Нехай шестиелементна нільнапівгрупа $S = \{0, a, b, x, y, z\}$ така, що:

1) $\{0, a, b, x, y\} \cong K_2$ (де $K_2^2 = \{0, a, b\}$);

2) інверсний моноїд $L\,\mathrm{Aut}(S)$ є переставним.

Згідно з лемою 21 $az = za = zb = bz = 0$. Далі, припустимо, що $xz = 0$. Тоді (згідно з лемою 18) $zx = 0$. Отже, $\{0, a, b, x, z\}$ є напівгрупою з нульовим множенням. Тобто $\{0, a, b, x, z\} \ncong K_2$, що суперечить твердженню 3. Таким чином, $xz \in \{a, b\}$. Аналогічно, $yz \in \{a, b\}$. Подібним чином ми також доводимо, що $zx \in \{a, b\}$ і $zy \in \{a, b\}$. Звідси робимо висновок: існують чотири шестиелементні нільнапівгрупи, що задовольняють умови 1 і 2, а саме:

$\star_1$	**0**	**a**	**b**	**x**	**y**	**z**
0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0	0
b	0	0	0	0	0	0
x	0	0	0	0	a	a
y	0	0	0	b	0	a
z	0	0	0	b	b	0

$\star_2$	**0**	**a**	**b**	**x**	**y**	**z**
0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0	0
b	0	0	0	0	0	0
x	0	0	0	0	a	b
y	0	0	0	b	0	a
z	0	0	0	a	b	0

$\star_3$	**0**	**a**	**b**	**x**	**y**	**z**
0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0	0
b	0	0	0	0	0	0
x	0	0	0	0	a	b
y	0	0	0	b	0	b
z	0	0	0	a	a	0

$\star_4$	**0**	**a**	**b**	**x**	**y**	**z**
0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0	0
x	0	0	0	0	a	a
y	0	0	0	b	0	b
z	0	0	0	b	a	0

Лема 22. 1. *Напівгрупи* $(S, \star_1)$, $(S, \star_3)$, $(S, \star_4)$ *попарно ізоморфні.*

2. $(S, \star_1) \ncong (S, \star_2)$.

Доведення. Позначимо через $\xi_{i,j}$ відображення з напівгрупи $(S, \star_i)$ у напівгрупу $(S, \star_j)$. Перевірка показує, що функції $\xi_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & a & b & x & y & z \\ 0 & a & b & z & x & y \end{pmatrix}$, $\xi_{1,4} = \begin{pmatrix} 0 & a & b & x & y & z \\ 0 & a & b & x & z & y \end{pmatrix}$ є ізоморфізмами.

Також легко перевірити, що $(S, \star_1) \ncong (S, \star_2)$.

Нільнапівгрупу $(S, \star_2)$ позначимо через B_2.

Твердження 6. *Якщо нільнапівгрупа* S *містить власну піднапівгрупу, яка ізоморфна* B_2, *то інверсний моноїд* $L\,\mathrm{Aut}(S)$ *не є переставним.*

Доведення. Припустимо протилежне, тобто інверсний моноїд $L\,\mathrm{Aut}(S)$ є переставним. Нехай $\{0, a, b, x, y, z\}$ — всі елементи напівгрупи B_2, до того ж $B_2^2 = \{0, a, b\}$ і $B \subset S$. Виберемо довільний елемент $u \in S$ такий, що $u \notin B_2$. Згідно з лемою 20 $S^2 = \{0, a, b\}$. Звідси випливає, що множини $A = \{0, a, b, x, y, u\}$ і $C = \{0, a, b, x, z, u\}$ є піднапівгрупами напівгрупи S. Якщо відображення таке, що $(\{0, a, b\})\varphi \neq \{0, a, b\}$, то $\varphi \notin L\,\mathrm{Aut}(S)$. Розглянемо часткові перестановки:

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 & a & b & x & y & z \\ 0 & a & b & x & y & u \end{pmatrix}, \qquad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 & a & b & x & y & z \\ 0 & a & b & x & u & y \end{pmatrix}, \qquad \xi_3 = \begin{pmatrix} 0 & a & b & x & y & z \\ 0 & a & b & y & x & u \end{pmatrix},$$

$$\xi_4 = \begin{pmatrix} 0 & a & b & x & y & z \\ 0 & a & b & y & u & x \end{pmatrix}, \qquad \xi_5 = \begin{pmatrix} 0 & a & b & x & y & z \\ 0 & a & b & u & x & y \end{pmatrix}, \qquad \xi_6 = \begin{pmatrix} 0 & a & b & x & y & z \\ 0 & a & b & u & y & x \end{pmatrix}.$$

Легко перевірити, що відображення ξ_2, ξ_3, ξ_6 не є ізоморфізмами. Припустимо, що ξ_1 — ізоморфізм. Тоді $xu = b$ і $yu = a$. Переглянувши всі 12 відображень $\eta\colon B_2 \to C$ таких, що $(0)\eta = 0$ і $(\{a, b\})\eta = \{a, b\}$, переконуємося, що кожне з них не є ізоморфізмом. Тобто $B_2 \ncong C$, що суперечить твердженню 3. Отже, відображення ξ_1 не є ізоморфізмом. Таким же чином ми переконуємося, що $\xi_4 \notin L\,\mathrm{Aut}(S)$ і $\xi_5 \notin L\,\mathrm{Aut}(S)$. Отже, відображення $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6$ не є ізоморфізмами. Далі, розглянемо такі відображення:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & a & b & x & y & z \\ 0 & b & a & u & y & x \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & a & b & x & y & z \\ 0 & b & a & y & u & x \end{pmatrix}, \qquad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 0 & a & b & x & y & z \\ 0 & b & a & u & x & y \end{pmatrix},$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & a & b & x & y & z \\ 0 & b & a & x & u & y \end{pmatrix}, \qquad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & a & b & x & y & z \\ 0 & b & a & y & x & u \end{pmatrix}, \qquad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & a & b & x & y & z \\ 0 & b & a & x & y & u \end{pmatrix}.$$

Безпосередня перевірка показує, що відображення λ_2, λ_3, λ_6 не є ізоморфізмами. Припустимо, що λ_i, $i = 1, 4, 5$, є ізоморфізмом, тоді (як легко перевірити) ξ_i, $i = 1, 4, 5$, — ізоморфізм. Суперечність. Таким чином, $B_2 \ncong A$, що суперечить твердженню 3.

Твердження 6 доведено.

Перелічимо всі піднапівгрупи нільнапівгрупи B_2: $\{0\}$, $\{0, a\}$, $\{0, b\}$, $\{0, x\}$, $\{0, y\}$, $\{0, z\}$, $\{0, a, b\}$, $\{0, a, x\}$, $\{0, a, y\}$, $\{0, a, z\}$, $\{0, b, x\}$, $\{0, b, y\}$, $\{0, b, z\}$, $\{0, a, b, x\}$, $\{0, a, b, y\}$, $\{0, a, b, z\}$, $\{0, a, b, x, y\}$, $\{0, a, b, x, z\}$, $\{0, a, b, y, z\}$, $\{0, a, b, x, y, z\}$. Зазначимо, що всі піднапівгрупи, порядок яких не перевищує 4, є напівгрупами з нульовим множенням. Легко перелічити всі ізоморфізми між такими піднапівгрупами. Список локальних ізоморфізмів, ранг яких дорівнює 4, є таким:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b & x & y \\ 0 & a & b & x & y \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & a & b & x & y \\ 0 & b & a & y & x \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & a & b & x & y \\ 0 & a & b & y & z \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & a & b & x & y \\ 0 & b & a & z & y \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b & x & y \\ 0 & a & b & z & x \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b & x & y \\ 0 & b & a & x & z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & a & b & x & z \\ 0 & a & b & x & z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & a & b & x & z \\ 0 & b & a & z & x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & a & b & x & z \\ 0 & a & b & y & x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & a & b & x & z \\ 0 & b & a & x & y \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b & x & z \\ 0 & a & b & z & y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & a & b & x & z \\ 0 & b & a & y & z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & a & b & y & z \\ 0 & a & b & y & z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & a & b & y & z \\ 0 & b & a & z & y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & a & b & y & z \\ 0 & a & b & x & y \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b & y & z \\ 0 & b & a & y & x \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & a & b & y & z \\ 0 & a & b & z & x \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & a & b & y & z \\ 0 & b & a & x & z \end{pmatrix}.$$

Перелічимо всі автоморфізми напівгрупи B_2:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b & x & y & z \\ 0 & a & b & x & y & z \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & a & b & x & y & z \\ 0 & a & b & y & z & x \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & a & b & x & y & z \\ 0 & a & b & z & x & y \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & a & b & x & y & z \\ 0 & b & a & y & x & z \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b & x & y & z \\ 0 & b & a & z & y & x \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & a & b & x & y & z \\ 0 & b & a & x & z & y \end{pmatrix}.$$

Група $\mathrm{Aut}(B_2)$ некомутативна і містить шість елементів. Отже, вона ізоморфна симетричній групі S_3. Інверсний моноїд $L\,\mathrm{Aut}(B_2)$ містить 202 елементи.

Вище ми вже показали, що існують лише дві (з точністю до ізоморфізму) шестиелементні нільнапівгрупи, які містять напівгрупу K_2 і у яких інверсний моноїд локальних автоморфізмів є переставним. У сенсі твердження 6 нільнапівгрупа B_2 є максимальною. Тепер розглянемо нільнапівгрупу $(S, \star_1)$, яку далі позначатимемо через D_1.

Конструкція 2

Зафіксуємо триелементну множину $\{0, a, b\}$. Нехай скінченна множина X така, що $\{0, a, b\} \cap \cap X = \varnothing$ і $|X| \geq 3$. На X задаємо строгий лінійний порядок $<$. Визначимо бінарну операцію на множині $\{0, a, b\} \cup X$:

$0y = y0 = 0$ для будь-якого $y \in \{0, a, b\} \cup X$;
$ay = ya = 0$ для будь-якого $y \in \{0, a, b\} \cup X$;
$by = yb = 0$ для будь-якого $y \in \{0, a, b\} \cup X$;
якщо $x_k, x_m \in X$ і $x_k < x_m$, то $x_k x_m = a$ і $x_m x_k = b$;
$z^2 = 0$ для довільного $z \in \{0, a, b\} \cup X$.

Відносно визначеної операції множина $\{0, a, b\} \cup X$ стає нільнапівгрупою, яка включає в себе напівгрупу, що ізоморфна нільнапівгрупі D_1.

Для того щоб переконатися, що інверсний моноїд локальних автоморфізмів напівгрупи $\{0, a, b\} \cup X$ є переставним, потрібно перевірити виконання умов (i) та (ii) (див. твердження 3). Виконання умови (i) забезпечується за означенням. Щоб перевірити виконання умови (ii), зазначимо, що всі піднапівгрупи напівгрупи $\{0, a, b\} \cup X$, що містять не більше чотирьох елементів, є напівгрупами з нульовим множенням. Очевидно, що такі напівгрупи з однаковою кількістю елементів є ізоморфними. Далі, якщо рівнопотужні піднапівгрупи $\{0, a, b, x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{im}\}$ і $\{0, a, b, x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{km}\}$ містять щонайменше п'ять елементів, до того ж $x_{i1} < x_{i2} < \ldots < < x_{im}$ і $x_{k1} < x_{k2} < \ldots < x_{km}$, то легко перевірити, що відображення

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b & x_{i1} & x_{i2} & \ldots & x_{im} \\ 0 & a & b & x_{k1} & x_{k2} & \ldots & x_{km} \end{pmatrix}$$

є ізоморфізмом. Отже, згідно з твердженням 3 інверсний моноїд $L\,\mathrm{Aut}(\{0, a, b\} \cup X)$ є переставним.

Лема 23. *Нехай скінченна нільнапівгрупа S містить піднапівгрупу, що ізоморфна $(S, \star_1)$, і інверсний моноїд $L\,\mathrm{Aut}(S)$ є переставним. Тоді напівгрупа S має структуру, опис якої дано в конструкції* 2.

Доведення. Вище ми вже домовилися нільнапівгрупу $(S, \star_1)$ позначати через D_1. Нехай $\{0, a, b, x, y, z\}$ — елементи напівгрупи D_1. Згідно з лемою 20 $S^2 = \{0, a, b\}$. На множині $S - S^2$ визначимо бінарне відношення таким чином: $(u, v) \in \eta \Leftrightarrow uv = a$. Покажемо транзитивність відношення η. Отже, нехай $uv = a$ і $vw = a$. Доведемо, що $uw = a$. Припустимо протилежне, тобто $uw \neq a$. Тоді $uw = 0$ або $uw = b$. Якщо $uw = 0$, то $\{0, a, b, u, w\} \ncong K_2$, що суперечить твердженню 3. Припустимо, що $uw = b$. Розглянемо всі відображення $f : D_1 \to \{0, a, b, u, v, w\}$ такі, що $(0)f = 0, (a)f = a, (b)f = b$. Таких відображень буде 6. Легко переконатися, що кожне таке відображення не є ізоморфізмом. Також легко перевірити, що кожне відображення $\xi :$ $D_1 \to \{0, a, b, u, v, w\}$, де $(0)\xi = 0, (a)\xi = b, (b)\xi = a$, не є ізоморфізмом. Отже, ми одержуємо суперечність з твердженням 3. Таким чином, бінарне відношення η є транзитивним. На підставі леми 18 зазначимо ще одну властивість відношення η: якщо $(l, r) \in \eta$, то $(r, l) \notin \eta$. Отже, бінарне відношення $\eta \cup \triangle$, де $\triangle$ — відношення рівності на $S - S^2$, є лінійним порядком. Таким чином, нільнапівгрупа S має саме таку структуру, опис якої дано в конструкції 2.

Лему 23 доведено.

Підсумуємо результати пункту у вигляді теореми.

Теорема 4. *Нехай скінченна нільнапівгрупа S містить піднапівгрупу, яка ізоморфна K_2. Інверсний моноїд $L\,\mathrm{Aut}(S)$ є переставним в таких і лише таких випадках*:

1) *нільнапівгрупа S ізоморфна K_2*;
2) *нільнапівгрупа S ізоморфна B_2*;
3) *нільнапівгрупа S має структуру, опис якої дано у кострукції* 2.

Враховуючи результат основної теореми статті [4], отримуємо повну класифікацію скінченних нільнапівгруп, для яких інверсний моноїд локальних автоморфізмів є переставним.

Теорема 5. *Нехай S — скінченна нільнапівгрупа. Інверсний моноїд $L\,\mathrm{Aut}(S)$ є переставним в таких і лише в таких випадках*:

1) *нільнапівгрупа S є напівгрупою з нульовим множенням*;
2) *нільнапівгрупа S належить класу $\mathcal{N}$ (див. п.* 1);
3) *нільнапівгрупа S ізоморфна K_1*;
4) *нільнапівгрупа S ізоморфна B_1*;
5) *нільнапівгрупа S має структуру, опис якої дано у кострукції* 1;
6) *нільнапівгрупа S ізоморфна K_2*;
7) *нільнапівгрупа S ізоморфна B_2*;
8) *нільнапівгрупа S має структуру, опис якої дано у кострукції* 2.

Література

1. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп: в 2 т. – М.: Мир, 1972. – Т.1. – 286 с. – Т.2. – 422 с.
2. *Либих А. Л.* Инверсные полугруппы локальных автоморфизмов абелевых групп // Исследования по алгебре. – 1973. – Вып. 3. – С. 25 – 33.
3. *Goberstein S. M.* Inverse semigroups with certain types of partial automorphism monoids // Glasgow Math. J. – 1990. – **32**. – P. 189 – 195.
4. *Дереч В. Д.* Класифікація скінченних комутативних напівгруп, для яких інверсний моноїд локальних автоморфізмів є переставним // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 2. – С. 176 – 184.
5. *Дереч В. Д.* Класифікація скінченних комутативних напівгруп, для яких інверсний моноїд локальних автоморфізмів є Δ-напівгрупою // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 7. – С. 895 – 901.
6. *Дереч В. Д.* Характеристика напіврешітки ідемпотентів переставної інверсної напівгрупи скінченного рангу з нулем // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 10. – С. 1353 – 1362.
7. *Дереч В. Д.* Конгруенції переставної інверсної напівгрупи скінченного рангу // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 4. – С. 469 – 473.
8. *Дереч В. Д.* Структура скінченної комутативної інверсної напівгрупи і скінченної в'язки, для яких інверсний моноїд локальних автоморфізмів є переставним // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 9. – С. 1218 – 1226.

Одержано 19.08.15