УДК 517.5

В. В. Миронюк (Ін-т математики НАН України, Київ)

КОЛМОГОРОВСЬКІ ПОПЕРЕЧНИКИ АНІЗОТРОПНИХ КЛАСІВ БЄСОВА ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

We establish exact-order estimates for the Kolmogorov widths of the anisotropic Besov classes of periodic functions of many variables in the spaces $L_q,\ 1 \le q \le \infty$.

Установлены точные по порядку оценки колмогоровских поперечников анизотропных классов Бесова периодических функций многих переменных в пространствах $L_q,\ 1 \le q \le \infty$.

Дану роботу присвячено дослідженню наближення анізотропних класів Бєсова $\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторах L_q для деяких співвідношень між параметрами p та q. Роль апроксимативної характеристики відіграє колмогоровський поперечник.

Робота складається із трьох пунктів. У першому та другому пунктах означено основні задіяні об'єкти (функціональні простори, відповідні їм функціональні класи та апроксимативні характеристики), а також наведено необхідні допоміжні твердження. Основний результат роботи сформульовано та доведено у третьому пункті.

1. Функціональні простори та класи. Нехай $\mathbb{R}^d$, $d \ge 1$, позначає d-вимірний евклідів простір точок $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ з дійсними координатами, і $L_p = L_p(\pi_d)$ — простір 2π-періодичних по кожній змінній і сумовних у степені p, $1 \le p < \infty$, на кубі $\pi_d = \prod_{j=1}^{d} [0, 2\pi)$ (відповідно суттєво обмежених при $p = \infty$) функцій $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_d)$. Норма у цьому просторі визначається таким чином:

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{(2\pi)^d} \displaystyle\int_{\pi_d} |f(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x} \right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{\boldsymbol{x} \in \pi_d} |f(\boldsymbol{x})|, & p = \infty. \end{cases}$$

Для функції $f \in L_p$ в точці $\boldsymbol{x}$ означимо кратну різницю $\Delta^l_{h,j} f(\boldsymbol{x})$ порядку $l \in \mathbb{N}$ за змінною x_j з кроком $h \in \mathbb{R}$ згідно з формулою

$$\Delta^l_{h,j} f(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=0}^{l} (-1)^{k+l} C^k_l f(\boldsymbol{x} + kh\boldsymbol{e_j}),$$

де C^k_l — біноміальні коефіцієнти, $\{\boldsymbol{e_j}\}_{j=1}^d$ — стандартний векторний базис у просторі $\mathbb{R}^d$.

Базуючись на понятті кратної різниці $\Delta^l_{h,j} f$, означимо відповідний модуль неперервності l-го порядку функції $f \in L_p$ за змінною x_j згідно з формулою

$$\omega_l(f, \boldsymbol{e_j}, t)_p = \sup_{|h| \le t} \left\| \Delta^l_{h,j} f \right\|_p .$$

Означення 1. *Нехай* $\boldsymbol{l} = (l_1, \ldots, l_d) \in \mathbb{N}^d$, $\boldsymbol{R} = (r_1, \ldots, r_d) \in \mathbb{R}^d$ *і* $0 < r_j < l_j$, $j = \overline{1, d}$. *Тоді нормований простір* $B^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}$, $1 \le p,\ \theta \le \infty$, *визначається таким чином:*

$$B^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta} = \left\{ f \in L_p \colon \|f\|_{B^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}} = \|f\|_p + \sum_{j=1}^{d} |f|_{B^{r_j}_{p,\theta,j}} < \infty \right\},$$

де

$$|f|_{B^{r_j}_{p,\theta,j}} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\omega_{l_j}(f, \boldsymbol{e_j}, t)_p}{t^{r_j}} \right)^{\theta} \frac{dt}{t} \right)^{1/\theta}, & 1 \le \theta < \infty, \\ \sup\limits_{t>0} \dfrac{\omega_{l_j}(f, \boldsymbol{e_j}, t)_p}{t^{r_j}}, & \theta = \infty. \end{cases}$$

Простори $B^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}$ (а також їхні аналоги в неперіодичному випадку), з дещо іншою заданою у них нормою, вперше було розглянуто О. В. Бєсовим [1]. У випадку $\theta = \infty$ вони збігаються з просторами $H^{\boldsymbol{R}}_p$, які увів С. М. Нікольський [2]. Такі функціональні простори прийнято називати анізотропними, оскільки гладкісні властивості функцій із цих просторів, взагалі кажучи, неоднакові по кожній змінній. Якщо ж $\boldsymbol{R} = (r, \ldots, r) \in \mathbb{R}^d$ і $0 < r < l$, $l \in \mathbb{N}$, то $B^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}$ називають ізотропними просторами Нікольського – Бєсова (далі будемо позначати їх $B^r_{p,\theta}$).

Для вектора $\boldsymbol{R}$ із означених вище просторів $B^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}$ покладемо

$$g(\boldsymbol{R}) = \left(\sum_{j=1}^{d} \frac{1}{r_j} \right)^{-1},$$

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{g(\boldsymbol{R})}{\boldsymbol{R}} = \left(\frac{g(\boldsymbol{R})}{r_1}, \ldots, \frac{g(\boldsymbol{R})}{r_d} \right) = (\rho_1, \ldots, \rho_d),$$

$$2^{\boldsymbol{\rho} n} = (2^{\rho_1 n}, \ldots, 2^{\rho_d n}), \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

$$[2^{\boldsymbol{\rho} n}] = \left([2^{\rho_1 n}], \ldots, [2^{\rho_d n}] \right),$$

де запис $[a]$ позначає цілу частину числа $a \in \mathbb{R}$.

Під поняттям „класи $\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}$" будемо розуміти одиничні кулі у просторах $B^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}$, тобто

$$\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta} = \Big\{ f \in L_p \colon \|f\|_{B^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}} \le 1 \Big\}.$$

Відповідно одиничні кулі у просторах $H^{\boldsymbol{R}}_p$ та $B^r_{p,\theta}$ позначатимемо $\mathbb{H}^{\boldsymbol{R}}_p$ та $\mathbb{B}^r_{p,\theta}$.

Далі запис $A \asymp B$ означає, що існують додатні сталі C_1 та C_2, які не залежать від одного істотного по контексту параметра у величинах A та B (наприклад, у наведеному нижче співвідношенні (1) — від функції f) і такі, що $C_1 A \le B \le C_2 A$. Якщо $B \le C_2 A$ $(B \ge C_1 A)$, то пишемо $B \ll A$ $(B \gg A)$.

У наведених нижче міркуваннях нам буде зручно використовувати еквівалентне означення норми функцій із просторів $B^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}$.

Отже, нехай V_n, $n \in \mathbb{N}$, позначає одновимірне ядро Валле Пуссена:

$$V_n(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{n} \cos kt + 2 \sum_{k=n+1}^{2n-1} \frac{2m-k}{m} \cos kt, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Тоді в точці $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ означимо багатовимірне ядро Валле Пуссена $V_{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{N} \in \mathbb{N}^d$, згідно з формулою

$$V_{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{d} V_{N_j}(x_j).$$

Далі через $\mathbb{V}_{\boldsymbol{N}}(f)$ позначатимемо згортку функції $f \in L_p,\ 1 \le p \le \infty$, з багатовимірним ядром $V_{\boldsymbol{N}}$, тобто

$$\mathbb{V}_{\boldsymbol{N}}(f, \boldsymbol{x}) = (f * V_{\boldsymbol{N}})(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\pi_d} f(\boldsymbol{t}) V_{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{t}) d\boldsymbol{t},$$

і для функції $f \in L_p,\ 1 \le p \le \infty$, покладемо

$$\sigma_0(f, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{x}) = \mathbb{V}_1(f, \boldsymbol{x}), \quad \sigma_s(f, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{x}) = \mathbb{V}_{[2^{\boldsymbol{\rho} s}]}(f, \boldsymbol{x}) - \mathbb{V}_{[2^{\boldsymbol{\rho}(s-1)}]}(f, \boldsymbol{x}), \quad s \in \mathbb{N}.$$

В прийнятих позначеннях простори $B^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}$ можна означити еквівалентним чином. А саме, має місце таке твердження.

Теорема A [3]. *Функція f належить простору $B^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta},\ 1 \le p \le \infty,\ 1 \le \theta < \infty$, тоді і тільки тоді, коли*

$$\left(\sum_{s=0}^{\infty} 2^{sg(\boldsymbol{R})\theta} \| \sigma_s(f, \boldsymbol{R}) \|_p^\theta \right)^{1/\theta} < \infty,$$

до того ж

$$\|f\|_{B^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}} \asymp \left(\sum_{s=0}^{\infty} 2^{sg(\boldsymbol{R})\theta} \| \sigma_s(f, \boldsymbol{R}) \|_p^\theta \right)^{1/\theta}. \tag{1}$$

Відповідно функція f належить простору $B^{\boldsymbol{R}}_{p,\infty},\ 1 \le p \le \infty$, тоді і тільки тоді, коли

$$\sup_{s \in \mathbb{Z}_+} 2^{sg(\boldsymbol{R})} \| \sigma_s(f, \boldsymbol{R}) \|_p < \infty,$$

до того ж

$$\|f\|_{B^{\boldsymbol{R}}_{p,\infty}} \asymp \sup_{s \in \mathbb{Z}_+} 2^{sg(\boldsymbol{R})} \| \sigma_s(f, \boldsymbol{R}) \|_p.$$

Зазначимо, що з урахуванням нерівностей

$$\sup_{s \in \mathbb{Z}_+} |\nu_s| \le \left(\sum_{s=0}^{\infty} |\nu_s|^{\theta'} \right)^{1/\theta'} \le \left(\sum_{s=0}^{\infty} |\nu_s|^{\theta} \right)^{1/\theta}, \quad 1 \le \theta < \theta' < \infty,$$

які виконується для будь-якої послідовності чисел $\{\nu_s\}_{s=0}^{\infty}$ (див., наприклад, [4, с. 149]), із теореми A випливають вкладення

$$B^{\boldsymbol{R}}_{p,1} \subset B^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta} \subset B^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta'} \subset B^{\boldsymbol{R}}_{p,\infty} \equiv H^{\boldsymbol{R}}_p, \quad 1 < \theta < \theta' < \infty. \tag{2}$$

2. Апроксимативні характеристики та допоміжні твердження. У цьому пункті наведемо означення апроксимативних характеристик, що досліджуються у роботі, а також сформулюємо кілька допоміжних тверджень, які знадобляться нам при доведенні отриманого результату.

Нехай $\mathcal{X}$ — нормований простір, $\mathcal{L}_m(\mathcal{X})$ — сукупність усіх лінійних підпросторів $\mathcal{X}$ розмірності не більшої за m і Φ — центрально-симетрична підмножина в $\mathcal{X}$.

Означення 2. *Колмогоровським поперечником множини Φ у просторі $\mathcal{X}$ називається величина*

$$d_m(\Phi, \mathcal{X}) = \inf_{L_m \in L_m(\mathcal{X})} \sup_{f \in \Phi} \inf_{u \in L_m} \|f - u\|_{\mathcal{X}}.$$

Поперечник $d_m(\Phi, \mathcal{X})$ було введено у 1936 р. А. М. Колмогоровим [5]. Значення цієї величини є теоретично найкращою точністю, з якою можна наблизити множину Φ лінійними підпросторами L_m розмірності m у метриці простору $\mathcal{X}$. Якщо існує підпростір L_m^*, на якому досягається точна нижня межа (або принаймні її порядок відносно параметра m), то його називають екстремальним підпростором.

Для вектора $\boldsymbol{N} = (N_1, \ldots, N_d) \in \mathbb{N}^d$ розглянемо множини

$$\mathcal{K}(\boldsymbol{N}, d) = \left\{\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d \colon |k_j| \leqslant N_j, j = \overline{1, d}\right\}$$

і

$$T(\boldsymbol{N}, d) = \left\{g \colon g(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}(\boldsymbol{N}, d)} c_{\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x})}, c_{\boldsymbol{k}} \in \mathbb{C}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d\right\},$$

де $(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x}) = k_1 x_1 + \ldots + k_d x_d$.

Якщо $\mathbb{F} \subset L_q$, $1 \leq q \leq \infty$, — деякий функціональний клас, то покладемо

$$E_{\boldsymbol{N}}(\mathbb{F})_q = \sup_{f \in \mathbb{F}} \inf_{g \in \mathrm{T}(\boldsymbol{N}, d)} \|f - g\|_q.$$

Теорема Б (див., наприклад, [4, с. 33]). *Для функцій $\varphi \in L_1$ і $f \in L_p$, $1 \leq p \leq \infty$, має місце нерівність*

$$\|f * \varphi\|_p \leq \|\varphi\|_1 \|f\|_p, \tag{3}$$

де

$$(f * \varphi)(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\pi_d} f(\boldsymbol{t}) \varphi(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{x}) d\boldsymbol{t}$$

— згортка функцій f і φ.

Теорема В [4, с. 159]. *Якщо $1 \leq p \leq q \leq \infty$, то для довільного тригонометричного полінома $g \in T(\boldsymbol{N}, d)$, має місце нерівність*

$$\|g\|_q \leq 3^d \left(\prod_{j=1}^{d} N_j\right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|g\|_p. \tag{4}$$

Нерівність (4) називають нерівністю різних метрик Нікольського.

Теорема Г [3]. *Нехай $1 \leq p,\ q \leq \infty$ і $g(\boldsymbol{R}) > \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+$. Тоді при $1 \leq \theta < \infty$ має місце порядкова оцінка*

$$E_{[2^{\rho n}]}(\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta})_q \asymp 2^{-n\left(g(\boldsymbol{R}) - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+\right)},$$

де $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Теорема Д [3]. *Нехай $1 \leq q \leq p \leq \infty$ і $g(\boldsymbol{R}) > 0$. Тоді при $1 \leq \theta < \infty$ має місце порядкова оцінка*

$$d_m(\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}, L_q) \asymp m^{-g(\boldsymbol{R})}.$$

3. Колмогоровські поперечники класів $\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}$ у просторах L_q.

Теорема 1. *Якщо* $1 < p < q \le \infty$ *і* $1 \le \theta < \infty$, *то має місце порядкова оцінка*

$$d_m(\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}, L_q) \asymp \begin{cases} m^{-g(\boldsymbol{R})+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} & \textit{при} \quad 1 < p < q \le 2, \quad g(\boldsymbol{R}) > \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}, \\ m^{-g(\boldsymbol{R})+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} & \textit{при} \quad 1 < p < 2 < q \le \infty, \quad g(\boldsymbol{R}) > \dfrac{1}{p}, \\ m^{-g(\boldsymbol{R})} & \textit{при} \quad 2 \le p < q \le \infty, \quad g(\boldsymbol{R}) > \dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{5}$$

Доведення. Внаслідок вкладення (2) оцінки зверху випливають із відомих оцінок колмогоровських поперечників для класів Нікольського $\mathbb{H}^{\boldsymbol{R}}_p$ (див. [6], розділ 2).

Оцінки знизу внаслідок вкладення (2), достатньо встановити у випадку $\theta = 1$, тобто для класів $\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,1}$. В залежності від того, яких значень набувають параметри p та q, розглянемо кілька випадків.

Випадок 1: $1 < p < q = 2$. За заданим числом $m \in \mathbb{N}$ підберемо натуральне число $n = n(m)$ так, щоб виконувались співвідношення $2m \le \dim T([2^{\boldsymbol{\rho} n}], d)$ і $m \asymp 2^n$. Тоді, з одного боку, згідно з означенням колмогоровського поперечника

$$d_m(\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,1}, L_2) \ge d_m(\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,1} \cap T([2^{\boldsymbol{\rho} n}], d), L_2). \tag{6}$$

З іншого боку, якщо P_n — оператор ортогонального проектування на $T([2^{\boldsymbol{\rho} n}], d)$, то для $f \in$ $\in T([2^{\boldsymbol{\rho} n}], d)$ і $u \in L_2$, з урахуванням того, що простір L_2 є гільбертовим, маємо

$$\|f - P_n u\|_2 = \|P_n(f-u)\|_2 \le \|f-u\|_2. \tag{7}$$

Таким чином, беручи до уваги (6) та (7), отримуємо

$$d_m(\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,1}, L_2) \ge d_m(\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,1} \cap T([2^{\boldsymbol{\rho} n}], d), L_2 \cap T([2^{\boldsymbol{\rho} n}], d)). \tag{8}$$

Для подальшої оцінки знизу правої частини (8) побудуємо екстремальну сім'ю функцій із $\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,1} \cap T([2^{\boldsymbol{\rho} n}], d)$, тобто множину $W \subset \mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,1} \cap T([2^{\boldsymbol{\rho} n}], d)$ таку, що

$$d_m(W, L_2 \cap T([2^{\boldsymbol{\rho} n}], d)) \gg m^{-g(\boldsymbol{R})+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}.$$

З цією метою покладемо

$$f(\boldsymbol{x}) = C_3 2^{-n\left(g(\boldsymbol{R})+1-\frac{1}{p}\right)} D_{[2^{\boldsymbol{\rho} n}]}(\boldsymbol{x}), \quad C_3 > 0,$$

де

$$D_{[2^{\boldsymbol{\rho} n}]}(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{d} D_{[2^{\rho_j n}]}(x_j) = \prod_{j=1}^{d} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{[2^{\rho_j n}]} \cos k x_j \right)$$

— багатовимірне ядро Діріхле.

Покажемо, що при деякому виборі сталої $C_3 > 0$ функція f належить класу $\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,1}$.

Оскільки

$$\sigma_s(f, \boldsymbol{R}) = f * \left(V_{[2^{\boldsymbol{\rho} s}]} - V_{[2^{\boldsymbol{\rho}(s-1)}]} \right),$$

то внаслідок ортогональності тригонометричної системи функцій $\sigma_s(f, \boldsymbol{R}) = 0$ для довільної функції f, „номери" гармонік якої не належать множині $\mathcal{K}(2[2^{\boldsymbol{\rho} s}], d) \setminus \mathcal{K}([2^{\boldsymbol{\rho}(s-1)}], d)$. Звідси, зокрема, $\sigma_s(f,\boldsymbol{R}) = 0$ при $s \geqslant n+1$. Але тоді, використовуючи співвідношення (1) та (3), а також враховуючи, що (див., наприклад, [6], розділ 1)

$$\|D_{[2^{\boldsymbol{\rho} n}]}\|_p \asymp 2^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)}, \quad 1 < p < \infty,$$

маємо

$$\|f\|_{\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,1}} \asymp \sum_{s=0}^{\infty} 2^{sg(\boldsymbol{R})}\|\sigma_s(f,\boldsymbol{R})\|_p = \sum_{s=0}^{n} 2^{sg(\boldsymbol{R})}\|\sigma_s(f,\boldsymbol{R})\|_p \ll$$

$$\ll \sum_{s=0}^{n} 2^{(s-n)g(\boldsymbol{R})} 2^{n\left(\frac{1}{p}-1\right)}\|D_{[2^{\boldsymbol{\rho} n}]}\|_p \asymp \sum_{s=0}^{n} 2^{(s-n)g(\boldsymbol{R})} = C_4, \quad C_4 > 0.$$

Звідси випливає, що при деякому виборі сталої $C_3 > 0$ функція f належить класу $\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,1}$.

Нехай, далі, $M_n = \dim T([2^{\boldsymbol{\rho} n}], d)$ — кількість елементів множини $\mathcal{K}([2^{\boldsymbol{\rho} n}], d)$ і $\mathcal{U} = \{u_j\}_{j=1}^{M_n}$ — довільна ортонормована система функцій у просторі $L_2 \cap T([2^{\boldsymbol{\rho} n}], d)$. Тоді

$$e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})} = \sum_{j=1}^{M_n} a^j_{\boldsymbol{k}} u_j(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{k} \in \mathcal{K}([2^{\boldsymbol{\rho} n}], d),$$

і

$$u_j(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathcal{K}([2^{\boldsymbol{\rho} n}],d)} \overline{a^j_{\boldsymbol{k}}} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}, \quad j = \overline{1, M_n}, \tag{9}$$

де $a^j_{\boldsymbol{k}}$ — коефіцієнти Фур'є експоненти $e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}$ за системою $\{u_j\}_{j=1}^{M_n}$, а $\overline{a^j_{\boldsymbol{k}}}$ — комплексно-спряжене до $a^j_{\boldsymbol{k}}$ число. Оскільки система функцій $\{e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}\}_{\boldsymbol{k}\in\mathcal{K}([2^{\boldsymbol{\rho} n}],d)}$ є ортонормованою у просторі L_2, то згідно з рівністю Парсеваля із (9) отримуємо

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathcal{K}([2^{\boldsymbol{\rho} n}],d)} |a^j_{\boldsymbol{k}}|^2 = 1. \tag{10}$$

Розглянемо відхилення функції $D_{[2^{\boldsymbol{\rho} n}]}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$ від її частинної суми Фур'є порядку m за системою $\{u_j\}_{j=1}^{M_n}$. Маємо

$$R_m(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = D_{[2^{\boldsymbol{\rho} n}]}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - S^{\mathcal{U}}_m D_{[2^{\boldsymbol{\rho} n}]}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) =$$

$$= \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathcal{K}([2^{\boldsymbol{\rho} n}],d)} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{y})} \sum_{j=m+1}^{M_n} a^j_{\boldsymbol{k}} u_j(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=m+1}^{M_n} \left(\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathcal{K}([2^{\boldsymbol{\rho} n}],d)} a^j_{\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{y})} \right) u_j(\boldsymbol{x}).$$

Далі двічі використовуючи рівність Парсеваля та співвідношення (10), одержуємо

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\pi_d} \|R_m(\cdot,\boldsymbol{y})\|_2^2 d\boldsymbol{y} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\pi_d} \sum_{j=m+1}^{M_n} \left| \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathcal{K}([2^{\boldsymbol{\rho} n}],d)} a^j_{\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{y})} \right|^2 d\boldsymbol{y} =$$

$$= \sum_{j=m+1}^{M_n} \left\| \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathcal{K}([2^{\boldsymbol{\rho}n}],d)} a_{\boldsymbol{k}}^j e^{i(\boldsymbol{k},\cdot)} \right\|_2^2 = \sum_{j=m+1}^{M_n} \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathcal{K}([2^{\boldsymbol{\rho}n}],d)} |a_{\boldsymbol{k}}^j|^2 = M_n - m \geq m.$$

З останнього співвідношення, згідно з теоремою про середнє значення визначеного інтеграла, випливає, що існує принаймні одне $\boldsymbol{y}^* \in \pi_d$ таке, що

$$\|R_m(\cdot,\boldsymbol{y}^*)\|_2 \geq m^{\frac{1}{2}}. \tag{11}$$

Покладемо $W = \{f_{y^*} : f_{y^*}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}^*)\}$.

Таким чином, використовуючи оцінки (8) та (11), з урахуванням того, що простір L_2 є гільбертовим, отримуємо

$$d_m(\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,1}, L_2) \geq d_m(\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,1} \cap T([2^{\boldsymbol{\rho}n}],d), L_2 \cap T([2^{\boldsymbol{\rho}n}],d) \gg$$

$$\gg d_m(W, L_2 \cap T([2^{\boldsymbol{\rho}n}],d) \gg \inf_{\{u_j\}_{j=1}^{M_n}} \|f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}^*) - S_m^{\mathcal{U}} f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}^*)\|_2 =$$

$$= 2^{-n\left(g(\boldsymbol{R})+1-\frac{1}{p}\right)} \inf_{\{u_j\}_{j=1}^{M_n}} \|R_m(\cdot,\boldsymbol{y}^*)\|_2 \geq 2^{-n\left(g(\boldsymbol{R})+1-\frac{1}{p}\right)} m^{\frac{1}{2}} \asymp m^{-g(\boldsymbol{R})+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}.$$

Випадок 2: $1 < p < q < 2$. Нехай $\mathcal{U} = \{u_j\}_{j=1}^m$ — довільна система функцій в L_p і

$$E_m(f,\mathcal{U})_q = \inf_{c_j} \left\| f - \sum_{j=1}^m c_j u_j \right\|_q, \quad c_j \in \mathbb{C}.$$

Розглянемо систему функцій $\mathcal{V} = \{v_j\}_{j=1}^m$, де $v_j = \mathbb{V}_{[2^{\boldsymbol{\rho}n}]} u_j$, $j = \overline{1,m}$, а числа m та n пов'язані між собою, як у попередньому випадку. Тоді для довільної функції $f \in \mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,1} \cap$ $\cap\, T([2^{\boldsymbol{\rho}n}],d)$ з урахуванням (3) маємо

$$E_m(f,\mathcal{V})_q = \inf_{c_j} \left\| f - \sum_{j=1}^m c_j v_j \right\|_q = \inf_{c_j} \left\| \mathbb{V}_{[2^{\boldsymbol{\rho}n}]} f - \sum_{j=1}^m c_j \mathbb{V}_{[2^{\boldsymbol{\rho}n}]} u_j \right\|_q =$$

$$= \inf_{c_j} \left\| \left(f - \sum_{j=1}^m c_j u_j \right) * V_{[2^{\boldsymbol{\rho}n}]} \right\|_q \ll E_m(f,\mathcal{U})_q. \tag{12}$$

З іншого боку, для довільної функції $f \in \mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,1} \cap \mathrm{T}([2^{\boldsymbol{\rho}n}],d)$, використовуючи нерівність різних метрик Нікольського (4), одержуємо

$$E_m(f,\mathcal{V})_2 \ll 2^{n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} E_m(f,\mathcal{V})_q. \tag{13}$$

Таким чином, беручи до уваги співвідношення (8), (12) та (13), отримуємо

$$d_m(\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,1}, L_q) \geq d_m(\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,1} \cap T([2^{\boldsymbol{\rho}n}],d), L_q \cap T^{(}[2^{\boldsymbol{\rho}n}],d)) \gg$$

$$\gg 2^{-n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} d_m(\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,1} \cap T([2^{\boldsymbol{\rho}n}],d), L_2 \cap T([2^{\boldsymbol{\rho}n}],d)) \asymp$$

$$\asymp 2^{-n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} m^{-g(\boldsymbol{R})+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \asymp m^{-g(\boldsymbol{R})+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Випадок 3: $1 < p < 2 < q \le \infty$ або $2 \le p < q \le \infty$. На підставі відомої нерівності $\|\cdot\|_2 \le \|\cdot\|_q$ з урахуванням розглянутого випадку 1 та теореми Д можемо записати

$$d_m(\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,1}, L_q) \ge d_m(\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,1}, L_2) \asymp \begin{cases} m^{-g(\boldsymbol{R})+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}, & 1 < p < 2 < q \le \infty, \\ m^{-g(\boldsymbol{R})}, & 2 \le p < q \le \infty. \end{cases}$$

Теорему доведено.

Порівнюючи результати теореми Г і теореми 1, отримаємо наступне твердження.

***Наслідок* 1.** *Якщо* $1 < p < q \le 2$ *і* $g(\boldsymbol{R}) > \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}$, *то підпростір* $T([2^{\boldsymbol{\rho} n}], d)$ *є екстремальним (у сенсі порядку) підпростором для наближення функцій із класів* $\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}$.

***Зауваження*. 1.** У випадку $\theta = \infty$, який не охоплено в теоремі 1, тобто для класів $\mathbb{H}^{\boldsymbol{R}}_p$, порядкові оцінки колмогоровських поперечників було встановлено В. М. Темляковим [6], (розділ 2).

2. Для ізотропних класів $\mathbb{B}^r_{p,\theta}$ порядкову оцінку (5) отримав А. С. Романюком [7].

3. Теорема 1 доповнює оцінки колмогоровських поперечників класів $\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}$ у просторах L_q, які були встановлені у роботі [3] (див. теорему Д), для інших співвідношень між параметрами p та q.

Література

1. *Бесов О. В.* Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1961. – **60**. – С. 42 – 81.
2. *Никольский С. М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1951. – **38**. – С. 244 – 278.
3. *Миронюк В. В.* Тригонометричні наближення та колмогоровські поперечники анізотропних класів Бєсова періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 8. – С. 1117 – 1132.
4. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969. – 480 с.
5. *Kolmogoroff A.* Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse // Ann. Math. – 1936. – **37**, № 1. – P. 107 – 110.
6. *Temlyakov V. N.* Approximation of periodic functions. – New York: Nova Sci. Publ. Inc., 1993. – 272 p.
7. *Романюк А. С.* Билинейные приближения и колмогоровские поперечники периодических классов Бесова // Теорія операторів, диференціальні рівняння і теорія функцій: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2009. – **6**, № 1. – С. 222 – 236.

Одержано 14.07.15