УДК 517.5

**О. В. Моторная** (Киев. нац. ун-т им Т. Шевченко),
**В. П. Моторный** (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины),
**В. В. Седунова** (Днепропетр. нац. ун-т им. О. Гончара)

# О КЛАССИФИКАЦИИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ НА ОТРЕЗКЕ ФУНКЦИЙ

The problem of classification of functions integrable on a segment is considered. Estimates for the integral moduli of continuity of functions from generalized Potapov's classes are obtained.

Розглянуто питання класифікації интегровних на сегменті функцій. Отримано оцінки інтегральних модулів неперервності функцій з класу, що є узагальненням класу М. К. Потапова.

Известно, что если функция $f$ принадлежит пространству $L^p_{[-1;1]}$, $1 \le p < \infty$, то величина

$$\int\limits_{-1}^{1-u} |f(x+u) - f(x)|^p dx, \quad 0 < u \le 2, \tag{1}$$

стремится к нулю при $u \to 0$. Это свойство называется непрерывностью функции в среднем, и, в частности, используется для классификации интегрируемых функций. Наиболее известная классификация принадлежит С. М. Никольскому, — функция $f \in H^\alpha_P$, $0 < \alpha \le 1$, если выполняется условие $\omega(f,h)_p \le h^\alpha$, где $\omega(f,h)_p$ — интегральный модуль непрерывности функции $f$, определяющийся равенством

$$\omega(f,h)_p = \sup_{0<u\le h} \left\{ \int\limits_{-1}^{1-u} |f(x+u) - f(x)|^p dx \right\}^{1/p}, \quad 0 < h < 2.$$

Классы $H^\alpha_P$ называются $H$-классами Никольского [1, с. 64]. В работах М. К. Потапова [1, 2] для классификации интегрируемых на сегменте $[-1,1]$ функций выбрана величина

$$\left\{ \int\limits_{-1}^{1} \frac{|f(x\sqrt{1-h^2} - h\sqrt{1-x^2}) - f(x)|^p}{(\sqrt{1-x^2} + |h|)^{\beta p}}\, dx \right\}^{1/p}, \tag{2}$$

где $|h| \le 1$, $0 \le \beta \le 1$, с помощью которой определены классы Потапова $A^{\beta,\alpha}_p$: функция $f \in L^p_{[-1;1]}$, $1 \le p \le \infty$, принадлежит классу $A^{\beta,\alpha}_p$, если выполняется условие

$$\left\{ \int\limits_{-1}^{1} \frac{|f(x\sqrt{1-h^2} - h\sqrt{1-x^2}) - f(x)|^p}{(\sqrt{1-x^2} + |h|)^{\beta p}}\, dx \right\}^{1/p} \le |h|^\alpha,$$

где $|h| \le 1$, $\alpha < 1$. В случае $\alpha = \beta$ класс $A^{\alpha,\alpha}_p$ будем обозначать через $A^\alpha_p$. В отличие от интеграла (1) величина (2) может для некоторых функций из пространства $L^p_{[-1;1]}$, $1 \le p < \infty$, не существовать, точнее, функция $f(x\sqrt{1-h^2} - h\sqrt{1-x^2})$ может оказаться неинтегрируемой. Имеет место следующая теорема.

**Теорема 1.** *Для того чтобы функция* $f(x\sqrt{1-h^2}-h\sqrt{1-x^2})$ *была интегрируемой, необходимо и достаточно, чтобы существовал интеграл*

$$\int\limits_{-1}^{1}|f(x)|^p\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{3}$$

***Доказательство.*** *Необходимость.* Пусть функция $f(x)$ такова, что существует интеграл

$$\int\limits_{-1}^{1}|f(x\sqrt{1-h^2}-h\sqrt{1-x^2})|^p dx.$$

Полагая $x=\cos t,\ t\in[0;\pi]$ и $h=\sin v,\ v\in[-\pi/2;\pi/2]$, убеждаемся в существованиир интеграла $\int_0^\pi |f(\cos(t+v)|^p\sin t dt$. Пусть $v\in(0;\pi/2)$. Поскольку на интервале $(\pi/2-v;\pi-v)$ функция $\sin t\geq\min\{\sin v,\sin(\pi/2-v)\}$, существует интеграл

$$\int\limits_{\pi/2-v}^{\pi-v}|f(\cos(t+v)|^p\,dt.$$

Выполняя в этом интеграле сначала замену переменной $t+v=u$, а затем $\cos u=x$, получаем интеграл

$$\int\limits_{-1}^{0}|f(x)|^p\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Аналогично, если $v\in(-\pi/2;0)$, то существует интеграл

$$\int\limits_{-v}^{\pi/2-v}|f(\cos(t+v)|^p dt.$$

Выполнив в последнем интеграле замену переменной $\cos(t+v)=x$, получим

$$\int\limits_{-v}^{\pi/2-v}|f(\cos(t+v)|^p\,dt=\int\limits_{0}^{1}|f(x)|^p\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Необходимость доказана.

*Достаточность.* Пусть интеграл (3) существует. Полагая $x=\cos t$ и используя свойства интеграла от периодических четных функций, получаем

$$\int\limits_{-1}^{1}|f(x)|^p\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int\limits_{0}^{\pi}|f(\cos t)|^p dt=\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(\cos t)|^p dt=\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(\cos(t+v))|^p dt\geq$$

$$\geq\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi}|f(\cos(t+v))|^p\sin t dt=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}|f(x\sqrt{1-h^2}-h\sqrt{1-x^2})|^p dx,$$

где $x = \cos t$, $h = \sin v$, $v \in [-\pi/2; \pi/2]$.

Теорема доказана.

Таким образом, если $f \in A_p^\alpha$, то необходимо, чтобы существовал интеграл (3).

Обозначим через $A_p^\omega$ класс функций, для которых интеграл (3) существует и выполняется условие

$$\left\{ \int_{-1}^{1} \frac{|f(x\sqrt{1-h^2} - h\sqrt{1-x^2}) - f(x)|^p}{\omega^p(\sqrt{1-x^2}|h| + h^2)} dx \right\}^{1/p} \le 1, \tag{4}$$

где $0 < |h| \le 1$, $\omega(h)$ — заданный модуль непрерывности. Будем предполагать, что $\dfrac{\omega(t)}{t}$ не возрастает, ибо в противном случае модуль непрерывности $\omega(t)$ можно заменить [3, с. 112] модулем непрерывности

$$\omega^\star(t) = t \inf_{0<x\le t} \frac{\omega(x)}{x},$$

для которого величина $\dfrac{\omega^\star(t)}{t}$ не возрастает и, в силу неравенств

$$\omega^\star(t) \le \omega(t) \le 2\omega^\star(t),$$

имеет тот же порядок стремления к нулю при $t \to 0$, что и $\omega(t)$. Для $\omega(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, класс $A_p^\omega$ совпадает с классом $A_p^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, М. К. Потапова. Известны и другие способы классификации интегрируемых на отрезке функций (см., например, [4]).

Полагая $x = \cos t$, $t \in [0; \pi]$ и $h = \sin v$, $v \in [-\pi/2; \pi/2]$, условие (4) можно представить в виде

$$\left\{ \int_{0}^{\pi} \frac{|f(\cos(t+v)) - f(\cos t)|^p}{\omega^p(\sin t|\sin v| + \sin^2 v)} \sin t dt \right\}^{1/p} \le 1,$$

и, так как $|\sin v| \le |v|$, для любой функции из класса $A_p^\omega$ и $h \ge |v|$ имеет место неравенство

$$\left\{ \int_{0}^{\pi} \frac{|f(\cos(t+v)) - f(\cos t)|^p}{\omega^p(\sin t\, h + h^2)} \sin t dt \right\}^{1/p} \le 1, \tag{5}$$

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

**Теорема 2.** *Для любой функции $f \in A_p^\omega$ имеет место неравенство*

$$\omega(f; h)_p \le C\omega(h) \ln^{1/p} \frac{2}{h}, \quad 0 < h \le 1, \tag{6}$$

*где $C$ — некоторая константа.*

***Замечание* 1.** Здесь и в дальнейшем буквой $C$ будем обозначать абсолютные константы. При этом в разных формулах они могут иметь разные значения.

***Замечание* 2.** Теорема 2 в случае $\omega(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, анонсирована в работе [5].

***Замечание* 3.** В работе [6, с. 882–884] для любого $h \in (0;1)$ построена такая функция $\phi_h(x) \in A_p^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, что

$$\int_{-1}^{1-h} |\phi_h(x+h) - \phi_h(x)|^p dx > C_\alpha h^{p\alpha} \ln \frac{2}{h},$$

где $C_\alpha$ — некоторая величина, зависящая от $\alpha$. При этом, если $0 < \alpha \leq \gamma < 1$, существует такая величина $d_\gamma > 0$, что $C_\alpha \geq d_\gamma$. Поэтому для всех модулей непрерывности $\omega(t)$ и функций $f \in A_p^\omega$ в правой части неравенства (6) $\ln \dfrac{2}{|h|}$ опустить нельзя.

Чтобы доказать теорему 2, рассмотрим некоторые вспомогательные понятия и утверждения.

Пусть $n = 2^{2k_0}$, где $k_0$ — натуральное число; $h_k = \dfrac{\pi}{\sqrt{n}2^k}$, $k = 1, 2, \ldots, k_0$; $S_k = \{t_i^k\}_{i=0}^{\sqrt{n}2^k}$, $k = 2, 3, \ldots, k_0$, где $t_i^k = \left\{\dfrac{\pi i}{\sqrt{n}2^k}\right\}$. Далее рассмотрим точки $z_0 = 0$, $z_1 = \dfrac{\pi}{4\sqrt{n}}$, $z_k = z_{k-1} + j_k h_k$, где натуральное число $j_k$ выбрано так, что $\sin z_k \leq \dfrac{2^k\pi}{4\sqrt{n}}$ и $\sin(z_k + h_k) > \dfrac{2^k\pi}{4\sqrt{n}}$, $k = 2, 3, \ldots, k_0$. Вместе с точками $z_k$ будем рассматривать точки, симметричные точкам $z_k$ относительно $\pi/2$, т. е. точки $\pi - z_k$. Положим $a_k = -\cos z_k$, $k = 1, 2, \ldots, k_0$, $a_{-k} = -a_k$, $k = 1, 2, \ldots, k_0$, и, наконец, $x_i^k = -\cos t_i^k$. Будем использовать следующие свойства выбранных точек.

*Свойство 1.* Расстояние между точками $z_k$ и $z_{k+1}$ не меньше $2h_{k+1}$, т. е. $j_k \geq 2$ для любого $k = 1, 2, \ldots, k_0 - 1$.

Из неравенств

$$\sin(z_k + 2h_{k+1}) = \sin(z_k + h_k) < \sin z_k + \sin h_k < \frac{2^k\pi}{4\sqrt{n}} + \frac{\pi}{\sqrt{n}2^k} \leq \frac{2^{k+1}\pi}{4\sqrt{n}}$$

следует, что либо $z_{k+1} = z_k + 2h_{k+1}$, либо $z_{k+1} > z_k + 2h_{k+1}$.

*Свойство 2.* Точки $z_k$ и $\pi - z_k$ принадлежат множеству $S_k$.

Это свойство очевидно.

*Свойство 3.* Для любого $k = 1, 2, \ldots, k_0$ имеет место неравенство

$$\cos z_k - \cos(z_k + h_{k+1}) > \frac{1}{2n}$$

и, следовательно, расстояние между любыми соседними точками $x_i^{k+1}$, попавших в сегмент $[z_k; z_{k+1}]$, больше $\dfrac{1}{2n}$.

Действительно, так как $j_k \geq 2$, то

$$z_k = z_{k-1} + j_k h_k \geq z_{k-1} + 2h_k = z_{k-1} + h_{k-1}$$

и следовательно,

$$\sin z_k \geq \sin(z_{k-1} + h_{k-1}) > \frac{2^{k-1}\pi}{4\sqrt{n}}.$$

Поэтому

$$\cos z_k - \cos(z_k + h_{k+1}) > h_{k+1} \sin z_k > \frac{\pi^2}{16n} > \frac{1}{2n}.$$

Пусть для любого $k = 2, 3, \ldots, k_0$

$$\rho_{h_k}(t) = \frac{\sin t}{\omega^p(\sin t h_k + h_k^2)}, \quad t \in [0; \pi],$$

$$\phi_{h_k}(t) = \frac{1}{h_k} \int\limits_t^{t+h_k} f(\cos u) du, \quad t \in [0; \pi - h_k].$$

Интеграл существует, так как сходится интеграл (3).

**Лемма 1.** *Для любой функции $f \in A_p^\omega$ и $k = 2, 3, \ldots, k_0$ выполняется неравенство*

$$I_1 = \int\limits_0^{\pi - h_k} |f(\cos t) - \phi_{h_k}(t)|^p \rho_{h_k}(t) dt \leq 1.$$

***Доказательство.*** Представляя функцию $\phi_{h_k}(t)$ в виде

$$\phi_{h_k}(t) = \frac{1}{h_k} \int\limits_0^{h_k} f(\cos(u + t))\, du$$

и полагая $p > 1$, получаем

$$I_1 = \int\limits_0^{\pi - h_k} \left| f(\cos t) - \frac{1}{h_k} \int\limits_0^{h_k} f(\cos(u + t))\, du \right|^p \rho_{h_k}(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{h_k^p} \int\limits_0^{\pi - h_k} \left| \int\limits_0^{h_k} [f(\cos t) - f(\cos(u + t))]\, du \right|^p \rho_{h_k}(t)\, dt.$$

Сначала к внутреннему интегралу применим неравенство Гельдера, а затем поменяем порядок интегрирования:

$$I_1 \leq \frac{1}{h_k} \int\limits_0^{h_k} \int\limits_0^{\pi} |f(\cos t) - f(\cos(u + t))|^p \frac{\sin t}{\omega^p(\sin t\, h_k + h_k^2)}\, dt\, du \leq 1.$$

Если $p = 1$, то доказательство упрощается — нет необходимости применять неравенство Гельдера.

Пусть $f \in A_p^\omega$, $L_i^k = \dfrac{1}{h_k} \displaystyle\int_{t_i^k}^{t_{i+1}^k} f(\cos u) du$. Положим $\Phi_k(t) = L_i^k$, $t \in [t_i^k; t_{i+1}^k)$, $i = 1, 2, \ldots, 2^k\sqrt{n} - 2$, и $\Phi_k(t) = \dfrac{1}{h_k} \displaystyle\int_{h_k}^{2h_k} f(\cos u) du$, $t \in [0, h_k]$, $\Phi_k(t) = \dfrac{1}{h_k} \displaystyle\int_{\pi - 2h_k}^{\pi - h_k} f(\cos u) du$, $t \in [\pi - h_k, \pi]$, $k = 2, 3, \ldots, k_0$.

**Лемма 2.** *Для любой функции* $f \in A_p^\omega$ *и* $k = 2, 3, \ldots, k_0$ *выполняется неравенство*

$$I_2 = \int\limits_{h_k}^{\pi-h_k} |\phi_{h_k}(t) - \Phi_k(t)|^p \rho_{h_k}(t) dt \leq 2^{p+1}. \tag{7}$$

***Доказательство.*** В случае $p > 1$, применяя неравенство Гельдера, получаем

$$I_2 = \frac{1}{h_k^p} \sum_{i=1}^{2^k\sqrt{n}-2} \int\limits_{t_i^k}^{t_{i+1}^k} \left| \int\limits_t^{t+h_k} f(\cos u) du - \int\limits_{t_i^k}^{t_{i+1}^k} f(\cos u) du \right|^p \rho_{h_k}(t) dt =$$

$$= \frac{1}{h_k^p} \sum_{i=1}^{2^k\sqrt{n}-2} \int\limits_{t_i^k}^{t_{i+1}^k} \left| \int\limits_{t_{i+1}^k}^{t+h_k} f(\cos u) du - \int\limits_{t_i^k}^{t} f(\cos u) du \right|^p \rho_{h_k}(t) dt =$$

$$= \frac{1}{h_k^p} \sum_{i=1}^{2^k\sqrt{n}-2} \int\limits_{t_i^k}^{t_{i+1}^k} \left| \int\limits_{t_i^k}^{t} f(\cos(u+h_k)) du - \int\limits_{t_i^k}^{t} f(\cos u) du \right|^p \rho_{h_k}(t) dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{h_k^p} \sum_{i=1}^{2^k\sqrt{n}-2} \int\limits_{t_i^k}^{t_{i+1}^k} \left[ \int\limits_{t_i^k}^{t_{i+1}^k} |f(\cos(u+h_k)) - f(\cos u)| \, du \right]^p \rho_{h_k}(t) dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{h_k} \sum_{i=1}^{2^k\sqrt{n}-2} \int\limits_{t_i^k}^{t_{i+1}^k} \int\limits_{t_i^k}^{t_{i+1}^k} |f(\cos(u+h_k)) - f(\cos u)|^p du \rho_{h_k}(t) dt = I_3. \tag{8}$$

Продолжим доказательство при условии, что сегмент $[t_i^k; t_{i+1}^k]$ находится на сегменте $[0; \pi/2]$ (в случае, когда сегмент $[t_i^k; t_{i+1}^k]$ находится на сегменте $[\pi/2; \pi]$, рассуждения аналогичны). В этом случае воспользуемся неравенствами

$$1 \leq \rho_{h_k}(u) \frac{\omega^p(\sin t_{i+1}^k \, h_k + h_k^2)}{\sin t_i^k}, \tag{9}$$

$$\int\limits_{t_i^k}^{t_{i+1}^k} \frac{\sin t}{\omega^p(\sin t \, h_k + h_k^2)} dt \leq h_k \frac{\sin t_{i+1}^k}{\omega^p(\sin t_i^k \, h_k + h_k^2)}, \tag{10}$$

$$\frac{\omega(\sin t_{i+1}^k \, h_k + h_k^2)}{\omega(\sin t_i^k \, h_k + h_k^2)} \leq 2. \tag{11}$$

Неравенство (9) является следствием возрастания $\sin t$ на сегменте $[0; \pi/2]$ и монотонности модуля непрерывности. По тем же причинам имеет место неравенство (10). Неравенство (11) следует из того, что $\dfrac{\omega(t)}{t}$ не возрастает и из того, что $\dfrac{\sin t_{i+1}^k}{\sin t_i^k} < 2$, если $[t_i^k; t_{i+1}^k]$ находится на сегменте $[0; \pi/2]$. Чтобы оценить $I_3$, используя неравенство (9), проинтегрируем по переменной $u$, а затем, учитывая неравенство (10), по переменной $t$. Наконец, применяя неравенство (11), получаем

$$I_3 \le 2^{p+1} \sum_{i=1}^{2^k\sqrt{n}-2} \int\limits_{t_i^k}^{t_{i+1}^k} |f(\cos(u+h_k)) - f(\cos u)|^p \rho_{h_k}(u)du \le$$

$$\le \int\limits_0^\pi \frac{|f(\cos(u+h_k)) - f(\cos u)|^p}{\omega^p(\sin u\, h_k + h_k^2)} \sin u du \le 2^{p+1}. \tag{12}$$

Из (8) и (12) следует (7). Если $p = 1$, то доказательство упрощается — нет необходимости применять неравенство Гельдера.

**Лемма 3.** *Для любой функции $f \in A_p^\omega$ и $k = 2, 3, \ldots, k_0$ выполняется неравенство*

$$I_4 = \left\{ \int\limits_{h_k}^{\pi-h_k} |f(\cos t) - \Phi_k(t)|^p \rho_{h_k}(t)dt \right\}^{1/p} \le 2^{1+1/p} + 1. \tag{13}$$

***Доказательство.*** Применяя неравенство Минковского и леммы 1, 2, имеем

$$I_4 = \left\{ \int\limits_{h_k}^{\pi-h_k} |f(\cos t) - \phi_k(t) + \phi_k(t) - \Phi_k(t)|^p \rho_{h_k}(t)dt \right\}^{1/p} \le$$

$$\le \left\{ \int\limits_{h_k}^{\pi-h_k} |f(\cos t) - \phi_k(t)|^p \rho_{h_k}(t)dt \right\}^{1/p} +$$

$$+ \left\{ \int\limits_{h_k}^{\pi-h_k} |\phi_k(t) - \Phi_k(t)|^p \rho_{h_k}(t)dt \right\}^{1/p} \le 2^{1+1/p} + 1.$$

В случае весовой функции, равной 1, леммы 1, 2 получены в работе [7], лемма 3 установлена в [5, 8], а леммы 1 – 3 с некоторой интегрируемой весовой функцией доказаны в [9].

Пусть $E_k = [z_{k-1}; z_k) \cup (\pi - z_k; \pi - z_{k-1}]$, $k = 1, 2, \ldots, k_0 - 1$, $E_{k_0} = [z_{k_0-1}; \pi - z_{k_0-1})$.

***Следствие* 1.** *Для любой функции $f \in A_p^\omega$ и $k = 2, 3, \ldots, k_0$выполняется неравенство*

$$\left\{ \int\limits_{E_k} |f(\cos t) - \Phi_k(t)|^p \sin t dt \right\}^{1/p} \le C\omega\left(\frac{1}{n}\right). \tag{14}$$

***Доказательство.*** Для $k = 2, 3, \ldots, k_0 - 1$, используя (13), получаем

$$2^{1+1/p} + 1 \geq \left\{ \int\limits_{h_k}^{\pi - h_k} |f(\cos t) - \Phi_k(t)|^p \rho_{h_k}(t) dt \right\}^{1/p} \geq$$

$$\geq \left\{ \int\limits_{E_k} \frac{|f(\cos t) - \Phi_k(t)|^p \sin t dt}{\omega^p(\sin t \, h_k + h_k^2)} \right\}^{1/p} \geq$$

$$\geq \left\{ \int\limits_{E_k} |f(\cos t) - \Phi_k(t)|^p \sin t dt \right\}^{1/p} \frac{1}{\omega(\sin z_k \, h_k + h_k^2)}. \tag{15}$$

В силу свойств точек $z_k$ и чисел $h_k$ имеем $\sin z_k \, h_k + h_k^2 \leq \pi^2/2n$. Аналогично, если $k = k_0$, то

$$\left\{ \int\limits_{E_{k_0}} |f(\cos t) - \Phi_{k_0}(t)|^p \sin t dt \right\}^{1/p} \leq C\omega(\sin z_{k_0} \, h_{k_0} + h_{k_0}^2). \tag{16}$$

Из неравенств (15), (16) следует (14).

**Лемма 4.** *Пусть* $[a; b] \subset [0; \pi]$ *и* $|v| \leq h$. *Для любой функции* $f \in A_p^\omega$ *выполняется неравенство*

$$\int\limits_a^b |f(\cos(t + v)) - f(\cos t)|^p \sin t dt \leq \omega^p(\sin t_0 \, h + h^2),$$

*где* $t_0$ *— точка сегмента* $[a; b]$, *в которой функция* $\sin t$ *достигает наибольшего значения. В частности, если* $[a; b] = [0; h_2]$, $0 < v \leq 2h_2$, *то*

$$\int\limits_0^{h_2} |f(\cos(t + v)) - f(\cos t)|^p \sin t dt \leq C\omega^p \left( \frac{1}{n} \right). \tag{17}$$

*Аналогично, если* $[a; b] = [\pi - h_2; \pi]$, $0 < v \leq 2h_2$, *то*

$$\int\limits_{\pi - h_2}^{\pi} |f(\cos(t + v)) - f(\cos t)|^p \sin t dt \leq C\omega^p \left( \frac{1}{n} \right). \tag{18}$$

***Доказательство.*** Воспользуемся неравенством (5):

$$1 \geq \int\limits_0^{\pi} \frac{|f(\cos(t + v)) - f(\cos t)|^p}{\omega^p(\sin t \, h + h^2)} \sin t dt \geq \frac{\int_a^b |f(\cos(t + v)) - f(\cos t)|^p \sin t dt}{\omega^p(\sin t_0 \, h + h^2)}.$$

В частности, если $[a; b] = [0; h_2]$, $0 < v \leq 2h_2$, то

$$\int_0^{h_2} |f(\cos(t+v)) - f(\cos t)|^p \sin t dt \leq \omega^p (2h_2 \sin h_2 + 4h_2^2) \leq C\omega^p \left(\frac{1}{n}\right).$$

Неравенство (17) доказано, аналогично получаем неравенство (18).

Лемма доказана.

**Лемма 5.** *Для любой функции $f \in A_p^\omega$ выполняется неравенство*

$$I_5 = \int_0^{h_2} \left| f(\cos y) - \frac{1}{h_2} \int_{h_2}^{2h_2} f(\cos z) dz \right|^p \sin y dy \leq C\omega^p \left(\frac{1}{n}\right).$$

***Доказательство.*** Выполнив замену переменной $u = z + h_2$, представим $I_5$ в виде

$$I_5 = \frac{1}{h_2^p} \int_0^{h_2} \left| \int_0^{h_2} [f(\cos y) - f(\cos(z + h_2))] dz \right|^p \sin y dy,$$

а затем к внутреннему интегралу применим неравенство Гельдера, положим $x = u + y$ и поменяем порядок интегрирования:

$$I_5 \leq \frac{1}{h_2^p} h_2^{p/q} \int_0^{h_2} \int_{-y}^{h_2 - y} |f(\cos y) - f(\cos(u + y + h_2))|^p du \sin y dy =$$

$$= \frac{1}{h_2} \int_{-h_2}^{0} \int_{-u}^{h_2} |f(\cos y) - f(\cos(u + y + h_2))|^p \sin y dy du +$$

$$+ \frac{1}{h_2} \int_0^{h_2} \int_0^{h_2 - u} |f(\cos y) - f(\cos(u + y + h_2))|^p \sin y dy du.$$

В первом интеграле положим $-v = u$. Тогда

$$I_5 \leq \frac{1}{h_2} \int_0^{h_2} \int_v^{h_2} |f(\cos y) - f(\cos(y - v + h_2))|^p \sin y dy dv +$$

$$+ \frac{1}{h_2} \int_0^{h_2} \int_0^{h_2 - u} |f(\cos y) - f(\cos(u + y + h_2))|^p \sin y dy du.$$

Применяя лемму 4 и учитывая значение числа $h_2$ и свойства модуля непрерывности, получаем

$$I_5 \leq \omega(\sin h_2 \, h_2 + h_2^2) + \omega(\sin h_2 \, 2h_2 + 4h_2^2) \leq C\omega^p \left(\frac{1}{n}\right).$$

Аналогично доказывается следующее утверждение.

**Лемма 6.** *Для любой функции* $f \in A_p^\omega$, $n = 2^{2k_0}$, *выполняется неравенство*

$$\int\limits_{\pi-h_2}^{\pi} |f(\cos y) - \frac{1}{h_2} \int\limits_{\pi-2h_2}^{\pi-h_2} f(\cos z)dz|^p \sin y dy \leq C\omega^p \left(\frac{1}{n}\right).$$

Определим на сегменте $[-1, 1]$ кусочно-постоянную функцию $F_n(x)$ равенством $F_n(\cos y) = \Phi_k(y)$, если $y \in E_k$, $k = 2, 3, \ldots, k_0$, и положим $F_n(\cos y) = \Phi_2(y)$, если $y \in E_1$.

**Лемма 7.** *Для любой функции* $f \in A_p^\omega$ *выполняется неравенство*

$$\left\{\int\limits_{-1}^{1} |f(x) - F_n(x)|^p dx\right\}^{1/p} \leq C\omega\left(\frac{1}{n}\right) \ln^{1/p} n. \tag{19}$$

***Доказательство.*** Сделав замену переменной $x = -\cos y$, представим интеграл, стоящий в левой части неравенства (24) в виде

$$\int\limits_0^{\pi} |f(\cos y) - F_n(-\cos y)|^p \sin y dy = \sum_{k=2}^{k_0} \int\limits_{E_k} |f(\cos y) - \Phi_k(y)|^p \sin y dy +$$

$$+ \int\limits_0^{h_2} |f(\cos y) - \frac{1}{h_2} \int\limits_{h_2}^{2h_2} f(\cos z)dz|^p \sin y dy +$$

$$+ \int\limits_{\pi-h_2}^{\pi} |f(\cos y) - \frac{1}{h_2} \int\limits_{\pi-2h_2}^{\pi-h_2} f(\cos z)dz|^p \sin y dy.$$

В силу следствия 1 каждое слагаемое суммы не превышает $C\omega^p \left(\dfrac{1}{n}\right)$, а последние два интеграла, благодаря леммам 5, 6, также не превышают $C\omega^p(1/n)$, где $C$ — некоторая константа.

***Следствие* 2.** *Для любой функции* $f \in A_p^\omega$ *выполняется неравенство*

$$\left\{\int\limits_{-1}^{1-h} |f(x+h) - F_n(x+h)|^p dx\right\}^{1/p} \leq C\omega\left(\frac{1}{n}\right) \ln^{1/p} n. \tag{20}$$

Неравенство (20) непосредственно следует из (19).

**Лемма 8** [10, с. 136]. *Для любой функции* $f \in A_p^\omega$ *имеет место неравенство*

$$I_6 = \left|\frac{1}{h_{k+1}} \int\limits_{z_k}^{z_k+h_{k+1}} f(\cos u)du - \frac{1}{h_k} \int\limits_{z_k-h_k}^{z_k} f(\cos u)du\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{h_{k+1}} \int\limits_{z_k-h_k}^{z_k} |f(\cos(u+h_{k+1}) - f(\cos u)|du.$$

***Доказательство.*** Используя аддитивность интеграла и выполня соответствующую замену переменной, получаем

$$I_6 = \frac{1}{h_k}\left| \int\limits_{z_k}^{z_k+h_{k+1}} f(\cos u)du + \int\limits_{z_k}^{z_k+h_{k+1}} f(\cos u)du - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{z_k-h_k}^{z_k-h_{k+1}} f(\cos u)du - \int\limits_{z_k-h_{k+1}}^{z_k} f(\cos u)du \right| =$$

$$= \frac{1}{h_k}\left| \int\limits_{z_k-h_{k+1}}^{z_k} [f(\cos(u+h_{k+1})) - f(\cos u)]du + \right.$$

$$+ \int\limits_{z_k-h_k}^{z_k-h_{k+1}} [f(\cos(u+h_k)) - f(\cos(u+h_{k+1}))+$$

$$\left. + f(\cos(u+h_{k+1}) - f(\cos u)]du \right| =$$

$$= \frac{1}{h_k}\left| 2\int\limits_{z_k-h_{k+1}}^{z_k} [f(\cos(u+h_{k+1})) - f(\cos u)]du + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{z_k-h_k}^{z_k-h_{k+1}} [f(\cos(u+h_{k+1})) - f(\cos u)]du \right| \le$$

$$\le \frac{1}{h_{k+1}} \int\limits_{z_k-h_k}^{z_k} |f(\cos(u+h_{k+1}) - f(\cos u)|du.$$

Аналогично доказывается следующее утверждение.

**Лемма 9** [10, с. 137]. *Для любой функции $f \in A_p^\omega$ имеет место неравенство*

$$\left| \frac{1}{h_{k-1}} \int\limits_{\pi-z_{k-1}}^{\pi-z_{k-1}+h_{k-1}} f(\cos u)du - \frac{1}{h_k} \int\limits_{\pi-z_{k-1}-h_k}^{\pi-z_{k-1}} f(\cos u)du \right| \le$$

$$\le \frac{1}{h_k} \int\limits_{\pi-z_{k-1}-h_k}^{\pi-z_{k-1}+h_k} |f(\cos(u+h_k) - f(\cos u)|du.$$

**Лемма 10.** *Пусть $1/4n \le h \le 1/2n$. Для любой функции $f \in A_p^\omega$ выполняется неравенство*

$$\left\{ \int_{-1}^{1-h} |F_n(x+h) - F_n(x)|^p dx \right\}^{1/p} \leq C \ln^{1/p} n\omega\left(\frac{1}{n}\right). \tag{21}$$

***Доказательство.*** Если $t = 2h_2 = \dfrac{\pi}{2\sqrt{n}}$, $n \geq 2$, то из неравенства $1 - \cos t > \dfrac{t^2}{2!} - \dfrac{t^4}{4!}$ следует оценка $1 - \cos t > \dfrac{1}{n}$. Поэтому длина сегмента $[-1; -\cos 2h_2]$ больше $\dfrac{1}{n}$, а так как функция функция $F_n(x)$ равна константам на сегментах $[-1; -\cos 2h_2]$ и $[\cos 2h_2; 1]$, то $F_n(x+h) - F_n(x) = 0$, если $x \in [-1; -\cos 2h_2 + h] \cup [\cos 2h_2; 1-h]$. Следовательно, чтобы доказать (21), достаточно рассмотреть интеграл

$$I_7 = \int_{-\cos h_2}^{\cos 2h_2} |F_n(x+h) - F_n(x)|^p dx.$$

Представим $I_7$ в виде

$$I_7 = \sum_{k=2}^{k_0-1} \int_{a_{k-1}}^{a_k} |F_n(x+h) - F_n(x)|^p dx +$$

$$+ \int_{a_{k_0-1}}^{-a_{k_0-1}} |F_n(x+h) - F_n(x)|^p dx + \sum_{k=3}^{k_0-1} \int_{-a_k}^{-a_{k-1}} |F_n(x+h) - F_n(x)|^p dx +$$

$$+ \int_{-a_2}^{\cos 2h_2} |F_n(x+h) - F_n(x)|^p dx = J_1 + J_2 + J_3 + J_4.$$

и оценим каждый интеграл.

Для любого $k = 2, 3, \ldots, k_0 - 1$ рассмотрим интеграл группы $J_1$:

$$I_8 = \int_{a_{k-1}}^{a_k} |F_n(x+h) - F_n(x)^p dx = \sum_{i\colon x_i^k \in [a_{k-1}; a_k)} \int_{x_i^k}^{x_{i+1}^k} |F_n(x+h) - F_n(x)|^p dx.$$

Поскольку длина сегментов $[x_i^k; x_{i+1}^k]$, содержащихся в сегменте $[a_{k-1}; a_k]$, больше $1/2n$, а $h \leq 1/2n$, величина $|F_n(x+h) - F_n(x)|$ равна нулю, если точки $x$, $x+h$ находятся в сегменте $[x_i^k; x_{i+1}^k]$, в противном случае

$$|F_n(x+h) - F_n(x)| = \frac{1}{h_k} \left| \int_{t_{i+1}^k}^{t_{i+2}^k} f(\cos u) du - \int_{t_i^k}^{t_{i+1}^k} f(\cos u) du \right|, \tag{22}$$

если $z_{k-1} < t_{i+1}^k < z_k$, и в силу леммы 8

$$|F_n(x+h)-F_n(x)| = \left| \frac{1}{h_{k+1}} \int\limits_{z_k}^{z_k+h_{k+1}} f(\cos u)du - \frac{1}{h_k} \int\limits_{z_k-h_k}^{z_k} f(\cos u)du \right| \le$$

$$\le \frac{1}{h_{k+1}} \int\limits_{z_k-h_k}^{z_k} |f(\cos(u+h_{k+1}) - f(\cos u)|du, \tag{23}$$

если $t_{i+1}^k = z_k$. Оценка интеграла $I_8$ только усилится, если будем считать, что для величины $|F_n(x+h)-F_n(x)|$ выполняются соотношения (22), (23) если $t_{i+1}^k \in (z_{k-1}; z_k]$. Тогда

$$\int\limits_{x_i^k}^{x_{i+1}^k} |F_n(x+h)-F_n(x)|^p dx \le (x_{i+1}^k - x_i^k) \frac{1}{h_k^p} \left| \int\limits_{t_i^k}^{t_{i+1}^k} [f(\cos(u+h_k) - f(\cos u)]du \right|^p,$$

если $a_{k-1} < x_{i+1}^k < a_k$, и

$$\int\limits_{-\cos(z_k-h_k)}^{a_k} |F_n(x+h)-F_n(x)|^p dx \le$$

$$\le \frac{\cos(z_k-h_k)-\cos z_k}{h_{k+1}^p} \left| \int\limits_{z_k-h_k}^{z_k} |f(\cos(u+h_{k+1}) - f(\cos u)|du \right|^p,$$

если $x_{i+1}^k = a_k$.

Используя оценки $x_{i+1}^k - x_i^k < h_k \sin(i+1/2)h_k = h_k \sin(t_i^k + h_k/2)$, $\cos(z_k-h_k) - \cos z_k <$ $< h_k \sin(z_k - h_k/2)$ и неравенство Гельдера, получаем

$$I_8 \le \sum_{i:\, z_{k-1}<t_{i+1}^k<z_k} \sin(t_i^k + h_k/2) \int\limits_{t_i^k}^{t_{i+1}^k} |f(\cos(u+h_k) - f(\cos u|^p du + 2^p \sin(z_k - h_k/2) \times$$

$$\times \int\limits_{z_k-h_k}^{z_k} |f(\cos(u+h_{k+1}) - f(\cos u)|^p du.$$

Поскольку $[z_{k-1}; z_k] \subset [0; \pi/2]$, то $1 \le \sin u / \sin t_i^k$, если $u \in [t_i^k; t_{i+1}^k]$, и $1 \le \dfrac{\sin u}{\sin(z_k-h_k)}$, если $u \in [z_k - h_k; z_k]$. Тогда

$$I_8 \le \sum_{i:\, z_{k-1}<t_{i+1}^k<z_k} \frac{\sin(t_i^k + h_k/2)}{\sin t_i^k} \int\limits_{t_i^k}^{t_{i+1}^k} |f(\cos(u+h_k) - f(\cos u)|^p \sin u du +$$

$$+ \frac{2^p \sin(z_k - h_k/2)}{\sin(z_k-h_k)} \int\limits_{z_k-h_k}^{z_k} |f(\cos(u+h_{k+1}) - f(\cos u)|^p \sin u du.$$

Из неравенств $\dfrac{\sin(t_i^k + h_k/2)}{\sin t_i^k} \le 2$, $\dfrac{\sin(z_k - h_k/2)}{\sin(z_k - h_k)} \le 2$ и леммы 4 следует неравенство

$$I_8 \le C\omega^p\left(\frac{1}{n}\right).$$

Интеграл $J_2$ и интегралы групы $J_3$ оцениваются аналогично, только вместо леммы 8 следует воспользоваться леммой 9. Рассмотрим интеграл

$$J_4 = \int\limits_{-a_2}^{\cos 2h_2} |F_n(x+h) - F_n(x)|^p dx = \sum_{i\colon x_i^2 \in [-a_2; \cos 2h_2)} \int\limits_{x_i^2}^{x_{i+1}^2} |F_n(x+h) - F_n(x)|^p\, dx.$$

Как и в случае интеграла $I_8$, можно считать, что

$$|F_n(x+h) - F_n(x)| = \frac{1}{h_2}\left|\int\limits_{t_{i+1}^2}^{t_{i+2}^2} f(\cos u)du - \int\limits_{t_i^2}^{t_{i+1}^2} f(\cos u)du\right|,$$

если $x_i^2 \le x \le x_{i+1}^2$. Произведем в первом интеграле замену переменной $u = t + h_2$. Тогда

$$\int\limits_{x_i^2}^{x_{i+1}^2} |F_n(x+h) - F_n(x)|^p dx = (x_{i+1}^2 - x_i^2)\frac{1}{h_2^p}\left|\int\limits_{t_i^2}^{t_{i+1}^2} [f(\cos(u+h_2) - f(\cos u)]du\right|^p,$$

если $-a_2 < x_{i+1}^k \le \cos 2h_2$. Используя оценки $x_{i+1}^2 - x_i^2 < h_2 \sin(t_i^2 + h_2/2)$ и неравенство Гельдера, получаем

$$J_4 \le \sum_{i\colon 2h_2 < t_{i+1}^2 \le z_2} \sin(t_i^2 + h_2/2) \int\limits_{t_i^2}^{t_{i+1}^2} |f(\cos(u+h_k) - f(\cos u)|^p du.$$

Из неравенств $1 \le \sin u/ \sin t_i^2$, если $u \in [t_i^2; t_{i+1}^2] \subset [0; \pi/2]$, следует

$$J_4 \le \sum_{i\colon 2h_2 < t_{i+1}^2 \le z_2} \frac{\sin(t_i^2 + h_2/2)}{\sin t_i^2} \int\limits_{t_i^2}^{t_{i+1}^2} |f(\cos(u+h_2) - f(\cos u)|^p \sin u du.$$

Применяя неравенство $\sin(t_i^2 + h_2/2)/\sin t_i^2 < 2$, лемму 4 и учитывая, что $h_2 = \pi/4\sqrt{n}$, имеем

$$J_4 \le 2\int\limits_{2h_2}^{z_2} |f(\cos(u+h_2) - f(\cos u)|^p \sin u du \le C\omega^p(h_2 \sin 2h_2 + h_2^2) \le C\omega^p\left(\frac{1}{n}\right).$$

Лемма 10 доказана.

**Доказательство теоремы 2.** Пусть $f \in A_p^\omega$ и число $h$ удовлетворяет условию $1/4n \le h \le$ $\le 1/2n$. Тогда, применяя неравенство Минковского и неравенства (19)–(21), получаем

$$\left\{\int\limits_{-1}^{1-h}|f(x+h)-f(x)|^p dx\right\}^{1/p} \le \left\{\int\limits_{-1}^{1-h}|f(x+h)-F_n(x+h)|^p dx\right\}^{1/p} +$$

$$+\left\{\int\limits_{-1}^{1-h}|F_n(x+h)-F_n(x)|^p dx\right\}^{1/p} + \left\{\int\limits_{-1}^{1-h}|F_n(x)-f(x)|^p dx\right\}^{1/p} \le C\ln^{1/p} n\omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

Из неравенств $1/4n \le h \le 1/2n$ следует оценка

$$\ln^{1/p} n\omega(1/n) \le C\ln^{1/p}\frac{1}{h}\,\omega(h).$$

Теорема 2 доказана.

## Литература


1. *Потапов М. К.* О приближении непериодических функций алгебраическими многочленами // Вестн. Моск. ун-та. – 1960. – № 4. – С. 14 – 25.
2. *Потапов М. К.* О приближении алгебраическими полиномами в метрике $L_p$ // Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций. – М., 1961.
3. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. –М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
4. *Ditzian Z., Totik V.* Moduli of smoothness. – Berlin etc.: Springet, 1993. – 225 p.
5. *Моторный В. П.* Некоторые вопросы приближения функций алгебраическими многочленами в интегральной метрике // Докл. АН СССР. – 1967. – **172**, № 3. – С. 537 – 540.
6. *Моторный В. П.* Приближение функций алгебраическими полиномами в метрике $L_p$ // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1971. – **35**, № 4. – С. 874 – 899.
7. *Ульянов П. Л.* О рядах по системе Хаара // Мат. сб. – 1964. – **63**, № 3. – С. 356 – 391.
8. *Ульянов П. Л.* Вложение некоторых классов функций $H_p^\omega$ // Изв. АН СССР, Сер. мат. – 1968. – **32**, № 3. – С. 649 – 686.
9. *Гончаров С. В.* О приближении функций алгебраическими полиномами в метрике $L_\rho^p$ // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2009. – **17**, вип. 14. – С. 48 – 59.
10. *Моторний В. П., Седунова В.В.* Властивості деяких модулів неперервності інтегрованих функцій // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2013. – **21**, вип. 18. – С. 132 – 140.


Получено 17.07.15