УДК 517.946

Б. Й. Пташник, С. М. Репетило
(Ін-т прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів)

КРАЙОВА ЗАДАЧА З МІШАНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ БЕЗТИПНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

In the domain obtained as the Cartesian product of a segment $0 \leq t \leq T$ by a p-dimensional torus in variables $x_1, \ldots, x_p$, $p \geq 1$, we study the problem with mixed boundary conditions in the variable t for general (no restrictions are imposed on the type) linear partial differential equations of high order with constant coefficients isotropic with respect to the order of differentiation for all independent variables. We establish conditions for the unique solvability of the problem in various functional spaces and construct its solution in the form of a series with respect to systems of orthogonal functions of the variables $x_1, \ldots, x_p$.

В области, являющейся декартовым произведением отрезка $0 \leq t \leq T$ на p-мерный тор переменных $x_1, \ldots, x_p$, $p \geq 1$, исследована задача со смешанными граничными условиями по переменной t для общих (без ограничений на тип) линейных уравнений с частными производными высокого порядка с постоянными коэффициентами, изотропных относительно порядка дифференцирования по всем независимым переменным. Определены условия однозначной разрешимости задачи в различных функциональных пространствах и построено ее решение в виде ряда по системе ортогональных функций переменных $x_1, \ldots, x_p$.

1. Вступ. Крайові задачі з даними на всій межі області (зокрема, з умовами Діріхле, Неймана та мішаними крайовими умовами) досить повно вивчені для еліптичних рівнянь і систем рівнянь (див., наприклад, [1 – 11] та наведену там бібліографію). Разом із цим для гіперболічних і загальних (без обмежень на тип) рівнянь і систем рівнянь з частинними похідними аналогічні задачі вивчені порівняно мало; це, очевидно, зумовлено тим, що вказані задачі є, взагалі, умовно коректними, а їхня розв'язність у багатьох випадках пов'язана з проблемою малих знаменників (див., наприклад, [12 – 27] та наведену там бібліографію).

У даній статті (де розширено і уточнено результати [20]) в області, що є декартовим добутком відрізка $0 \leq t \leq T$ на p-вимірний тор змінних $x_1, \ldots, x_p$, $p \geq 1$, досліджено крайову задачу з мішаними умовами на межі області для лінійного безтипного рівняння з частинними похідними порядку $2n$, $n \geq 1$, зі сталими комплексними коефіцієнтами. Встановлено умови однозначної розв'язності задачі у різних функціональних просторах та побудовано її розв'язок у вигляді ряду за системою ортогональних функцій змінних $x_1, \ldots, x_p$. Для оцінок знизу малих знаменників, що виникли при побудові розв'язку задачі, використано метричний підхід. Розглянуто також частинні випадки досліджуваної задачі.

2. Основні позначення та допоміжні відомості. Далі використовуємо такі позначення: $\mathbb{Z}_+^p$ — множина точок $\mathbb{R}^p$ з цілими невід'ємними координатами; $s = (s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $|s| = s_1 + \ldots + s_p$, $\hat{s} = (s_0, s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^{p+1}$, $|\hat{s}| = s_0 + s_1 + \ldots + s_p$; $|\hat{s}|^* = 2s_0 + s_1 + \ldots + s_p$; $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$; $(0) = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{p})$; $k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $|k| = |k_1| + \ldots + |k_p|$, $\|k\| = \sqrt{k_1^2 + \ldots + k_p^2}$; $(k, x) = k_1 x_1 + \ldots + k_p x_p$; i — уявна одиниця; c_j, $j = 0, 1, 2, \ldots,$ — додатні сталі, які не залежать від $k \in \mathbb{Z}^p$; Ω^p — p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$; $D = \big\{(t, x) : t \in (0, T), x \in \Omega^p\big\}$;

$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}}^m B$ — міра Лебега в $\mathbb{R}^m$ вимірної множини $B \subset \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$;

$\mathcal{T}$ — простір скінченних тригонометричних поліномів $v\,(x) = \sum_{|k|\leq N} v_k \exp(ik, x)$, $N \in \in \mathbb{N}$, з комплексними коефіцієнтами, в якому збіжність визначається так: $v^n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{T}}{\to}} v$, якщо, починаючи з деякого номера, степені всіх поліномів v^n, $n \in \mathbb{N}$, не перевищують деякого фіксованого числа N_1 і $v_k^n \underset{n\to\infty}{\to} v_k$ для кожного k;

$\mathcal{T}'$ — простір усіх антилінійних неперервних функціоналів над $\mathcal{T}$ зі слабкою збіжністю (який збігається з простором формальних тригонометричних рядів [28] (гл. 2, § 6);

$C^r\big([0,T];\mathcal{T}\big)$ $\big(C^r([0,T];\mathcal{T}')\big)$, $r \in \mathbb{Z}_+$, — простір функцій $v(t,x) = \sum_{|k|\geq 0} v_k(t)\exp(ik,x)$, $v_k \in C^r\big([0,T]\big)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, таких, що при кожному фіксованому $t \in [0,T]$ $\partial^j v/\partial t^j \in \mathcal{T}(\mathcal{T}')$, $j \in \{0,1,\ldots,r\}$;

$H_q(\Omega^p)$, $q \in \mathbb{R}$, — гільбертів періодичний простір Соболєва порядку q на торі Ω^p, отриманий шляхом поповнення простору $\mathcal{T}$ за нормою $\|v; H_q(\Omega^p)\| := \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\big(1+|k|^2\big)^q |v_k|^2}$;

$C^r\big([0,T], H_q(\Omega^p)\big)$, $q \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, — банахів простір функцій v таких, що для кожного $t \in [0,T]$ функції $\partial^j v/\partial t^j$, $j \in \{0,1,\ldots,r\}$, належать простору $H_{q-j}\,(\Omega^p)$ та є неперервними по t у нормі цього простору;

$$\big\|v; C^r\big([0,T], H_q(\Omega^p)\big)\big\| := \sum_{j=0}^{r} \max_{0\leq t\leq T} \big\|\partial^j v/\partial t^j; H_{q-j}(\Omega^p)\big\|.$$

Наведемо формулювання деяких відомих тверджень, що використовуються у статті при дослідженні оцінок знизу малих знаменників.

Лема 1 [17, с. 15]. *Нехай функція $f(x)$ є $n+1$ раз неперервно диференційовною на відрізку $[a,b]$ і для всіх $x \in [a,b]$ виконується нерівність $|f^{(n)}(x)| \geq C_1 > 0$. Тоді міра Лебега множини тих x, для яких $|f^{(n)}(x)| < \varepsilon < C_1$, не перевищує $C_2\sqrt[n]{\varepsilon/C_1}$, де $C_2 = C_2(n)$.*

Лема 2 (Борель – Кантеллі, [29, с. 10]). *Нехай A_q, $q \in \mathbb{N}$, — послідовність вимірних множин із $\mathbb{R}^n$, причому $\sum_{q=1}^{\infty}|A_q| < \infty$. Тоді міра Лебега множини точок із $\mathbb{R}^n$, які потрапляють у нескінченну кількість множин A_q, дорівнює нулю.*

Лема 3 [17, с. 17]. *Нехай $\Phi(k) \equiv \Phi(k_1,\ldots,k_p)$ — обмежена послідовність дійсних чисел. Тоді нерівність $\left|\Phi(k) - \dfrac{la}{\|k\|^\sigma}\right| < \dfrac{1}{|k|^{p+\sigma+\varepsilon}}$, $0 < \varepsilon < 1$, $\sigma > 0$, для майже всіх (щодо міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $a > 0$ має не більш, ніж скінченну кількість розв'язків у цілих числах $l, k_1,\ldots,k_p$, $l \neq 0$, $|k| \neq 0$.*

Теорема 1 [30]. *Нехай m, n — додатні цілі числа, $f(x)$ — додатна неперервна функція, визначена при $x > c$, $x^{n-1}f^m(x)$ — монотонно спадна функція, причому $x^n f^m(x) \underset{x\to\infty}{\to} 0$. Тоді для майже всіх точок $\omega = (\omega_{jr})$, $j \in \{1,\ldots,m\}$, $r \in \{1,\ldots,n\}$, mn-вимірного евклідового простору система нерівностей*

$$|\omega_{j1}a_1 + \ldots + \omega_{jn}a_n - b_j| < f(a), \qquad a = \max_{1\leq r\leq n}|a_r|, \quad j \in \{1,\ldots,m\}, \tag{1}$$

має нескінченну кількість розв'язків у цілих числах $a_1,\ldots,a_n$, $b_1,\ldots,b_m$, якщо інтеграл

$$\int\limits_c^\infty x^{n-1} f^m(x)dx \tag{2}$$

є розбіжним; *навпаки*, *система нерівностей* (1) *має для майже всіх* ω *не більш*, *ніж скінченну кількість розв'язків у цілих числах* $a_1, \ldots, a_n,\ b_1, \ldots, b_m$, *якщо інтеграл* (2) *збігається*.

3. Формулювання задачі. В області D розглянемо задачу

$$P\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u\,(t,x) := \sum_{|\hat{s}|^* \leq 2n} A_{\hat{s}} \frac{\partial^{|\hat{s}|^*} u\,(t,x)}{\partial t^{2s_0} \partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_p^{s_p}} = 0,\ (t,x) \in D,\ A_{\hat{s}} \in \mathbb{C},\ A_{(n,0,\ldots,0)} = 1, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &\left(\partial^{2r-2} u\,(t,x) / \partial t^{2r-2}\right)\big|_{t=0} = \varphi_r(x), \\ &\left(\partial^{2r-1} u\,(t,x) / \partial t^{2r-1}\right)\big|_{t=T} = \varphi_{n+r}(x), \qquad r \in \{1, \ldots, n\}, \quad x \in \Omega^p. \end{aligned} \tag{4}$$

Вигляд області D накладає умови 2π-періодичності за змінними $x_1, \ldots, x_p$ на функції u та $\varphi_j,\ j \in \{1, \ldots, 2n\}$. Якщо $n = 1$, то умови (4) є умовами Діріхле – Неймана. Нехай $\varphi_j \in \mathcal{T}'$,

$$\varphi_j(x) = \sum_{|k| \geq 0} \varphi_{jk} \exp(ik, x), \qquad \varphi_{jk} = (2\pi)^{-p} \int\limits_{\Omega^p} \varphi_j(x) \exp(-ik, x) dx, \quad j \in \{1, \ldots, 2n\}. \tag{5}$$

Означення 1. *Розв'язком задачі* (3), (4) *з простору* $C^{2n}\big([0,T], \mathcal{T}'\big)$ *називатимемо функцію*

$$u(t,x) = \sum_{|k| \geq 0} u_k(t) \exp(ik, x) \tag{6}$$

таку, *що кожен з коефіцієнтів* $u_k(t),\ k \in \mathbb{Z}^p$, *належить простору* $C^{2n}\big([0,T]\big)$ *і справджує*, *відповідно*, *рівності*

$$P\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}, ik\right) u_k(t) := \sum_{|\hat{s}|^* \leq 2n} A_{\hat{s}} (ik_1)^{s_1} \ldots (ik_p)^{s_p} \frac{d^{2s_0} u_k\,(t)}{dt^{2s_0}} = 0, \quad t \in (0,T), \tag{7}$$

$$u_k^{(2r-2)}(0) = \varphi_{rk}, \quad u_k^{(2r-1)}(T) = \varphi_{n+r,k}, \quad r \in \{1, \ldots, n\}. \tag{8}$$

Отже, розв'язок задачі (3), (4) з простору $C^{2n}\big([0,T], \mathcal{T}'\big)$ шукаємо у вигляді ряду (6), де $u_k(t),\ k \in \mathbb{Z}^p$, є розв'язком відповідної задачі (7), (8).

Поряд з умовами (4), (8) розглядатимемо відповідні їм однорідні умови

$$\left(\partial^{2r-2} u\,(t,x) \,/\, \partial t^{2r-2}\right)\big|_{t=0} = 0, \qquad \left(\partial^{2r-1} u\,(t,x) \,/\, \partial t^{2r-1}\right)\big|_{t=T} = 0, \quad r \in \{1, \ldots, n\}, \tag{9}$$

$$u_k^{(2r-2)}\,(0) = 0, \qquad u_k^{(2r-1)}\,(T) = 0, \quad r \in \{1, \ldots, n\}. \tag{10}$$

4. Єдиність розв'язку задачі. Для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ рівнянню (7) відповідає характеристичне рівняння

$$\sum_{|\hat{s}|^* \leq 2n} A_{\hat{s}}\,(ik_1)^{s_1} \ldots (ik_p)^{s_p}\, \eta^{2s_0} = 0, \tag{11}$$

η-корені якого є такими:

$$\eta_j := \eta_j(k) = \sqrt{|\lambda_j(k)|} \exp\left(i \arg \lambda_j(k)/2\right), \qquad \eta_{n+j} := \eta_{n+j}(k) = -\eta_j(k), \quad j \in \{1, \ldots, n\}, \tag{12}$$

де $\lambda_1(k),\ldots,\lambda_n(k)$ — корені рівняння

$$P(\lambda, ik) := \sum_{|\hat{s}|^*\leq 2n} A_{\hat{s}}(ik_1)^{s_1}\ldots(ik_p)^{s_p}\lambda^{s_0} = 0. \tag{13}$$

Припустимо, що для кожного $k\in\mathbb{Z}^p$ корені $\eta_1(k),\ldots,\eta_n(k),\ -\eta_1(k),\ldots,-\eta_n(k)$ рівняння (11) є різними, а отже, відмінними від нуля; не порушуючи загальності, надалі демо вважати, що $\operatorname{Re}\,\eta_j(k)\geq 0,\ j\in\{1,\ldots,n\},\ k\in\mathbb{Z}^p$.

Рівняння (7) для кожного $k\in\mathbb{Z}^p$ має фундаментальну систему розв'язків

$$\big\{u_{kj}(t) = \exp\big(\eta_j(k)t\big),\ u_{k,n+j}(t) = \exp\big(-\eta_j(k)t\big),\ j\in\{1,\ldots,n\}\big\}.$$

Характеристичний визначник [31, с. 26] задачі (7), (8) є таким:

$$\Delta\,(k,T) = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \eta_1^2 & \ldots & \eta_n^2 & \eta_1^2 & \ldots & \eta_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \eta_1^{2(n-1)} & \ldots & \eta_n^{2(n-1)} & \eta_1^{2(n-1)} & \ldots & \eta_n^{2(n-1)} \\ & & & & & \\ \eta_1 e^{\eta_1 T} & \ldots & \eta_n e^{\eta_n T} & -\eta_1 e^{-\eta_1 T} & \ldots & -\eta_n e^{-\eta_n T} \\ \eta_1^3 e^{\eta_1 T} & \ldots & \eta_n^3 e^{\eta_n T} & -\eta_1^3 e^{-\eta_1 T} & \ldots & -\eta_n^3 e^{-\eta_n T} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \eta_1^{2n-1} e^{\eta_1 T} & \ldots & \eta_n^{2n-1} e^{\eta_n T} & -\eta_1^{2n-1} e^{-\eta_1 T} & \ldots & -\eta_n^{2n-1} e^{-\eta_n T} \end{vmatrix}.$$

Щоб обчислити характеристичний визначник $\Delta\,(k,T)$, перетворимо його, віднявши від j-го стовпця $(n+j)$-й стовпець, $j\in\{1,\ldots,n\}$, а потім застосуємо теорему Лапласа та формулу для обчислення визначника Вандермонда [32] (гл. I, § 1). Тоді отримаємо

$$\Delta(k,T) = (-1)^n \prod_{1\leq s<l\leq n}\big(\eta_l^2-\eta_s^2\big)^2 \prod_{j=1}^{n}\big((e^{\eta_j T}+e^{-\eta_j T})\eta_j\big), \quad k\in\mathbb{Z}^p. \tag{14}$$

Відомо [31, с. 16], що задача (7), (8) для кожного $k\in\mathbb{Z}^p$ не може мати два різних розв'язки тоді і лише тоді, коли $\Delta(k,T)\neq 0$.

Теорема 2. *Для єдиності розв'язку задачі* (3), (4) *у просторі* $C^{2n}\big([0,T],\mathcal{T}'\big)$ *необхідно і достатньо*, *щоб справджувались умови*

$$(\forall k\in\mathbb{Z}^p,\ \forall m\in\mathbb{Z}) \qquad i\eta_j(k)T\neq\pi\,(m+1/2)\,,\ j\in\{1,\ldots,n\}. \tag{15}$$

Доведення. *Необхідність.* Припустимо, що хоча б одна з умов (15) (нехай при $j=j_0$, $1\leq j_0\leq n$) порушується, тобто для деяких $k_0\in\mathbb{Z}^p$ та $m_0\in\mathbb{Z}$ справджується рівність $i\eta_{j_0}(k_0)T = \pi\,(m_0+1/2)$. Тоді $\Delta(k_0,T)=0$ $\big($оскільки $e^{\eta_{j_0}(k_0)T}+e^{-\eta_{j_0}(k_0)T}=0\big)$ та існують нетривіальні розв'язки задачі (3), (9) $u^0(t,x) = A\sin\big((2m_0+1)\pi t/(2T)\big)\exp(ik_0,x)$, де A — довільна стала. Тому розв'язок задачі (3), (4), якщо він існує, не буде єдиним.

Достатність. Нехай задача (3), (4) має два різних розв'язки $u_1,\ u_2$ з простору $C^{2n}\big([0,T],\mathcal{T}'\big)$. Тоді функція $u_1-u_2=\bar{u}\in C^{2n}\big([0,T],\mathcal{T}'\big)$ є розв'язком задачі (3), (9) і зображується рядом вигляду (6), в якому кожен коефіцієнт $\bar{u}_k(t),\ k \in \mathbb{Z}^p$, є розв'язком задачі (7), (10), яка для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ за умов (15) має лише тривіальний розв'язок. Таким чином, $\bar{u}_k(t) \equiv 0,\ k \in \mathbb{Z}^p$, тобто $u_{1k}(t) \equiv u_{2k}(t),\ k \in \mathbb{Z}^p$. Враховуючи, що $u_1,\ u_2 \in C^{2n}\big([0,T],\mathcal{T}'\big)$, отримуємо, що для кожного $t \in [0,T]$ функції u_1 і u_2 збігаються між собою.

Теорему доведено.

***Зауваження* 1.** Очевидно, що j-та умова, $j \in \{1,\ldots,n\}$, із (15) виконується, якщо справджується хоча б одна з таких умов

$$(\forall k \in \mathbb{Z}^p,\ \forall m \in \mathbb{Z}) \quad -\operatorname{Im}\eta_j(k)T \neq \pi\,(m+1/2) \tag{16}$$

або

$$(\forall k \in \mathbb{Z}^p) \quad \operatorname{Re}\,\eta_j(k)T \neq 0. \tag{17}$$

5. Існування розв'язку задачі.

Теорема 3. *Нехай справджуються умови* (15). *Якщо* $\varphi_j \in \mathcal{T}'(\mathcal{T}),\ j \in \{1,\ldots,2n\}$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (3), (4) *з простору* $C^{2n}\big([0,T];\mathcal{T}'\big)$ $\big(C^{2n}\big([0,T];\mathcal{T}\big)\big)$; *цей розв'язок визначає формула*

$$u(t,x) = \sum_{|k|\geq 0} u_k(t)e^{(ik,x)} :=$$

$$:= \sum_{|k|\geq 0}\sum_{q,j=1}^{n} S_{n-j}^{(q)} \frac{\varphi_{jk}\eta_q\big(e^{-\eta_q t} + e^{-2\eta_q T+\eta_q t}\big) + \varphi_{n+j,k}\big(e^{\eta_q t-\eta_q T} - e^{-\eta_q t-\eta_q T}\big)}{(-1)^{n+j}\eta_q\big(1+e^{-2\eta_q T}\big)\prod_{s=1,s\neq q}^{n}\big(\eta_q^2-\eta_s^2\big)} e^{(ik,x)}, \tag{18}$$

де $S_l^{(q)}$, $l \in \{1,\ldots,n-1\}$, *— сума всіх можливих добутків елементів* $\eta_1^2,\ldots,\eta_{q-1}^2,\ \eta_{q+1}^2,\ldots,\eta_n^2$, *по* l *у кожному добутку,* $S_0^{(q)} \equiv 1$.

Доведення теореми ґрунтується на теоремі 6.2 з [28, с. 111] (згідно з якою у просторі $\mathcal{T}'$ довільний тригонометричний ряд є збіжним) і на тому факті, що простір $\mathcal{T}$ неперервно вкладається у простір $\mathcal{T}'$ [28, с. 110]; при цьому безпосередньо перевіряється, що коефіцієнти $u_k(t)$ ряду (18) задовольняють рівності (7) і (8).

Для інших просторів, зокрема для шкали просторів $C^{2n}\big([0,T],H_q\big(\Omega^p\big)\big),\ q \in \mathbb{R}$, існування розв'язку задачі (3), (4) пов'язане, взагалі, з проблемою малих знаменників, бо модулі виразів $\eta_r(k),\ \eta_r^2(k)-\eta_s^2(k),\ 1+e^{-2\eta_r T},\ r,s \in \{1,\ldots,n\},\ r \neq s$, які входять множниками у знаменники членів ряду (18), будучи відмінними від нуля, можуть ставати як завгодно малими для нескінченної кількості векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.

Для λ-коренів рівняння (13) (див. [33, с. 101]) отримуємо оцінки

$$\big|\lambda_j(0)\big| \leq c_0, \qquad \big|\lambda_j(k)\big| \leq c_1|k|^2, \quad k \in \mathbb{Z}^p\backslash\{(0)\}, \quad j \in \{1,\ldots,n\}, \tag{19}$$

де

$$c_0 = 2\max_{s_0\in\{0,\ldots,n-1\}} \sqrt[n-s_0]{\big|A_{(s_0,0,\ldots,0)}\big|}, \qquad c_1 = 2\max_{s_0\in\{0,\ldots,n-1\}} \sqrt[n-s_0]{\sum\nolimits_{|s|\leq 2(n-s_0)}\big|A_{(s_0,s_1,\ldots s_p)}\big|}.$$

З формули (12) та оцінок (19) випливає, що

$$|\eta_j(0)| \leq \sqrt{c_0}, \qquad |\eta_j(k)| \leq \sqrt{c_1}|k|, \quad k \in \mathbb{Z}^p\backslash\{(0)\}, \quad j \in \{1,\ldots,n\}. \tag{20}$$

Теорема 4. *Нехай справджуються умови* (15) *та існують такі додатні сталі* $c_2,\ c_3,\ c_4,$ $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,$ *що для всіх векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$ *правильними є оцінки*

$$\big|\eta_r(k)\big| \geq c_2\big(1+|k|\big)^{-\alpha_1}, \quad r \in \{1,\ldots,n\}, \tag{21}$$

$$\prod_{s=1, s\neq r}^{n} \big|\eta_r^2(k)-\eta_s^2(k)\big| \geq c_3\big(1+|k|\big)^{-\alpha_2}, \quad r \in \{1,\ldots,n\}, \tag{22}$$

$$\big|1+e^{-2\eta_r(k)T}\big| \geq c_4\big(1+|k|\big)^{-\alpha_3}, \quad r \in \{1,\ldots,n\}. \tag{23}$$

Якщо $\varphi_s \in H_{\chi+q}(\Omega^p)$, $\varphi_{n+s} \in H_{\chi+\alpha_1+q}(\Omega^p)$, $s \in \{1,\ldots,n\}$, $\chi = 2n-2+\alpha_2+\alpha_3,\ q \in \mathbb{R},$ *то існує єдиний розв'язок задачі* (3), (4) *з простору* $C^{2n}\big([0,T], H_q(\Omega^p)\big)$. *Цей розв'язок задовольняє нерівність*

$$\big\|u; C^{2n}([0,T], H_q(\Omega^p))\big\| \leq c_5\left(\sum_{s=1}^{n}\|\varphi_s; H_{\chi+q}(\Omega^p)\| + + \sum_{s=n+1}^{2n}\|\varphi_s; H_{\chi+\alpha_1+q}(\Omega^p)\|\right),$$

де $c_5 = c_5(A_{\hat{s}}, |\hat{s}|^* \leq 2n; n, c_2, c_3, c_4).$

Доведення. На підставі формули (18) та оцінок (20)–(23) для кожного $k\in\mathbb{Z}^p$ отримуємо

$$\max_{0\leq t\leq T}\left|u_k^{(q)}(t)\right| \leq$$

$$\leq c_6\left(\big(1+|k|\big)^{h_1+q}\sum_{s=1}^{n}|\varphi_{sk}| + c_2^{-1}\big(1+|k|\big)^{h_2+q}\sum_{s=n+1}^{2n}|\varphi_{sk}|\right), \quad q \in \{0,1,\ldots,2n\}, \tag{24}$$

де $h_1 = 2n-2+\alpha_2+\alpha_3,\ h_2 = h_1+\alpha_1,\ c_6 = n\big(\max\{c_0,c_1\}\big)^{n-1+q/2}(c_3c_4)^{-1}.$

На підставі формули (18), оцінок (24) і того факту, що середнє арифметичне додатних чисел не перевищує їхнього середнього квадратичного, отримуємо оцінку для норми розв'язку задачі (3), (4):

$$\big\|u; C^{2n}([0,T], H_q(\Omega^p))\big\| := \sum_{r=0}^{2n}\max_{0\leq t\leq T}\sqrt{\sum_{|k|\geq 0}\left|u_k^{(r)}(t)\right|^2(1+|k|^2)^{q-r}} \leq$$

$$\leq \sum_{r=0}^{2n}\sqrt{\sum_{|k|\geq 0}c_6^2\left|\big(1+|k|\big)^{h_1+r}\sum_{s=1}^{n}|\varphi_{sk}| + c_2^{-1}\big(1+|k|\big)^{h_2+r}\sum_{s=n+1}^{2n}|\varphi_{sk}|\right|^2(1+|k|^2)^{q-r}} \leq$$

$$\leq (2n+1)\sqrt{2}c_6\left(\sqrt{\sum_{|k|\geq 0}(1+|k|^2)^{h_1+q}\left|\sum_{s=1}^{n}|\varphi_{sk}|\right|^2}+\right.$$

$$\left.+c_2^{-1}\sqrt{\sum_{|k|\geq 0}(1+|k|^2)^{h_2+q}\left|\sum_{s=n+1}^{2n}|\varphi_{sk}|\right|^2}\right) \leq$$

$$\leq (2n+1)\sqrt{2}c_6\left(\sqrt{n\sum_{|k|\geq 0}\sum_{s=1}^{n}|\varphi_{sk}|^2(1+|k|^2)^{h_1+q}}+\right.$$

$$+c_2^{-1}\sqrt{n\sum_{|k|\geq 0}\sum_{s=n+1}^{2n}|\varphi_{sk}|^2\left(1+|k|^2\right)^{h_2+q}}\Bigg) \leq$$

$$\leq c_7\left(\sum_{s=1}^{n}\sqrt{\sum_{|k|\geq 0}|\varphi_{sk}|^2(1+|k|^2)^{h_1+q}}+\sum_{s=n+1}^{2n}\sqrt{\sum_{|k|\geq 0}|\varphi_{sk}|^2(1+|k|^2)^{h_2+q}}\right)=$$

$$=c_7\left(\sum_{s=1}^{n}\left\|\varphi_s;H_{h_1+q}(\Omega^p)\right\|+\sum_{s=n+1}^{2n}\left\|\varphi_s;H_{h_2+q}(\Omega^p)\right\|\right),$$

де $c_7=c_6\sqrt{2n}(2n+1)\max\left\{1,c_2^{-1}\right\}$.

З отриманої нерівності випливає доведення теореми.

Виясними можливість виконання оцінок (21) – (23). Позначимо через $b=(b_1,\ldots,b_\beta)\in\mathbb{R}^\beta$ та $d=(d_1,\ldots,d_\beta)\in\mathbb{R}^\beta$ вектори, складені, відповідно, із дійсних та уявних частин коефіцієнтів $A_{(0,s)}$ рівняння (3), де β — кількість розв'язків у цілих невід'ємних числах нерівності s_1+ $+s_2+\ldots+s_p\leq 2n$, а через $l=(l_1,\ldots,l_\gamma)\in\mathbb{R}^\gamma$ та $h=(h_1,\ldots,h_\gamma)\in\mathbb{R}^\gamma$ вектори, складені, відповідно, із дійсних та уявних частин коефіцієнтів $A_{(s_0,s)}$ рівняння (3), де γ — кількість розв'язків у цілих невід'ємних числах нерівності $2s_0+s_1+s_2+\ldots+s_p\leq 2n$.

Лема 4. *Для майже всіх* (*щодо міри Лебега в* $\mathbb{R}^\beta$) *векторів* b *і довільного фіксованого вектора* d *або для довільного фіксованого вектора* b *і майже всіх* (*щодо міри Лебега в* $\mathbb{R}^\beta$) *векторів* d *нерівності* (21) *виконуються для всіх* (*крім скінченної кількості*) *векторів* $k\in\mathbb{Z}^p$ *при* $\alpha_1>n+p/2-1$, *причому стала* c_2 *не залежить від* T.

Доведення. Оскільки, згідно з припущенням, $|\eta_j(k)|=\sqrt{|\lambda_j(k)|}\neq 0$ для всіх $k\in\mathbb{Z}^p$, $j\in\{1,\ldots,n\}$, то і вільний член $P_0(k)$ рівняння (13) є відмінним від нуля. При цьому

$$P_0(k):=\sum_{|s|\leq 2n}A_{(0,s)}\,(ik_1)^{s_1}\ldots(ik_p)^{s_p}=(-1)^nA_{(0,2n,0,\ldots,0)}k_1^{2n}+R_0(k)=$$

$$=(-1)^n\,\mathrm{Re}\,A_{(0,2n,0,\ldots,0)}k_1^{2n}+\mathrm{Re}\,R_0(k)+$$

$$+i\left[(-1)^n\,\mathrm{Im}\,A_{(0,2n,0,\ldots,0)}k_1^{2n}+\mathrm{Im}\,R_0(k)\right],\quad k\in\mathbb{Z}^p, \tag{25}$$

де вираз $R_0(k)$ не містить коефіцієнта $A_{(0,2n,0,\ldots,0)}:=b_1+id_1$.

Покажемо спочатку, що для майже всіх (щодо міри Лебега в $\mathbb{R}^\beta$) векторів b та довільного фіксованого вектора d нерівність

$$|\mathrm{Re}\,P_0(k)|\geq\left(1+|k|\right)^{-p-\varepsilon},\quad 0<\varepsilon<1, \tag{26}$$

справджується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$. Скористаємось схемою доведення теореми 4.4 з [17, с. 61].

Позначимо через Ψ множину тих векторів b, що належать деякому паралелепіпеду $\Pi_\beta=$ $=[x_1,y_1]\times\Pi_{\beta-1}$, $\Pi_{\beta-1}=[x_2,y_2]\times\ldots\times[x_\beta,y_\beta]$, для яких нерівність

$$|\mathrm{Re}\,P_0(k)|<\left(1+|k|\right)^{-p-\varepsilon},\quad 0<\varepsilon<1, \tag{27}$$

має нескінченну кількість розв'язків $k\in\mathbb{Z}^p$, а через $\Psi_k(b_2,\ldots,b_\beta)$ — множину тих чисел $b_1\in$ $\in[x_1,y_1]$, для яких нерівність (27) справджується для фіксованого $k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{(0)\}$ та фіксованих

$b_j \in [x_j, y_j]$, $j \in \{2, \ldots, \beta\}$. Нехай $b_1 \neq 0$ і $k_1 \neq 0$, що, звичайно, не обмежує загальності. Із (25), (27) випливає, що

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^1} \Psi_k(b_2, \ldots, b_\beta) < 2\big(1 + |k|\big)^{-p-\varepsilon} |k_1|^{-2n} \leq 2\big(1 + |k|\big)^{-p-\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < 1. \tag{28}$$

Зінтегрувавши оцінку (28) по паралелепіпеду $\Pi_{\beta-1}$, отримаємо, що для міри множини $\Psi(k)$ тих векторів $b \in \Pi_\beta$, для яких виконується нерівність (27) при фіксованому k, справджується оцінка

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^\beta} \Psi(k) < 2V\big(1 + |k|\big)^{-p-\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < 1, \tag{29}$$

де V — об'єм паралелепіпеда $\Pi_{\beta-1}$. Оскільки ряд $\sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \big(1 + |k|\big)^{-p-\varepsilon}$ збігається, то з (29) і леми 2 випливає, що $\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^\beta} \Psi = 0$, тобто для майже всіх векторів $b \in \Pi_\beta$ та довільного фіксованого вектора d нерівність (26) виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.

Аналогічно доводиться, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ нерівність

$$\big| \operatorname{Im} P_0(k) \big| \geq \big(1 + |k|\big)^{-p-\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < 1, \tag{30}$$

виконується для довільного фіксованого вектора b та майже всіх $\big($щодо міри Лебега в $\mathbb{R}^\beta\big)$ векторів d. Таким чином, для майже всіх $\big($щодо міри Лебега в $\mathbb{R}^\beta\big)$ векторів b і довільного фіксованого вектора d або для довільного фіксованого вектора b і майже всіх $\big($щодо міри Лебега в $\mathbb{R}^\beta\big)$ векторів d оцінка

$$|P_0(k)| \geq \big(1 + |k|\big)^{-p-\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < 1, \tag{31}$$

справджується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.

На підставі теореми Вієта отримуємо, що корені рівняння (13) задовольняють рівності

$$|\lambda_r(k)| = \frac{|P_0(k)|}{|\lambda_1(k) \ldots \lambda_{r-1}(k)\lambda_{r+1}(k) \ldots \lambda_n(k)|}, \quad r \in \{1, \ldots, n\}. \tag{32}$$

З рівностей (32), оцінок (19), (31) та формул (12) отримуємо доведення леми.

Лема 5. *Для майже всіх* (*щодо міри Лебега в* $\mathbb{R}^\gamma$) *векторів* l *і довільного фіксованого вектора* h *або для довільного фіксованого вектора* h *і майже всіх* (*щодо міри Лебега в* $\mathbb{R}^\gamma$) *векторів* l *нерівності* (22) *виконуються для всіх* (*крім скінченної кількості*) *векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$ *при* $\alpha_2 > (n-1)(p/2 - 2)$, *причому стала* c_3 *не залежить від* T.

Доведення. Для дискримінанта $D(P)$ полінома $P := P(\lambda, ik)$ з параметром $k \in \mathbb{Z}^p$ справедливим є зображення [34, с. 265]

$$D(P) = \prod_{n \geq i > j \geq 1} \big(\lambda_i(k) - \lambda_j(k)\big)^2, \tag{33}$$

де $\lambda_r(k)$, $r \in \{1, \ldots, n\}$, — корені рівняння (13).

Аналогічно, як при доведенні теореми 4.5 із [17, с. 62], встановлюємо, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ нерівність

$$|\operatorname{Re} D(P)| \geq \big(1 + |k|\big)^{(n-1)(2n-p)-\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < 1, \tag{34}$$

виконується для довільного фіксованого вектора h та майже всіх (щодо міри Лебега в $\mathbb{R}^\gamma$) векторів l, а нерівність

$$\big|\operatorname{Im} D(P)\big| \geq \big(1+|k|\big)^{(n-1)(2n-p)-\varepsilon}, \quad 0<\varepsilon<1, \tag{35}$$

— для довільного фіксованого вектора l та майже всіх (щодо міри Лебега в $\mathbb{R}^\gamma$) векторів h. Таким чином, для майже всіх (щодо міри Лебега в $\mathbb{R}^\gamma$) векторів l і довільного фіксованого вектора h або для довільного фіксованого вектора l і майже всіх (щодо міри Лебега в $\mathbb{R}^\gamma$) векторів h оцінка

$$\big|D(P)\big| \geq \big(1+|k|\big)^{(n-1)(2n-p)-\varepsilon}, \quad 0<\varepsilon<1, \tag{36}$$

виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$.

На підставі формули (33), оцінок (19) та (36) отримуємо, що для майже всіх (щодо міри Лебега в $\mathbb{R}^\gamma$) векторів l і довільного фіксованого вектора h або для довільного фіксованого вектора l і майже всіх (щодо міри Лебега в $\mathbb{R}^\gamma$) векторів h оцінка

$$\left|\prod_{\substack{s=1,\\ s\neq r}}^{n}\big(\lambda_r(k)-\lambda_s(k)\big)\right| = \left|\frac{\prod_{n\geq i>j\geq 1}\big(\lambda_i(k)-\lambda_j(k)\big)}{\prod_{\substack{n\geq i>j\geq 1\\ i,j\neq r}}\big(\lambda_i(k)-\lambda_j(k)\big)}\right| \geq c_9\big(1+|k|\big)^{-(n-1)(p/2-2)-\varepsilon/2}, \tag{37}$$

де $0<\varepsilon<1$, $r\in\{1,\ldots,n\}$, виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$; при цьому враховано, що знаменник у формулі (37) містить $(n-1)(n-2)/2$ множників. Із оцінок (37) та формул (12) випливає доведення леми.

Лема 6. *Для майже всіх* (*щодо міри Лебега в* $\mathbb{R}$) *чисел* T *та майже всіх* (*щодо міри Лебега в* $\mathbb{R}^\beta$) *векторів* b *і довільного фіксованого вектора* d (*або для майже всіх векторів* d *і довільного фіксованого вектора* b) *нерівності* (23) *виконуються для всіх* (*крім скінченної кількості*) *векторів* $k\in\mathbb{Z}^p$ *при* $\alpha_3>\alpha_1+p$, *де* $\alpha_1>n+p/2-1$, *причому стала* c_4 *не залежить від* T *та коефіцієнтів рівняння* (3).

Доведення. Розглянемо r-ту нерівність з (23), $r\in\{1,\ldots,n\}$, і позначимо $h(T,k):=(1+ e^{-2\eta_r(k)T})$. Легко показати, що для кожного $T\in(0,+\infty)$ і кожного $k\in\mathbb{Z}^p$ справджується рівність

$$h(T,k)+\frac{\partial h(T,k)}{\partial T}\big(2\eta_r(k)\big)^{-1}=1, \tag{38}$$

з якої випливає, що

$$\max\left\{|h(T,k)|, \left|\frac{\partial h(T,k)}{\partial T}\big(2\eta_r(k)\big)^{-1}\right|\right\}\geq\frac{1}{2}, \qquad T\in(0,+\infty), \quad k\in\mathbb{Z}^p. \tag{39}$$

Розглянемо функцію

$$z(T,k):=|h(T,k)|-\left|\frac{\partial h(T,k)}{\partial T}(2\eta_r(k))^{-1}\right|, \qquad T\in(0,+\infty), \quad k\in\mathbb{Z}^p, \tag{40}$$

як функцію змінної T і параметра k, та встановимо кількість її нулів на проміжку $(0,+\infty)$. На підставі (38) і (40) отримуємо, що нулі функції z збігаються з нулями функції $z_1(T,k):= h(T,k)-\dfrac{\partial h(T,k)}{\partial T}\big(2\eta_r(k)\big)^{-1}=2e^{-2\eta_r(k)T}+1$. Зауважимо, що рівняння $2e^{-2\eta_r(k)T}+1=0$

еквівалентне системі рівнянь

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}(2\eta_r(k)T) = \ln 2, \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad k \in \mathbb{Z}^p, \\ &\mathrm{Im}(2\eta_r(k)T) = \pi + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{41}$$

Очевидно, що система (41) має відносно T розв'язок, до того ж єдиний, лише при тих значеннях векторного параметра $k \in \mathbb{Z}^p$, для яких $\mathrm{Re}\ \eta_r(k) \neq 0$, а $\dfrac{\ln 2\ \mathrm{Im}\ \eta_r(k)}{\pi\ \mathrm{Re}\ \eta_r(k)}$ є непарним цілим числом; множину таких векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ позначимо через K. Розв'язок системи (41) є додатним і має вигляд $\tilde{T}(k) = \dfrac{\ln 2}{2\,\mathrm{Re}\ \eta_r(k)}$, $k \in K$.

Розглянемо інтервал $(0, T_0]$, де $0 < T_0 < +\infty$, і введемо такі позначення: $E(T_0)$ — множина тих значень $T \in (0, T_0]$, для яких нерівність

$$|h(T,k)| < c_4\big(1 + |k|\big)^{-\alpha_3}, \quad 0 < c_4 < 1/2, \tag{42}$$

виконується для нескінченної кількості векторів $k \in \mathbb{Z}^p$; $E\left(T_0, \bar{k}\right)$ — множина тих значень $T \in (0, T_0]$, для яких нерівність (42) справджується при фіксованому $k = \bar{k} \in \mathbb{Z}^p$; $E_1(T_0, \bar{k})$ та $E_2(T_0, \bar{k})$ — множини тих значень $T \in \big(0, T_0]$, для яких нерівності $|\operatorname{Re} h(T,k)| < c_4\big(1 + |k|\big)\big)^{-\alpha_3}$ та $|\operatorname{Im} h(T,k)| < c_4\big(1 + |k|\big)^{-\alpha_3}$, відповідно, виконуються при фіксованому $k = \bar{k} \in \mathbb{Z}^p$; $K_1 = \big\{k \in K : \tilde{T}(k) \geq T_0\big\}$; $K_2 = (\mathbb{Z}^p \backslash K) \bigcup K_1$.

Якщо $\bar{k} \in K_2$, то на інтервалі $(0, T_0]$ функція z не має нулів. Позначимо $K_3 = \big\{k \in K_2 : z(T,k) > 0, T \in (0, T_0]\big\}$. Якщо $\bar{k} \in K_3$, то на підставі (39), (40) отримуємо

$$\big|h(T,\bar{k})\big| \geq \frac{1}{2}, \quad T \in (0, T_0]. \tag{43}$$

Таким чином,

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}}(E(T_0, \bar{k})) = 0, \quad \bar{k} \in K_3. \tag{44}$$

Якщо $\bar{k} \in K_2 \backslash K_3$, то $z(T, \bar{k}) < 0$ для всіх $T \in (0, T_0]$. Тоді на підставі (39), (40) одержуємо, що

$$\left|\frac{\partial h(T,\bar{k})}{\partial T}\right| \geq \left|\eta_r(\bar{k})\right|, \qquad T \in (0, T_0], \quad \bar{k} \in K_2 \backslash K_3. \tag{45}$$

З оцінки (45) та леми 4 випливає, що для майже всіх $\big($щодо міри Лебега в $\mathbb{R}^\beta\big)$ векторів b і довільного фіксованого вектора d (або для майже всіх векторів d і довільного фіксованого вектора b) для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\bar{k}$ справджується одна з нерівностей

$$\left|\frac{\partial}{\partial T}\big(\operatorname{Re} h(T,\bar{k})\big)\right| \geq \frac{c_2}{\sqrt{2}}\big(1+|\bar{k}|\big)^{-\alpha_1}, \qquad \left|\frac{\partial}{\partial T}\big(\operatorname{Im} h(T,\bar{k})\big)\right| \geq \frac{c_2}{\sqrt{2}}\big(1+|\bar{k}|\big)^{-\alpha_1}, \tag{46}$$

де $T \in (0, T_0]$, $\bar{k} \in K_2 \backslash K_3$. Згідно з лемою 1, на підставі оцінок (46), отримуємо, що для майже всіх (щодо міри Лебега в $\mathbb{R}^\beta$) векторів b і довільного фіксованого вектора d (або для майже всіх векторів d і довільного фіксованого вектора b) для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\bar{k}$ справджується одна з нерівностей

$$\begin{gathered}\operatorname{mes}_{\mathbb{R}} E_1(T_0,\bar{k}) \leq c_{10}\bigl(1+|\bar{k}|\bigr)^{-(\alpha_3-\alpha_1)},\\ \operatorname{mes}_{\mathbb{R}} E_2(T_0,\bar{k}) \leq c_{10}\bigl(1+|\bar{k}|\bigr)^{-(\alpha_3-\alpha_1)}, \quad \bar{k}\in K_2\backslash K_3.\end{gathered} \tag{47}$$

Оскільки

$$E(T_0,\bar{k}) \subset E_1(T_0,\bar{k}), \qquad E(T_0,\bar{k}) \subset E_2(T_0,\bar{k}), \quad \bar{k}\in K_2\backslash K_3, \tag{48}$$

то на підставі нерівностей (47) отримуємо

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}} E(T_0,\bar{k}) \leq c_{10}\bigl(1+|\bar{k}|\bigr)^{-(\alpha_3-\alpha_1)}, \quad \bar{k}\in K_2\backslash K_3. \tag{49}$$

Із (44) і (49) випливає, що для майже всіх (щодо міри Лебега в $\mathbb{R}^\beta$) векторів b і довільного фіксованого вектора d (або для майже всіх векторів d і довільного фіксованого вектора b) для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\bar{k}$, $\bar{k}\in K_2$ виконується оцінка

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}} E(T_0,\bar{k}) \leq c_{10}\bigl(1+|\bar{k}|\bigr)^{-(\alpha_3-\alpha_1)}, \quad \bar{k}\in K_2. \tag{50}$$

Якщо $\bar{k}\in K\backslash K_1$, тобто функція z має один нуль $T=\tilde{T}(\bar{k})$, що належить інтервалу $(0,T_0]$, то інтервал $(0,T_0]$ розбиваємо на інтервали $J_1=(0,\tilde{T}(\bar{k}))$ і $J_2=(\tilde{T}(\bar{k}),T_0]$. На кожному з них функція z не має нулів. Провівши на кожному з інтервалів J_1 і J_2 викладки, аналогічні наведеним вище, отримуємо, що для майже всіх $\bigl($щодо міри Лебега в $\mathbb{R}^\beta\bigr)$ векторів b і довільного фіксованого вектора d (або для майже всіх векторів d і довільного фіксованого вектора b) для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\bar{k}$, $\bar{k}\in K\backslash K_1$, справджується оцінка

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}} E(T_0,\bar{k}) \leq 2c_{10}\bigl(1+|\bar{k}|\bigr)^{-(\alpha_3-\alpha_1)}, \quad \bar{k}\in K\backslash K_1. \tag{51}$$

Підсумовуючи оцінки (50) і (51) по $k\in K_2$ і $k\in K\backslash K_1$ відповідно, отримуємо

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\operatorname{mes}_{\mathbb{R}} E(T_0,k) \leq c_{11}\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\bigl(1+|k|\bigr)^{-(\alpha_3-\alpha_1)}. \tag{52}$$

Якщо $\alpha_3-\alpha_1>p$, тобто якщо $\alpha_3>\alpha_1+p$, то ряд у правій частині нерівності (52) є збіжним, тому

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\operatorname{mes}_{\mathbb{R}} E(T_0,k) < \infty. \tag{53}$$

Із (53) та леми 2 випливає, що $\operatorname{mes}_{\mathbb{R}} E(T_0)=0$, тобто для майже всіх $T\in(0,T_0]$ та майже всіх (щодо міри Лебега в $\mathbb{R}^\beta$) векторів b і довільного фіксованого вектора d (або для майже всіх векторів d і довільного фіксованого вектора b) виконується нерівність, протилежна до нерівності (42), для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$. Враховуючи той факт, що проміжок $(0,+\infty)$ можна покрити зліченною кількістю інтервалів довжиною T_0, отримуємо доведення леми.

Із теореми 4 та лем 4 – 6 випливає наступне твердження.

Теорема 5. *Якщо* $\varphi_s\in H_{q+\chi}(\Omega^p)$, $\varphi_{n+s}\in H_{q+\chi+p/2+n-1}(\Omega^p)$, $\chi>(pn)/2+n+p-1$, $q\in\mathbb{R}$, $s\in\{1,\ldots,n\}$, *то, за умов* (15) *для майже всіх* (*щодо міри Лебега в* $\mathbb{R}$) *чисел* T *та майже всіх коефіцієнтів рівняння* (3) *у просторі* $C^{2n}\bigl([0,T],H_q(\Omega^p)\bigr)$ *існує єдиний розв'язок задачі* (3), (4); *цей розв'язок задовольняє нерівність*

$$\bigl\|u;C^{2n}([0,T],H_q(\Omega^p))\bigr\| \leq c_{12}\left(\sum_{s=1}^{n}\|\varphi_s;H_{q+\chi}(\Omega^p)\| + \sum_{s=n+1}^{2n}\|\varphi_s;H_{q+\chi+p/2+n-1}(\Omega^p)\|\right).$$

6. Частинні випадки задачі (3), (4). Наведемо частинні випадки рівняння (3) (порядку $2n$), для яких отримано кращі оцінки знизу малих знаменників (починаючи з деякого номера n), ніж у лемах 4 і 5, а отже, і слабші умови на вихідні дані у теоремах існування розв'язку задачі (3), (4) зі шкали просторів $C^{2n}\big([0,T], H_q(\Omega^p)\big),\ q \in \mathbb{R}$.

6.1. Рівняння з факторизованим оператором. Розглянемо задачу з умовами (4) для рівняння

$$\prod_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\sum_{s=1}^{p} a_{js}\frac{\partial}{\partial x_s} + b_j\right)^2\right] u\,(t,x) = 0, \qquad (t,x) \in D, \quad a_{js}, b_j \in \mathbb{C}. \tag{54}$$

Позначимо

$$a_{js}^{(1)} = \operatorname{Re} a_{js}, \quad a_{js}^{(2)} = \operatorname{Im} a_{js}, \quad b_j^{(1)} = \operatorname{Re} b_j, \quad b_j^{(2)} = \operatorname{Im} b_j, \quad j \in \{1,\ldots,n\}, \quad s \in \{1,\ldots,p\},$$

$$\bar{a}_1 = \Big(a_{11}^{(1)}/b_1^{(2)},\ldots,a_{1p}^{(1)}/b_1^{(2)},\ a_{21}^{(1)}/b_2^{(2)},\ldots,a_{2p}^{(1)}/b_2^{(2)},\ldots,a_{n1}^{(1)}/b_n^{(2)},\ldots,a_{np}^{(1)}/b_n^{(2)}\Big),$$

$$\bar{a}_2 = \Big(a_{11}^{(2)}/b_1^{(1)},\ldots,a_{1p}^{(2)}/b_1^{(1)}, a_{21}^{(2)}/b_2^{(1)},\ldots,a_{2p}^{(2)}/b_2^{(1)},\ldots,a_{n1}^{(2)}/b_n^{(1)},\ldots,a_{np}^{(2)}/b_n^{(1)}\Big).$$

Із теореми 2 випливає наступне твердження.

***Наслідок* 1.** *Для єдиності розв'язку задачі* (4), (54) *у просторі* $C^{2n}\left([0,T], \mathcal{T}'\right)$ *необхідно і достатньо, щоб справджувались умови*

$$(\forall k \in \mathbb{Z}^p,\ \forall m \in \mathbb{Z}) \quad b_j + i\sum_{s=1}^{p} a_{js}k_s \neq i\pi\left(m + 1/2\right)/T, \quad j \in \{1,\ldots,n\}. \tag{55}$$

Очевидно, що j-та умова, $j \in \{1,\ldots,n\}$, із (55) виконується, якщо справджується хоча б одна з умов

$$(\forall k \in \mathbb{Z}^p,\ \forall m \in \mathbb{Z}) \quad b_j^{(2)} + \sum_{s=1}^{p} a_{js}^{(1)}k_s \neq \pi\left(m + 1/2\right)/T \tag{56}$$

або

$$(\forall k \in \mathbb{Z}^p) \quad b_j^{(1)} - \sum_{s=1}^{p} a_{js}^{(2)}k_s \neq 0. \tag{57}$$

Для задачі (4), (54) (за умов (55)) є справедливими теореми 3, 4, у яких слід $\eta_j(k)$ замінити на $\eta_j^*(k) := b_j + i\sum_{s=1}^{p} a_{js}k_s,\ j \in \{1,\ldots,n\}$, а також наступні леми.

Лема 7. *Для довільного фіксованого вектора $\bar{a}_1$ для майже всіх* (*щодо міри Лебега в* $\mathbb{R}^{np}$) *векторів $\bar{a}_2$ або для довільного фіксованого вектора $\bar{a}_2$ та для майже всіх* (*щодо міри Лебега в* $\mathbb{R}^{np}$) *векторів $\bar{a}_1$ нерівності*

$$\left|b_j + i\sum_{s=1}^{p} a_{js}k_s\right| \geq c_{13}\big(1 + |k|\big)^{-\alpha_1}, \quad j \in \{1,\ldots,n\}, \tag{58}$$

виконуються для всіх (*крім скінченної кількості*) *векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ при $\alpha_1 > p/n$, причому стала c_{13} не залежить від T та коефіцієнтів рівняння* (54).

Доведення. Очевидно, що

$$|\eta_j^*(k)| \geq |\operatorname{Re}\, \eta_j^*(k)| = \left|b_j^{(1)}\right| \left|\frac{a_{j1}^{(2)}}{b_j^{(1)}}k_1 + \ldots + \frac{a_{jp}^{(2)}}{b_j^{(1)}}k_p - 1\right|,$$

$$\left|\eta_j^*(k)\right| \geq \left|\operatorname{Im}\, \eta_j^*(k)\right| = \left|b_j^{(2)}\right| \left|\frac{a_{j1}^{(1)}}{b_j^{(2)}}k_1 + \ldots + \frac{a_{jp}^{(1)}}{b_j^{(2)}}k_p + 1\right|, \quad j \in \{1, \ldots, n\}.$$

На підставі теореми 1, враховуючи збіжність інтеграла $\displaystyle\int_c^\infty x^{p-1}\,(1+x)^{-\alpha_1 n}\,dx$ при $\alpha_1 > p/n$, отримуємо, що для майже всіх векторів $\bar{a}_1 \in \mathbb{R}^{np}$ $(\bar{a}_2 \in \mathbb{R}^{np})$ система нерівностей

$\left|\operatorname{Re}\, \eta_j^*(k)\right| \geq c_{14}\bigl(1+|k|\bigr)^{-\alpha_1}$ $\quad \bigl(|\operatorname{Im}\, \eta_j^*(k)| \geq c_{14}\bigl(1+|k|\bigr)^{-\alpha_1}\bigr), \quad j\in\{1,\ldots,n\}, \quad c_{14} = c_{14}(p,n),$ справджується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ при $\alpha_1 > p/n$.

Отже, нерівності (58) виконуються для довільного фіксованого вектора $\bar{a}_2$ та майже всіх (щодо міри Лебега в $\mathbb{R}^{np}$) векторів $\bar{a}_1$ або для довільного фіксованого вектора $\bar{a}_1$ та майже всіх (щодо міри Лебега в $\mathbb{R}^{np}$) векторів $\bar{a}_2$ для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ при $\alpha_1 > p/n$.

Лему доведено.

Очевидно, що оцінка параметра α_1 в лемі 7 краща, ніж у лемі 4, при $n \geq 2$.

Лема 8. *Для довільного фіксованого вектора $\bar{a}_2$ та для майже всіх $\bigl($щодо міри Лебега в $\mathbb{R}^{(n-1)p}\bigr)$ векторів $\bar{a}_1$ або для довільного фіксованого вектора $\bar{a}_1$ та для майже всіх $\bigl($стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^{(n-1)p}\bigr)$ векторів $\bar{a}_2$ нерівності*

$$\prod_{\substack{j=1,\\ j\neq m}}^{n} \left|(\eta_j^*(k))^2 - (\eta_m^*(k))^2\right| =$$

$$= \prod_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{n} \left|\left(b_j - b_m + i\sum_{s=1}^{p}(a_{js} - a_{ms})\,k_s\right)\left(b_j + b_m + i\sum_{s=1}^{p}(a_{js} + a_{ms})\,k_s\right)\right| \geq$$

$$\geq c_{15}\bigl(1+|k|\bigr)^{-\alpha_2}, \quad m \in \{1, \ldots, n\}, \tag{59}$$

виконуються для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ при $\alpha_2 > 2p$, причому стала c_{15} не залежить від T та коефіцієнтів рівняння (54).

Доведення проводиться за схемою доведення леми 7.

Зауважимо, що оцінка параметра α_2 в лемі 8 краща, ніж у лемі 5, при $n \geq 6$ і $p > 4(n-1)(n-5)^{-1}$.

Лема 9. *Для майже всіх $\bigl($щодо міри Лебега в $\mathbb{R}\bigr)$ чисел T та майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^{np)}\bigr)$ векторів $\bar{a}_1$ і довільного фіксованого вектора $\bar{a}_2$ або для майже всіх $\bigl($щодо міри Лебега в $\mathbb{R}^{np)}\bigr)$ векторів $\bar{a}_2$ і довільного фіксованого вектора $\bar{a}_1$ нерівності*

$$\left|1 + \exp\left[-2T\left(b_j + i\sum_{s=1}^{p} a_{js}k_s\right)\right]\right| \geq c_{16}\bigl(1+|k|\bigr)^{-\alpha_3}, \quad q \in \{1, \ldots, n\}, \tag{60}$$

виконуються для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ при $\alpha_3 > \alpha_1 + p$, де $\alpha_1 > p/n$, причому стала c_{16} не залежить від T та коефіцієнтів рівняння (54).

Доведення проводиться за схемою доведення леми 6 з використанням леми 7.

Легко бачити, що оцінка параметра α_3 в лемі 9 краща, ніж у лемі 6, при $n \geq 2$.

Твердження 1. *Нехай справджуються умови* (55). *Якщо функції* $\varphi_s \in H_{q+\chi}(\Omega^p)$, $\varphi_{n+s} \in H_{q+\chi+p/n}(\Omega^p)$, $q \in \mathbb{R}$, $\chi > 2n+3p+p/n-2$, $s \in \{1,\ldots,n\}$, *то для майже всіх* $\big($*щодо міри Лебега в* $\mathbb{R}\big)$ *чисел* T *та майже всіх коефіцієнтів рівняння* (54) *у просторі* $C^{2n}([0,T], H_q(\Omega^p))$ *існує єдиний розв'язок задачі* (4), (54). *Цей розв'язок задовольняє нерівність*

$$\left\|u; C^{2n}\big([0,T], H_q(\Omega^p)\big)\right\| \leq c_{17}\left(\sum\nolimits_{s=1}^{n}\|\varphi_s; H_{q+\chi}(\Omega^p)\| + \sum_{s=n+1}^{2n}\left\|\varphi_s; H_{q+\chi+p/n}(\Omega^p)\right\|\right).$$

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 4 з використанням лем 7 – 9.

Зауважимо, що умови на функції $\varphi_j,\ j \in \{1,\ldots,n\}$, у твердженні 1 є слабшими, ніж у теоремі 5, при $n \geq 5$ і $p > 2n(n-1)(n^2-4n-2)^{-1}$, а на функції $\varphi_{n+j},\ j \in \{1,\ldots,n\}$, — при $n \geq 5$ і довільному $p \in \mathbb{N}$.

6.2. Рівняння, гіперболічне за Гордінгом. Розглянемо задачу (3), (4), коли рівняння (3) є гіперболічним за Гордінгом [35]. Тоді, згідно з припущенням із п. 4, корені $\eta_j(k)$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, рівняння (11) задовольняють оцінки

$$0 \leq \operatorname{Re}\,\eta_j(k) \leq H, \quad j \in \{1,\ldots,n\}, \quad k \in \mathbb{Z}^p. \tag{61}$$

У цьому випадку справджуться теореми 1 – 3 та леми 4, 5, а також наступна лема.

Лема 10. *Для майже всіх* (*щодо міри Лебега в* $\mathbb{R}$) *чисел* T *та фіксованих коефіцієнтів гіперболічного за Гордінгом рівняння* (3) *нерівності* (23) *виконуються для всіх* (*крім скінченної кількості*) *векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$ *при* $\alpha_3 > p$, *причому стала* c_4 *не залежить від коефіцієнтів рівняння.*

Доведення. На підставі оцінок (61) отримуємо

$$\left|1 + e^{-2\eta_j(k)T}\right| \geq e^{-HT}\left|e^{\eta_j(k)T} + e^{-\eta_j(k)T}\right|, \quad j \in \{1,\ldots,n\}. \tag{62}$$

Легко показати, що для кожного $j \in \{1,\ldots,n\}$

$$\left|e^{\eta_j(k)T} + e^{-\eta_j(k)T}\right| = \sqrt{\left(\exp\left(T\operatorname{Re}\,\eta_j(k)\right) - \exp\left(-T\operatorname{Re}\,\eta_j(k)\right)\right)^2 + 4\cos^2\left(T\operatorname{Im}\,\eta_j(k)\right)}. \tag{63}$$

Якщо виконується умова (16), то з формули (63), враховуючи елементарну нерівність $\sin x \geq 2x/\pi$, $x \in [0,\pi/2]$, для кожного $j \in \{1,\ldots,n\}$ отримуємо оцінку

$$\left|e^{\eta_j(k)T} + e^{-\eta_j(k)T}\right| > 2\left|\cos\left(T\operatorname{Im}\,\eta_j(k)\right)\right| = 2\left|\sin\left|T\operatorname{Im}\,\eta_j(k) - \pi/2 - m_j(k)\pi\right|\right| \geq$$
$$\geq 2T|k|\left|\frac{2\operatorname{Im}\,\eta_j(k)}{\pi|k|} - \frac{(2m_j(k)+1)/T}{|k|}\right|, \tag{64}$$

де $m_j(k) \in \mathbb{Z}$ таке, що $|T\operatorname{Im}\,\eta_j(k) - \pi/2 - m_j(k)\pi| \leq \pi/2$. На підставі оцінок (20) для кожного $j \in \{1,\ldots,n\}$ послідовність $\Phi_j(k) = \dfrac{2\operatorname{Im}\,\eta_j(k)}{\pi|k|}$ є обмеженою. Тому на підставі леми 3 для майже всіх (щодо міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $1/T$ нерівності

$$\left|\frac{2\operatorname{Im}\,\eta_j(k)}{\pi|k|} - \frac{(2m_j(k)+1)/T}{|k|}\right| \geq \frac{1}{|k|^{p+1+\varepsilon}}, \qquad j \in \{1,\ldots,n\}, \quad 0 < \varepsilon < 1, \tag{65}$$

справджуються для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.

Враховуючи (64), (65) та неперервність функції $y(T) = 1/T$ при $T > 0$, отримуємо, що нерівності

$$\left| e^{\eta_j(k)T} + e^{-\eta_j(k)T} \right| \geq 2T\big(1+|k|\big)^{-(p+\varepsilon)}, \qquad j \in \{1,\ldots,n\}, \quad 0<\varepsilon<1, \tag{66}$$

справджуються для майже всіх (щодо міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.

Множина чисел T, для яких умова (16) не справджується, є зліченною множиною, і її міра Лебега дорівнює нулеві.

Із викладеного вище та оцінок (62), (66) випливає доведення леми.

Очевидно, що оцінка параметра α_3 в лемі 10 краща, ніж у лемі 6, для довільних n і p із $\mathbb{N}$.

Твердження 2. *Нехай рівняння* (3) *є гіперболічним за Гордінгом і справджуються умови* (15). *Якщо* $\varphi_s \in H_{q+\chi}(\Omega^p)$, $\varphi_{n+s} \in H_{q+\chi+p/2+n-1}(\Omega^p)$, $q \in \mathbb{R}$, $\chi > 2(n-1)+p/2(n+1)$, $s \in \{1,\ldots,n\}$, *то для майже всіх* $\big($*щодо міри Лебега в* $\mathbb{R}\big)$ *чисел* T *та майже всіх коефіцієнтів рівняння* (3) *у просторі* $C^{2n}\big([0,T], H_q(\Omega^p)\big)$ *існує єдиний розв'язок задачі* (3), (4). *Цей розв'язок задовольняє нерівність*

$$\big\|u; C^{2n}([0,T], H_q(\Omega^p))\big\| \leq c_{18}\left(\sum_{s=1}^{n}\|\varphi_s; H_{q+\chi}(\Omega^p)\| + \sum_{s=n+1}^{2n}\big\|\varphi_s; H_{q+\chi+p/2+n-1}(\Omega^p)\big\|\right).$$

Останнє твердження є безпосереднім наслідком теореми 4 та лем 4, 5 і 10. Зазначимо, що у ньому умови на функції φ_j, $j \in \{1,\ldots,2n\}$, є слабшими, ніж у теоремі 5.

6.3. Рівняння, строго гіперболічне за Петровським. Розглянемо задачу з умовами (4) для рівняння

$$\sum_{|\hat{s}|^*=2n} A_{\hat{s}} \frac{\partial^{2n} u(t,x)}{\partial t^{2s_0}\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_p^{s_p}} = 0, \qquad (t,x)\in D, \quad A_{\hat{s}} \in \mathbb{R}, \quad A_{(n,0,\ldots,0)} = 1. \tag{67}$$

Припустимо, що рівняння (67) є строго гіперболічним за Петровським [36] (§ 16, п. 6), тобто для довільного дійсного $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_p)$ всі корені $\mu(\xi)$ рівняння

$$\sum_{|\hat{s}|^*=2n} A_{\hat{s}} \mu^{2s_0}\xi_1^{s_1}\ldots\xi_p^{s_p} = 0 \tag{68}$$

є дійсними і різними. З вигляду рівняння (68) видно, що всі його корені $\mu(\xi)$ є відмінними від нуля для довільного $\xi \neq (0)$.

Розв'язок задачі (4), (67) з простору $C^{2n}\left([0,T], \mathcal{T}'\right)$ шукаємо у вигляді ряду (6), при цьому кожна з функцій $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, є розв'язком задачі з умовами (8) для рівняння

$$\sum_{|\hat{s}|^*=2n} A_{\hat{s}}\,(ik_1)^{s_1}\ldots(ik_p)^{s_p}\,\frac{d^{2s_0}u_k(t)}{dt^{2s_0}} = 0, \quad t \in (0,T). \tag{69}$$

Якщо $k=(0)$, то рівняння (69) має вигляд $\dfrac{d^{2n}u_k(t)}{dt^{2n}} = 0$, а його фундаментальна система розв'язків є такою: $\big\{u_{0j}(t) = t^{j-1},\ j \in \{1,\ldots,2n\}\big\}$. При цьому характеристичний визначник задачі (8), (69) обчислюється за формулою $\Delta(0,T) = 1!2!\ldots(2n-1)!$.

Якщо $k \neq (0)$, то рівняння (69) має фундаментальну систему розв'язків

$$\left\{u_{kj}(t) = \exp(\eta_j(k)t), u_{k,n+j}(t) = \exp(-\eta_j(k)t), j \in \{1,\ldots,n\}\right\},$$

де $\eta_j(k) = i\|k\|\mu_j(k),\ j \in \{1,\ldots,n\};\ \mu_j(k),\ j \in \{1,\ldots,n\}$, — додатні корені рівняння

$$\sum_{|\hat{s}|^*=2n} A_{\hat{s}} \left(\frac{k_1}{||k||}\right)^{s_1} \ldots \left(\frac{k_p}{||k||}\right)^{s_p} \mu^{2s_0} = 0, \tag{70}$$

які є обмеженими як функції аргументу $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}$ і справджують оцінки

$$c_{19} \leq \mu_r(k) \leq c_{20}, \quad c_{21} \leq |\mu_s^2(k) - \mu_r^2(k)| \leq c_{22},$$
$$s, r \in \{1,\ldots,n\}, \quad s \neq r, \quad k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}. \tag{71}$$

Покладаючи у формулі (14) $\eta_j(k) = i\|k\|\mu_j(k),\ j \in \{1,\ldots,n\}$, отримуємо формулу для обчислення характеристичного визначника задачі (8), (69) при $k \neq (0)$:

$$\Delta(k,T) = (-2i)^n ||k||^{2n^2-n} \prod_{1\leq s<t\leq n} \left(\mu_s^2(k) - \mu_t^2(k)\right)^2 \prod_{j=1}^{n} (\mu_j(k) \cos(||k||\, \mu_j(k)T)), \quad k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}.$$

З викладеного вище та теореми 2 випливає, що для єдиності розв'язку задачі (4), (67) у просторі $C^{2n}([0,T], \mathcal{T}')$ необхідно і достатньо, щоб виконувались умови

$$(\forall k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\},\ \forall m \in \mathbb{Z}_+) \quad ||k||\, \mu_j(k) \neq \frac{\pi}{T}(m + 1/2), \quad j \in \{1,\ldots,n\}. \tag{72}$$

Якщо $\varphi_j \in \mathcal{T}',\ j \in \{1,\ldots,2n\}$, то за умов (72) розв'язок задачі (4), (67) із простору $C^{2n}([0,T], \mathcal{T}')$ зображується у вигляді ряду

$$u(t,x) = u_0(t) +$$
$$+ \sum_{|k|>0} \sum_{r,j=1}^{n} \frac{S_{n-j}^{(r)} \left[\varphi_{jk}\, ||k||\, \mu_r(k) \cos(||k||\, \mu_r(k)\,(T-t)) - \varphi_{n+j,k} \sin(||k||\, \mu_r(k)t)\right]}{(-1)^{n+j}\, ||k||\, \mu_r(k) \cos(||k||\, \mu_{rr}(k)T) \prod_{s=1, s\neq r}^{n} (\mu_s^2(k) - \mu_r^2(k))} e^{(ik,x)}, \tag{73}$$

де $u_0(t)$ — розв'язок задачі (8), (69) при $k = (0)$, який є многочленом степеня $(2n-1)$; $S_l^{(r)}$, $l \in \{1,\ldots,n-1\}$, — сума всіх можливих добутків елементів $\mu_1^2(k),\ldots,\mu_{r-1}^2(k),\ \mu_{r+1}^2(k),\ldots$ $\ldots,\mu_n^2(k)$, по l у кожному добутку, $S_0^{(q)} \equiv 1$. Зауважимо, що формально формула (73) є наслідком формули (18).

На підставі елементарної нерівності $\sin x \geq 2x/\pi,\ x \in [0,\pi/2]$, для кожного $r \in \{1,\ldots,n\}$ отримуємо оцінку

$$|\cos(\|k\|\mu_r(k)T)| = |\sin|\|k\|\mu_r(k)T - \pi/2 - m_r(k)\pi|| \geq$$
$$\geq T\|k\| \left|\frac{\mu_r(k)}{\pi} - \frac{(2m_r(k)+1)/T}{\|k\|}\right|, \tag{74}$$

де $m_r(k) \in \mathbb{Z}$ таке, що $|\|k\|\mu_r(k)T - \pi/2 - m_r(k)\pi| \leq \pi/2$.

Із (74), враховуючи неперервність функції $y(T) = 1/T$ при $T > 0$ та обмеженість $\mu_r(k)$, $r \in \{1,\ldots,n\}$, як функцій аргументу $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}$, на підставі леми 3 отримуємо, що для майже всіх (щодо міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T нерівності

$$|\cos(||k||\,\mu_r(k)T)| \geq T\,|k|^{-p-\varepsilon}, \quad r \in \{1,\ldots,n\}, \quad 0<\varepsilon<1, \tag{75}$$

виконуються для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}$.

На підставі формули (73), оцінок (71) та (75) отримуємо наступне твердження.

Твердження 3. *Нехай справджуються умови* (72). *Якщо* $\varphi_s \in H_\chi(\Omega^p)$, $\varphi_{n+s} \in H_{\chi-1}(\Omega^p)$, $\chi > q+p$, $q \in \mathbb{R}$, $s \in \{1,\ldots,n\}$, *то для майже всіх* $\big($*щодо міри Лебега в* $\mathbb{R}\big)$ *чисел* T *та фіксованих коефіцієнтів строго гіперболічного за Петровським рівняння* (67) *у просторі* $C^{2n}\big([0,T], H_q(\Omega^p)\big)$ *існує єдиний розв'язок задачі* (4), (67). *Цей розв'язок задовольняє нерівність*

$$\left\|u; C^{2n}\left([0,T], H_q\left(\Omega^p\right)\right)\right\| \leq c_{23}\left(\sum_{s=1}^{n}\|\varphi_s; H_\chi(\Omega^p)\| + \sum_{s=n+1}^{2n}\|\varphi_s; H_{\chi-1}(\Omega^p)\|\right).$$

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 4.

Результати роботи можна поширити на випадок, коли задача (3), (4) розглядається в області $[0,T]\times\mathbb{R}^p$, а її розв'язок шукають у класі функцій, майже періодичних за змінними $x_1,\ldots,x_p$.

Література

1. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. – М.: Изд-во иностр., лит., 1962. – 104 с.
2. *Агранович М. С.* К теории задач Дирихле и Неймана для линейных сильно эллиптических систем в липшицевых областях // Функцион. анализ и его прил. – 2007. – **41**, № 4. – С. 1 – 21.
3. *Бурский В. П.* Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 2002. – 315 с.
4. *Вишик М. И.* Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1952. – **1**. – С. 187 – 246.
5. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. – М.: Наука, 1989. – 464 с.
6. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1967. – **16**. – С. 209 – 292.
7. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1973. – 576 с.
8. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. – М.: Изд-во иностр., лит., 1957. – 256 с.
9. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1976. – 391 с.
10. *Sybil Yu.* The mixed Dirichlet-Neumann problem for the elliptic equation of the second order in domain with thin inclusion // J. Numer. and Appl. Math. – 2012. – **109**, № 3. – P. 133 – 138.
11. *Yuanyuan Li, Bernhard Ruf, Qianqiao Guo, Pengcheng Niu.* Positive solutions for singular elliptic equations with mixed Dirichlet – Neumann boundary conditions // Math. Nachr. – 2013. – P. 1 – 24. / DOI 10.1002/mana.201100351
12. *Білусяк Н. І., Комарницька Л. І., Пташник Б. Й.* Задача типу Діріхле для систем рівнянь із частинними похідними, нерозв'язних відносно старшої похідної за часом // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 12. – С. 1592 – 1602.
13. *Білусяк Н. І., Пташник Б. Й.* Крайова задача для слабко нелінійних рівнянь із нерозв'язною відносно старшої похідної лінійною частиною // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48**, № 3. – С. 7 – 15.
14. *Бобик І. О., Симотюк М. М.* Задача з двома кратними вузлами для лінійних факторизованих рівнянь з частинними похідними // Вісн. Нац. ун-ту „Львів. політехніка". Фіз.-мат. науки. – 2010. – Вип. 687. – С. 11 – 19.
15. *Мельник О. М., Миколик А. Д., Пташник Б. Й.* Задача типу Діріхле для неізотропних рівнянь із частинними похідними // Вісн. Нац. ун-ту „Львів. політехніка". Фіз.-мат. науки. – 2000. – Вип. 211. – С. 248 – 253.

16. *Павленко В. Н., Петраш Т. А.* Периодические решения уравнения колебаний струны с граничными условиями Неймана и Дирихле и разрывной нелинейностью // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2012. – **18**, № 2. – С. 199 – 204.
17. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
18. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 416 с.
19. *Пташник Б. Й., Репетило С. М.* Задача Діріхле – Неймана у смузі для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56**, № 3. – С. 15 – 28.
20. *Пташник Б. Й., Репетило С. М.* Задача Діріхле – Неймана для лінійних нееліптичних рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Доп. НАН України. – 2015. – № 2. – С. 24 – 31.
21. *Gentile G., Mastropietro V., Procesi M.* Periodic solutions for completely resonant nonlinear wave equations with Dirichlet boundary conditions // Communs Math. Phys. – 2005. – **256**, № 2. – P. 437 – 490.
22. *Kengne E.* Nonlocal boundary value-problem for partial differential equations with variable coefficients // Focus Afr. Diaspora math. – 2008. – P. 97 – 108.
23. *Kilbas A. A., Repin O. A.* Solvability of a boundary value problem for a mixed-type equation with a partial Riemann – Liouville fractional derivative // Different. Equat. – 2010. – **46**, № 10. – P. 1457 – 1464.
24. *Rebbani F., Boussetila N., Zouyed F.* Boundary value problem for a partial differential equation with non-local boundary conditions // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2001. – **10**. – С. 122 – 125.
25. *Rudakov I. A.* A nontrivial periodic solution of the nonlinear wave equation with homogeneous boundary conditions // Different. Equat. – 2005. – **41**, № 10. – P. 1467 – 1475.
26. *Rudakov I. A.* Periodic solutions of a nonlinear wave equation with Neumann and Dirichlet boundary conditions // Rus. Math. – 2007. – **51**, № 2. – P. 44 – 52.
27. *Zikirov O. S.* A non-local boundary value problem for third-order linear partial differential equation of composite type // Math. Modelling and Anal. – 2009. – **47**, № 3. – P. 407 – 421.
28. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
29. *Спринджук В. Г.* Метрическая теория диофантовых приближений. – М.: Наука, 1977. – 144 с.
30. *Грошев А. В.* Теорема о системе линейных форм // Докл. АН СССР. – 1988. – **19**, № 3. – С. 151 – 152.
31. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 526 с.
32. *Мишина А. П., Проскуряков И. В.* Высшая алгебра. – М.: Наука, 1965. – 300 с.
33. *Фаддеев Д. К., Соминский И. С.* Сборник задач по высшей алгебре. – М.: Наука, 1972. – 304 с.
34. *Кострыкин А. И.* Введение в алгебру. – М.: Наука, 1977. – 495 с.
35. *Гординг Л.* Прямое решение задачи Коши для гиперболических уравнений // Математика (пер.). – 1958. – **2**, № 1. – С. 81 – 96.
36. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: Физматгиз, 1961. – 400 с.

Одержано 09.02.15