УДК 517.9

Е. А. Севостьянов (Житомир. гос. ун-т им. И. Франко)

ОБ УСТРАНЕНИИ ИЗОЛИРОВАННЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ КЛАССОВ ОРЛИЧА – СОБОЛЕВА С ВЕТВЛЕНИЕМ

The local behavior of closed-open discrete mappings of the Orlicz – Sobolev classes in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, is investigated. It is proved that the indicated mappings have continuous extensions to an isolated boundary point x_0 of the domain $D \setminus \{x_0\}$, whenever the $n-1$ degree of its inner dilatation has FMO (finite mean oscillation) at this point and, in addition, the limit sets of f at x_0 and ∂D are disjoint. Another sufficient condition for the possibility of continuous extension can be formulated as a condition of divergence of a certain integral.

Вивчається локальна поведінка замкнено-відкритих дискретних відображень класів Орліча – Соболєва в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Встановлено, що вказані відображення мають неперервне продовження в ізольовану точку x_0 межі області $D \setminus \{x_0\}$, як тільки їх внутрішня дилатація має мажоранту класу FMO (скінченного середнього коливання) у вказаній точці і, крім того, граничні множини відображення f у x_0 і на ∂D не перетинаються. Іншою достатньою умовою можливості неперервного продовження зазначених відображень є розбіжність певного інтеграла.

1. Введение. В настоящей статье исследуется некоторый подкласс отображений с конечным искажением, активно изучаемых в последнее время рядом авторов (см., например, [1 – 3]). Основные определения и обозначения, используемые ниже, можно найти в [2, 4].

Всюду далее D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, m — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < < 1\}$. Здесь и далее *предельным множеством отображения* f *относительно множества* $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ называется множество $C(f, E) := \{y \in \mathbb{R}^n : \exists\, x_0 \in E : y = \lim_{m\to\infty} f(x_m), x_m \to x_0\}$. Напомним, что отображение $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ называется *замкнутым*, если $f(A)$ замкнуто для любого $A \subset D$. Как известно, условие замкнутости эквивалентно условию *сохранения границы*, а именно, условию $C(f, \partial D) \subset \partial D'$, $D' := f(D)$ (см. [5], а также [6], разд. 3, гл. II). Условие замкнутости также эквивалентно тому, что прообраз любого компактного множества $K' \subset D'$ компактен в D при отображении f (см. [5], а также [6], теорема 3.3(4)). Пусть $\varphi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ — неубывающая функция, f — локально интегрируемая вектор-функция n вещественных переменных $x_1, \ldots, x_n$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$, $f_i \in W^{1,1}_{\rm loc}$, $i = 1, \ldots, n$. Будем говорить, что $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ принадлежит классу $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ (пишем $f \in W^{1,\varphi}_{\rm loc}$), если $\displaystyle\int_G \varphi\big(|\nabla f(x)|\big)\, dm(x) < \infty$ для любой компактной подобласти $G \subset D$, где $|\nabla f(x)| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)^2}$. Класс $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ называется классом *Орлича – Соболева*.

Согласно результатам [7] (теорема 5) и [2] (теорема 9.3), гомеоморфизмы классов Орлича – Соболева продолжаются по непрерывности в изолированную точку границы. Ниже будет показано, что указанное утверждение переносится на класс отрыто-замкнутых дискретных отображений, для которых $C(f, x_0) \cap C(f, \partial D) = \varnothing$, при этом техника доказательства существенно отличается от упомянутого случая гомеоморфизмов.

Нетрудно построить соответствующие примеры негомеоморфных замкнуто-открытых дискретных отображений, для которых условие $C(f, x_0) \cap C(f, \partial D) = \varnothing$ также имеет место. Одним из таких примеров является известное „закручивание вокруг оси” — отображение, задаваемое в цилиндрических координатах в виде $f_m(x) = (r\cos m\varphi, r\sin m\varphi, x_3, \ldots, x_n)$,

$x = (x_1, \ldots, x_n) \in D := \mathbb{B}^n$, $r = |z|$, $\varphi = \arg z$, $z = x_1 + ix_2$, $m \in \mathbb{N}$. (Здесь $x_0 = 0$). Заметим, что в некоторых меньших по включению областях указанное отображение f_m при некотором m утрачивает свойство замкнутости, например в случае области $G := B(e_1/2, 1/2) \subset \mathbb{B}^n$, $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ (здесь $B(e_1/2, 1/2)$, как обычно, обозначает открытый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке $e_1/2$ и радиуса 1/2). Еще одним примером негомеоморфного замкнуто-открытого дискретного отображения, удовлетворяющего условию $C(f, x_0) \cap C(f, \partial D) = \varnothing$, является плоское отображение $f(z) = z^n$, $z \in \mathbb{B}^2 \subset \mathbb{C}$, где $x_0 := 0$.

Ниже $K_I(x, f)$ — внутренняя дилатация отображения f в точке x (см. [2, с. 6]), а $q_{x_0}(r) := \dfrac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \displaystyle\int_{|x-x_0|=r} Q(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}$ обозначает среднее интегральное значение функции Q над сферой $S(x_0, r)$.

Основным результатом настоящей статьи является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $n \geq 3$, $x_0 \in D$, тогда каждое открытое, дискретное и замкнутое ограниченное отображение $f\colon D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}^n$ класса $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}(D \setminus \{x_0\})$ с конечным искажением такое, что $C(f, x_0) \cap C(f, \partial D) = \varnothing$, продолжается в точку x_0 непрерывным образом до отображения $f\colon D \to \mathbb{R}^n$, если*

$$\int_1^\infty \left(\frac{t}{\varphi(t)} \right)^{1/(n-2)} dt < \infty, \tag{1}$$

и, кроме того, найдётся функция $Q \in L^1_{\mathrm{loc}}(D)$ такая, что $K_I(x, f) \leq Q(x)$ при почти всех $x \in D$ и при некотором $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 < \mathrm{dist}(x_0, \partial D)$, выполнено следующее условие расходимости интеграла:

$$\int_0^{\varepsilon_0} \frac{dt}{t q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)} = \infty\,. \tag{2}$$

В частности, заключение теоремы (1) *является справедливым, если $q_{x_0}(r) = O\left(\left[\log \frac{1}{r}\right]^{n-1}\right)$ при $r \to 0$.*

***Замечание* 1.** Условие (1) принадлежит Кальдерону и использовалось им для решения задач несколько иного плана (см. [8]).

2. Вспомогательные сведения, основные леммы и доказательство теоремы 1. Понятия модуля семейств поверхностей, допустимой функции, обобщенного модуля и обобщенно допустимой функции можно найти в [2] [гл. 9).

В качестве одного из инструментов исследования классов Орлича – Соболева может быть использован следующий класс отображений (см. [2], гл. 9), определение которого обращено к кольцевому условию квазиконформности по Герингу [9]. Пусть D и D' — заданные области в $\overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$, $x_0 \in \overline{D} \setminus \{\infty\}$ и $Q\colon D \to (0, \infty)$ — измеримая по Лебегу функция. Будем говорить, что $f\colon D \to D'$ является *нижним Q-отображением в точке* x_0, если условие

$$M(f(\Sigma_\varepsilon)) \geq \inf_{\rho \in \mathrm{ext\,adm}\, \Sigma_\varepsilon} \int_{D \cap A(\varepsilon, r_0, x_0)} \frac{\rho^n(x)}{Q(x)}\, dm(x) \tag{3}$$

имеет место для каждого кольца $A(\varepsilon, r_0, x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon < |x - x_0| < r_0\}$, $r_0 \in (0, d_0)$, $d_0 = \sup_{z \in D} |z - z_0|$. Здесь Σ_ε обозначает семейство всех пересечений сфер $S(x_0, r)$ с областью D, $r \in (\varepsilon, r_0)$. Примеры нижних Q-отображений могут быть указаны явно благодаря специальной технике (см. ниже теорему 3).

Говорят, что некоторое свойство выполнено для *почти всех кривых* (почти всех поверхностей) области D, если оно имеет место для всех кривых (поверхностей), лежащих в D, кроме, быть может, некоторого их подсемейства, модуль которого равен нулю. Отметим, что выражения „почти всех кривых” и „почти всех поверхностей” имеют, вообще говоря, две различные интерпретации, так как указанное словосочетание может пониматься как относительно зануления модуля некоторого семейства поверхностей (кривых), так и относительно традиционного понимания слов „почти всюду”, т. е. зануления меры Лебега некоторого множества. Следующее утверждение указывает на то, что различная интерпретация этих понятий не ведет к разночтению. Доказательство этого утверждения полностью аналогично доказательству леммы 9.1 из [2].

Лемма 1. *Пусть $x_0 \in D$. Если некоторое свойство P имеет место для почти всех сфер $D(x_0, r) := S(x_0, r) \cap D$, где „почти всех” понимается в смысле модуля семейств поверхностей, то P также имеет место для почти всех сфер $D(x_0, r)$ относительно линейной меры Лебега по параметру $r \in \mathbb{R}$. Обратно, пусть P имеет место для почти всех сфер $D(x_0, r) := S(x_0, r) \cap D$ относительно линейной меры Лебега по $r \in \mathbb{R}$, тогда P также имеет место для почти всех поверхностей $D(x_0, r) := S(x_0, r) \cap D$ в смысле модуля семейств поверхностей.*

Следующий результат позволяет сформулировать эквивалентное определение класса нижних Q-отображений без использования бесконечной серии неравенств в (3) (доказательство проводится аналогично случаю гомеоморфизмов, без изменений, см. [2], (теорема 9.2).

Лемма 2. *Пусть $D, D' \subset \overline{\mathbb{R}^n}$, $x_0 \in \overline{D} \setminus \{\infty\}$ и $Q\colon D \to (0, \infty)$ — измеримая по Лебегу функция. Отображение $f\colon D \to D'$ является нижним Q-отображением в точке x_0 тогда и только тогда, когда $M(f(\Sigma_\varepsilon)) \geq \displaystyle\int_\varepsilon^{r_0} \frac{dr}{||\,Q||_{n-1}(r)}$ $\forall\, \varepsilon \in (0, r_0)$, $r_0 \in (0, d_0)$, где, как и выше, Σ_ε обозначает семейство всех пересечений сфер $S(x_0, r)$ с областью D, $r \in (\varepsilon, r_0)$, $\|Q\|_{n-1}(r) = \left(\displaystyle\int_{D(x_0,r)} Q^{n-1}(x)\, d\mathcal{A}\right)^{1/n-1}$ — L_{n-1}-норма функции Q над сферой $D(x_0, r) = \{x \in D\colon |x - x_0| = r\} = D \cap S(x_0, r)$.*

Понятие конденсатора в $\mathbb{R}^n$ и его емкости можно найти в [10] (разд. 10, гл. II). Следующие важные сведения, касающиеся емкости пары множеств относительно области, содержатся в работе В. Цимера [11]. Пусть G — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ и C_0, C_1 — непересекающиеся компактные множества, лежащие в замыкании G. Полагаем $R = G \setminus (C_0 \cup C_1)$ и $R^* = R \cup C_0 \cup C_1$. *Конформной емкостью пары C_0, C_1 относительно замыкания G* называется величина $C[G, C_0, C_1] = \inf \displaystyle\int_R |\nabla u|^n \, dm(x)$, где точная нижняя грань берется по всем функциям u, непрерывным в R^*, $u \in ACL(R)$, таким, что $u = 1$ на C_1 и $u = 0$ на C_0. Указанные функции будем называть *допустимыми* для величины $C[G, C_0, C_1]$. Будем говорить, что *множество $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ разделяет C_0 и C_1 в R^**, если $\sigma \cap R$ замкнуто в R и найдутся непересекающиеся множества A и B, являющиеся открытыми в $R^* \setminus \sigma$, такие, что $R^* \setminus \sigma = A \cup B$, $C_0 \subset A$ и $C_1 \subset B$. Пусть

Σ обозначает класс всех множеств, разделяющих C_0 и C_1 в R^*. Для числа $n' = n/(n-1)$ определим величину $\widetilde{M_{n'}}(\Sigma) = \inf_{\rho\in\widetilde{\mathrm{adm}}\Sigma}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\rho^{n'}dm(x)$, где запись $\rho\in\widetilde{\mathrm{adm}}\,\Sigma$ означает, что ρ — неотрицательная борелевская функция в $\mathbb{R}^n$ такая, что $\int\limits_{\sigma\cap R}\rho d\mathcal{H}^{n-1}\geq 1\quad\forall\,\sigma\in\Sigma$. Заметим, что согласно результату Цимера см. [11], (теорема 3.13)

$$\widetilde{M_{n'}}(\Sigma) = C[G, C_0.C_1]^{-1/(n-1)}, \tag{4}$$

Заметим также, что согласно результату Шлыка см. [12], (теорема 1)

$$M(\Gamma(E,F,D)) = C[D,E,F]. \tag{5}$$

Обозначим через $J_{n-1}f(a)$ величину, означающую $(n-1)$-мерный якобиан отображения f в точке a (см. [13], разд. 3.2.1). Предположим, что отображение $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ дифференцируемо в точке $x_0\in D$ и матрица Якоби $f'(x_0)$ невырождена, $J(x_0,f)=\mathrm{d}et\,f'(x_0)\neq 0$. Тогда найдутся системы векторов $e_1,\ldots,e_n$ и $\widetilde{e_1},\ldots,\widetilde{e_n}$, а также положительные числа $\lambda_1(x_0),\ldots,\lambda_n(x_0)$, $\lambda_1(x_0)\leq\ldots\leq\lambda_n(x_0)$, такие что $f'(x_0)e_i=\lambda_i(x_0)\widetilde{e_i}$ (см. [14], гл. I, теорема 2.1), при этом

$$|J(x_0,f)| = \lambda_1(x_0)\ldots\lambda_n(x_0), \qquad \|f'(x_0)\| = \lambda_n(x_0) \qquad l(f'(x)) = \lambda_1(x_0), \tag{6}$$

$$K_I(x_0,f) = \frac{\lambda_1(x_0)\cdots\lambda_n(x_0)}{\lambda_1^n(x_0)} \tag{7}$$

(см. [14], соотношение (2.5), разд. 2.1, гл. I). Числа $\lambda_1(x_0),\ldots\lambda_n(x_0)$ называются *главными значениями*, а векторы $e_1,\ldots,e_n$ и $\widetilde{e_1},\ldots,\widetilde{e_n}$ — *главными векторами* отображения $f'(x_0)$. Пусть $S(z_0,r)$ — произвольная сфера, проходящая через точку $x_0\in\mathbb{R}^n$ и $\widetilde{f} := f|_{S(z_0,r)}$. Из геометрического смысла $(n-1)$-мерного якобиана, а также первого соотношения в (6) следует, что

$$\lambda_1(x_0)\ldots\lambda_{n-1}(x_0)\leq J_{n-1}\widetilde{f}(x_0)\leq\lambda_2(x_0)\ldots\lambda_n(x_0). \tag{8}$$

В частности, из (8) следует, что $J_{n-1}\widetilde{f}(x_0)$ положителен во всех тех точках x_0, где положителен якобиан $J(x_0,f)$.

Для отображения $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ множества $E\subset D$ и $y\in\mathbb{R}^n$, определим *функцию кратности* $N(y,f,E)$ как число прообразов точки y во множестве E, т. е.

$$N(y,f,E) = \mathrm{card}\,\{x\in E\colon f(x)=y\}\,, \qquad N(f,E) = \sup_{y\in\mathbb{R}^n} N(y,f,E)\,. \tag{9}$$

Следующие два утверждения являются базовыми. Первое из них для случая гомеоморфизмов установлено в работе [15] (теорема 2.1).

Лемма 3. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n\geq 3$, $\varphi\colon(0,\infty)\to(0,\infty)$ — неубывающая функция, удовлетворяющая условию* (1). *Если $n\geq 3$, то каждое открытое дискретное отображение f : $D\to\mathbb{R}^n$ с конечным искажением класса $W_{\mathrm{loc}}^{1,\varphi}$ такое, что $N(f,D)<\infty$, является нижним Q-отображением в каждой точке $x_0\in\overline{D}$ при $Q(x)=N(f,D)K_I^{1/(n-1)}(x,f)$, где $K_I(x,f)$ — внутренняя дилатация отображения f в точке x, а кратность $N(f,D)$ определена вторым соотношением в* (9).

Доказательство. Основано на результатах монографии [13], касающихся связи дифференцируемых почти всюду и липшицевых отображений, кроме того, здесь используется доказанное в [7] свойство N на поверхностях.

Заметим, что f дифференцируемо почти всюду в силу теоремы 1 [7]. Пусть B — борелево множество всех точек $x \in D$, в которых f имеет полный дифференциал $f'(x)$ и $J(x,f) \neq 0$. Применяя теорему Кирсбрауна и свойство единственности аппроксимативного дифференциала (см. [13], пункты 2.10.43 и 3.1.2), видим, что множество B представляет собой не более чем счетное объединение борелевских множеств B_l, $l = 1, 2, \ldots$, таких, что сужения $f_l = f|_{B_l}$ являются билипшицевыми гомеоморфизмами (см., например, [13], пункты 3.2.2, 3.1.4 и 3.1.8). Без ограничения общности, можем полагать, что множества B_l попарно не пересекаются. Обозначим также символом B_* множество всех точек $x \in D$, в которых f имеет полный дифференциал, однако, $f'(x) = 0$.

Согласно построению, множество $B_0 := D \setminus (B \bigcup B_*)$ имеет лебегову меру нуль. Следовательно, по теореме 9.1 [2], $\mathcal{H}^{n-1}(B_0 \cap S_r) = 0$ для почти всех сфер $S_r :\ = S(x_0, r)$ с центром в точке $x_0 \in \overline{D}$, где „почти всех" следует понимать в смысле конформного модуля семейств поверхностей. По лемме 1 также $\mathcal{H}^{n-1}(B_0 \cap S_r) = 0$ при почти всех $r \in \mathbb{R}$.

Согласно следствию 2 [2], из условия $\mathcal{H}^{n-1}(B_0 \cap S_r) = 0$ для почти всех $r \in \mathbb{R}$ следует, что $\mathcal{H}^{n-1}(f(B_0 \cap S_r)) = 0$ для почти всех $r \in \mathbb{R}$. По этому предложению также $\mathcal{H}^{n-1}(f(B_* \cap S_r)) = 0$, так как f — отображение с конечным искажением, а значит, $\nabla f = 0$ почти всюду, где $J(x,f) = 0$.

Пусть Γ — семейство всех пересечений сфер S_r, $r \in (\varepsilon, r_0)$, $r_0 < d_0 = \sup_{x \in D} |x - x_0|$, с областью D. Для заданной функции $\rho_* \in \operatorname{adm} f(\Gamma)$, $\rho_* \equiv 0$ вне $f(D)$, полагаем $\rho \equiv 0$ вне D и на $D \setminus B$ и, кроме того,

$$\rho(x) := \rho_*(f(x)) \left(|J(x,f)| K_I^{1/(n-1)}(x,f) \right)^{1/n} \quad \text{при} \quad x \in D \setminus B.$$

Учитывая соотношения (6) и (8), имеем

$$\left(|J(x,f)| K_I^{1/(n-1)}(x,f) \right)^{(n-1)/n} \geq J_{n-1} \widetilde{f}(x), \tag{10}$$

где $\widetilde{f} = f|_{S_r}$. Пусть $D_r^* \in f(\Gamma)$, $D_r^* = f(D \cap S_r)$. Заметим, что $D_r^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} f(S_r \cap B_i) \bigcup f(S_r \cap B_*)$ и, следовательно, для почти всех $r \in (\varepsilon, r_0)$

$$1 \leq \int\limits_{D_r^*} \rho_*^{n-1}(y) d\mathcal{A}_* \leq \sum_{i=0}^{\infty} \int\limits_{f(S_r \cap B_i)} \rho_*^{n-1}(y) N(y, f, S_r \cap B_i) d\mathcal{H}^{n-1} y +$$
$$+ \int\limits_{f(S_r \cap B_*)} \rho_*^{n-1}(y) N(y, f, S_r \cap B_*) d\mathcal{H}^{n-1} y. \tag{11}$$

Учитывая доказанное выше, из (11) получаем, что

$$1 \leq \int\limits_{D_r^*} \rho_*^{n-1}(y) d\mathcal{A}_* \leq \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{f(S_r \cap B_i)} \rho_*^{n-1}(y) N(y, f, S_r \cap B_i) d\mathcal{H}^{n-1} y \tag{12}$$

для почти всех $r \in (\varepsilon, r_0)$. Рассуждая покусочно на $B_i,\ i = 1, 2, \ldots,$ согласно теореме 3.2.5 [13] и (10) убеждаемся, что

$$\int\limits_{B_i\cap S_r} \rho^{n-1}\, d\mathcal{A} = \int\limits_{B_i\cap S_r} \rho_*^{n-1}(f(x)) \left(|J(x,f)|K_I^{1/(n-1)}(x,f)\right)^{(n-1)/n} d\mathcal{A} =$$

$$= \int\limits_{B_i\cap S_r} \rho_*^{n-1}(f(x)) \cdot \frac{\left(|J(x,f)|K_I^{1/(n-1)}(x,f)\right)^{(n-1)/n}}{J_{n-1}f(x)} J_{n-1}f(x)\, d\mathcal{A} \geq$$

$$\geq \int\limits_{B_i\cap S_r} \rho_*^{n-1}(f(x)) J_{n-1}f(x)\, d\mathcal{A} = \int\limits_{f(B_i\cap S_r)} \rho_*^{n-1}\, N(y, f, S_r\cap B_i) d\mathcal{H}^{n-1}y \tag{13}$$

для почти всех $r \in (\varepsilon, r_0)$. Из (12) и (13) следует, что $\rho \in \operatorname{ext} \operatorname{adm} \Gamma$.

Замена переменных на каждом $B_l,\ l = 1, 2, \ldots,$ (см., например, [13], теорема 3.2.5) и свойство счетной аддитивности интеграла приводят к оценке $\int_D \frac{\rho^n(x)}{K_I^{1/n-1}(x,f)}\, dm(x) \leq$ $\leq \int_{f(D)} N(f, D) \rho_*^n(y)\, dm(y)$, что и завершает доказательство.

Имеет место следующее утверждение (см. [16], лемма 3.11, и [10], лемма 2.6, гл. III).

Предложение 1. *Для каждого $a > 0$ существует такое положительное число $\delta > 0$, что* cap $(\mathbb{B}^n, C) \geq \delta$, *где C — произвольный континуум в $\mathbb{B}^n$ такой что $d(C) \geq a$.*

Аналог следующей леммы в случае гомеоморфизмов доказан в монографии [2] (теорема 9.3).

Лемма 4. *Пусть $n \geq 2,\ x_0 \in D$ и $Q\colon D \to (0, \infty)$ — измеримая по Лебегу функция такая, что при некотором $\varepsilon_0 > 0,\ \varepsilon_0 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, выполнено условие расходимости интеграла*

$$\int\limits_0^{\varepsilon_0} \frac{dt}{t\widetilde{q}_{x_0}^{1/(n-1)}(t)} = \infty, \tag{14}$$

где $\widetilde{q}_{x_0}(r)$ — среднее интегральное значение функции $Q^{n-1}(x)$ на сфере $S(x_0, r)$. Тогда каждое ограниченное открытое, дискретное и замкнутое в области $D\setminus\{x_0\}$ нижнее Q-отображение $f\colon D\setminus\{x_0\} \to \mathbb{R}^n$ продолжается в точку x_0 непрерывным образом до отображения $f\colon D \to \mathbb{R}^n$, если $C(f, x_0) \cap C(f, \partial D) = \varnothing$.

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $x_0 = 0$ и $\overline{f(D\setminus\{0\})} \subset \mathbb{B}^n$. Предположим противное, а именно, что отображение f не может быть продолжено по непрерывности в точку $x_0 = 0$. Тогда найдутся две последовательности x_j и x_j', принадлежащие $D\setminus\{0\}$, $x_j \to 0,\quad x_j' \to 0$, такие, что $|f(x_j) - f(x_j')| \geq a > 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$. Можно считать, что x_j и x_j' лежат внутри шара $B(0, r_0),\ r_0 := \operatorname{dist}(0, \partial D)$. Полагаем $r_j = \max\left\{|x_j|, |x_j'|\right\}, l_j = \min\left\{|x_j|, |x_j'|\right\}$. Соединим точки x_j и x_j' замкнутой кривой, лежащей в $\overline{B(0, r_j)} \setminus B(0, l_j)$. Обозначим эту кривую символом C_j и рассмотрим конденсатор $E_j = \big(D\setminus\{0\}, C_j\big)$. В силу открытости и непрерывности отображения f пара

$f(E_j)$ также является конденсатором. Поскольку f — открытое и замкнутое отображение, $\partial f(D\setminus\{0\})=C(f,\partial D)\cup C(f,0)$.

Рассмотрим при $r_j<r<r_0$ проколотый шар $G_1:=B(0,r)\setminus\{0\}$. Заметим, что C_j — компактное подмножество G_1, тогда $f(C_j)$ — компактное подмножество $f(G_1)$.

В силу открытости f имеет место включение $\partial f(G_1)\subset C(f,0)\cup f(S(0,r))$, откуда в силу замкнутости и открытости отображения f множество $\partial f(G_1)\setminus C(f,0)$ является замкнутым в $\mathbb{R}^n$.

Отсюда следует, что множество $\sigma:=\partial f(G_1)\setminus C(f,0)$ отделяет $f(C_j)$ от $C(f,\partial D)$ в $f(D\setminus\{0\})\cup C(f,\partial D)$. Действительно,

$$f(D\setminus\{0\})\cup C(f,\partial D)=f(G_1)\cup\sigma\cup\Big(f(D\setminus\{0\})\cup C(f,\partial D)\setminus\overline{f(G_1)}\Big),$$

каждое из множеств $A:=f(G_1)$ и $B:=f(D\setminus\{0\})\cup C(f,\partial D)\setminus\overline{f(G_1)}$ открыто в топологии пространства $f(D\setminus\{0\})\cup C(f,\partial D)$, $A\cap B=\varnothing$, $C_0:=f(C_j)\subset A$ и $C_1:=C(f,\partial D)\subset B$.

Поскольку $\sigma\subset f(S(0,r))$, в силу (4) и (5)

$$M\left(\Gamma\big(f(C_j),C(f,\partial D),f(D\setminus\{0\})\big)\right)\le\frac{1}{M^{n-1}(f(\Sigma_r))},\tag{15}$$

где Σ_r — семейство сфер $S(0,r)$, $r\in(r_j,r_0)$. С другой стороны, из леммы 2 и условия расходимости интеграла (14) следует, что $M^{n-1}(f(\Sigma_r)\to\infty$ при $j\to\infty$. В таком случае из (15) следует, что

$$M\left(\Gamma\big(C(f,D),f(C_j),f(D\setminus\{0\})\big)\right)\to 0\quad\text{при}\quad j\to\infty.\tag{16}$$

Аналогичную процедуру проведем относительно предельного множества $C(f,0)$. Именно, заметим, что C_j — компакт в $G_2:=D\setminus\overline{B(0,\varepsilon)}$ для произвольного $\varepsilon\in(0,l_j)$. Тогда вследствие непрерывности f множество $f(C_j)$ является компактным подмножеством $f(G_2)=f(D\setminus\overline{B(0,\varepsilon)})$ и, в частности, $\partial f(D\setminus\overline{B(0,\varepsilon)})\cap f(C_j)=\varnothing$. Далее, заметим, что $\partial f(D\setminus\overline{B(0,\varepsilon)})\subset$ $\subset C(f,\partial D)\cup f(S(0,\varepsilon))$. Пусть $\theta:=\partial f(G_2)\setminus C(f,\partial D)$. Заметим, что θ является замкнутым, так как $\partial f(G_2)\subset f(S(0,\varepsilon))\cup C(f,\partial D)$ и $C(f,\partial D)\cap f(S(0,\varepsilon))=\varnothing$ в силу замкнутости отображения f в $D\setminus\{0\}$. Кроме того θ отделяет $C_3:=f(C_j)$ и $C_4:=C(f,0)$ в $f(D\setminus\{0\})\cup C(f,0)$. Действительно,

$$f(D\setminus\{0\})\cup C(f,0)=f(G_2)\cup\theta\cup\Big(f(D\setminus\{0\})\cup C(f,0)\setminus\overline{f(G_2)}\Big),$$

$A=f(G_2)$ и $B=\Big(f(D\setminus\{0\})\cup C(f,0)\setminus\overline{f(G_2)}\Big)$ открыты в топологии пространства $f(D\setminus\{0\})\cup C(f,0)$, $A\cap B=\varnothing$, $C_3:=f(C_j)\subset A$ и $C_4:=C(f,0)\subset B$.

Поскольку $\theta\subset f(S(0,\varepsilon))$, в силу (4) и (5) получаем

$$M(\Gamma(f(C_j),C(f,0),f(D\setminus\{0\})))\le\frac{1}{M^{n-1}(f(\Theta_\varepsilon))},\tag{17}$$

где Θ_ε — семейство сфер $S(0,\varepsilon)$, $\varepsilon\in(0,l_j)$. С другой стороны, из леммы 2 и условия расходимости интеграла (14) следует, что $M^{n-1}(f(\Theta_\varepsilon)=\infty$. В таком случае из (17) вытекает, что

$$M\left(\Gamma\big(C(f,0), f(C_j), f(D\setminus\{0\})\big)\right) = 0. \tag{18}$$

Заметим, что в силу предложения 10.2, гл. II [10] и полуаддитивности модуля смейств кривых (см. [17], разд. 6, гл. I) при $j\to\infty$ из (16) и (18) следует, что

$$\operatorname{cap} f(E_j) \le$$

$$\le M\left(\Gamma\big(C(f,0), f(C_j), f(D\setminus\{0\})\big)\right) + M\left(\Gamma\big(C(f,\partial D), f(C_j), f(D\setminus\{0\})\big)\right) \to 0. \tag{19}$$

С другой стороны, по предложению 1 $\operatorname{cap} f(E_j) \ge \delta > 0$ при всех натуральных j, что противоречит (19).

Лемма доказана.

Доказательство теоремы **1** следует из лемм 3 и 4, а также того факта, что максимальная кратность $N(f,D)$ замкнутого открытого дискретного отображения f конечна (см., например, лемму 3.3 [18]).

3. Некоторые следствия и замечания. Еще один важный результат, относящийся к устранению особенностей классов Орлича – Соболева, касается функций конечного среднего колебания (см. [2, 19]). В дальнейшем нам понадобится следующее вспомогательное утверждение (см., например, лемму 7.4 [2] либо лемму 2.2 [20]).

Предложение 2. *Пусть $x_0\in\mathbb{R}^n$, $Q(x)$ — измеримая по Лебегу функция, $Q\colon\mathbb{R}^n\to[0,\infty]$, $Q\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Полагаем $A := A(r_1,r_2,x_0) = \{x\in\mathbb{R}^n\colon r_1<|x-x_0|<r_2\}$ и $\eta_0(r) = \dfrac{1}{Irq_{x_0}^{1/(n-1)}(r)}$, где*

$$I := I = I(x_0,r_1,r_2) = \int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{rq_{x_0}^{1/(n-1)}(r)} \qquad \text{и} \qquad q_{x_0}(r) := \frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}}\int\limits_{|x-x_0|=r} Q(x)\,d\mathcal{H}^{n-1}$$

— среднее интегральное значение функции Q над сферой $S(x_0,r)$. Тогда

$$\frac{\omega_{n-1}}{I^{n-1}} = \int\limits_A Q(x)\eta_0^n(|x-x_0|)dm(x) \le \int\limits_A Q(x)\eta^n(|x-x_0|)dm(x) \tag{20}$$

для любой измеримой по Лебегу функции $\eta\colon(r_1,r_2)\to[0,\infty]$ такой, что $\displaystyle\int_{r_1}^{r_2}\eta(r)dr = 1$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $n\ge3$, $x_0\in D$, тогда каждое открытое, дискретное и замкнутое ограниченное отображение $f\colon D\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}^n$ класса $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}(D\setminus\{x_0\})$ с конечным искажением такое, что $C(f,x_0)\cap C(f,\partial D)=\varnothing$, продолжается в точку x_0 непрерывным образом до отображения $f\colon D\to\mathbb{R}^n$, если выполнено условие (1) и, кроме того, найдется функция $Q\in L^1_{\mathrm{loc}}(D)$ такая, что $K_I(x,f)\le Q(x)$ при почти всех $x\in D$ и $Q\in FMO(x_0)$.*

Доказательство. Достаточно установить, что из предположения $Q\in FMO(x_0)$ следует расходимость интеграла (2). В таком случае необходимое заключение будет следствием теоремы 1. Отметим, что условие типа FMO в точке x_0 влечет выполнения условия

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<e_0}\frac{Q(x+x_0)\,dm(x)}{\left(|x|\log\frac{1}{|x|}\right)^n} = O\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right) \tag{21}$$

при $\varepsilon \to 0$ и для некоторого $e_0 > 0$, $e_0 \leq \operatorname{dist}(0, \partial D)$ (см. [2], следствие 6.3). При $\varepsilon_0 < r_0 := \operatorname{dist}(0, \partial D)$ положим $\psi(t) := \dfrac{1}{t\,\log\frac{1}{t}}$, $I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \psi(t)dt = \log \dfrac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log\frac{1}{\varepsilon_0}}$ и $\eta(t) := \psi(t)/I(\varepsilon, \varepsilon_0)$. Отметим, что $\int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \eta(t)dt = 1$, более того, из (21) следует, что

$$\frac{1}{I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)} \int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x)\psi^n(|x|)\, dm(x) \leq C \left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1-n} \to 0 \qquad (22)$$

при $\varepsilon \to 0$. Из (20) и (22) непосредственно следует расходимость интеграла в (2), что и доказывает исходное утверждение.

Следующий результат указывает на то, что в предположениях теорем 1 и 2 условия на функцию Q не удается ослабить требованием локальной интегрируемости функции Q в степени p, насколько ни была бы велика эта степень. Ограничимся рассмотрением частного случая $D = \mathbb{B}^n$, $n \geq 3$.

Теорема 3. *Пусть $\varphi\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ — произвольная неубывающая функция. Для каждого $p \geq 1$ существуют функция $Q : \mathbb{B}^n \to [1, \infty]$, $Q(x) \in L^p(\mathbb{B}^n)$ и равномерно ограниченный гомеоморфизм $g\colon \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$, $g \in W^{1,\varphi}_{\rm loc}(\mathbb{B}^n \setminus \{0\})$, имеющий конечное искажение, такой, что $K_I(x, f) \leq Q(x)$, при этом g не продолжается по непрерывности в точку $x_0 = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим следующий пример. Зафиксируем числа $p \geq 1$ и $\alpha \in (0, n/p(n-1))$. Можно считать, что $\alpha < 1$ в силу произвольности выбора p. Зададим гомеоморфизм $g\colon \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ следующим образом: $g(x) = \dfrac{1 + |x|^\alpha}{|x|}x$. Заметим, что отображение g переводит шар $D = \mathbb{B}^n$ в кольцо $D' = B(0, 2) \setminus \mathbb{B}^n$, при этом $C(g, 0) = \mathbb{S}^{n-1}$ (отсюда следует, что g не имеет предела в нуле). Заметим, что $g \in C^1(\mathbb{B}^n \setminus \{0\})$, в частности $g \in W^{1,1}_{\rm loc}$.

Далее, в каждой точке $x \in \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ отображения $g\colon \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ вычислим внутреннюю дилатацию отображения g в точке x, воспользовавшись правилом (7). Поскольку g имеет вид $g(x) = \dfrac{x}{|x|}\rho(|x|)$, непосредственным подсчетом соответствующих производных по направлению можно убедиться, что в качестве главных векторов $e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}$ и $\widetilde{e_{i_1}}, \ldots, \widetilde{e_{i_n}}$ можно взять $n-1$ линейно независимых касательных векторов к сфере $S(0, r)$ в точке x_0, где $|x_0| = r$, и один ортогональный к ним вектор в указанной точке. Соответствующие главные растяжения (называемые, соответственно, *касательными растяжениями* и *радиальным растяжением*) равны $\lambda_\tau(x_0) := \lambda_{i_1}(x_0) = \ldots = \lambda_{i_{n-1}}(x_0) = \dfrac{\rho(r)}{r}$ и $\lambda_r(x_0) := \lambda_{i_n} = \rho'(r)$ соответственно.

Согласно изложенному, $\lambda_\tau(x) = \dfrac{|x|^\alpha + 1}{|x|}$, $\lambda_r(x) = \alpha|x|^{\alpha-1}$, $l(g'(x)) = \alpha|x|^{\alpha-1}$, $\|g'(x)\| = \dfrac{|x|^\alpha + 1}{|x|}$, $|J(x, g)| = \left(\dfrac{|x|^\alpha + 1}{|x|}\right)^{n-1} \alpha|x|^{\alpha-1}$ и $K_I(x, g) = \left(\dfrac{1 + |x|^\alpha}{\alpha|x|^\alpha}\right)^{n-1}$. Заметим, что если G — произвольная компактная область в $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$, то $\|g'(x)\| \leq c(G) < \infty$, кроме того, нетрудно видеть, что $|\nabla g(x)| \leq n^{1/2}\|g'(x)\|$ при почти всех $x \in \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$. Тогда в силу неубывания функции φ выполнено $\int_G \varphi(|\nabla g(x)|)dm(x) \leq \varphi(n^{1/2}c(G))m(G) < \infty$, т. е., $g \in W^{1,\varphi}(G)$. Заметим, что отображение g имеет конечное искажение, так как его якобиан почти всюду не равен нулю; кроме того, $K_I(x,g)=Q(x)$, где $Q=\left(\dfrac{1+|x|^{\alpha}}{\alpha|x|^{\alpha}}\right)^{n-1}$, и $Q(x)\le$ $\le\dfrac{C}{|x|^{\alpha(n-1)}}$, $C:=\left(\dfrac{2}{\alpha}\right)^{n-1}$. Следовательно, имеем

$$\int\limits_{\mathbb{B}^n}(Q(x))^p\,dm(x)\le C^p\int\limits_{\mathbb{B}^n}\frac{dm(x)}{|x|^{p\alpha(n-1)}}=$$

$$=C^p\int\limits_0^1\int\limits_{S(0,r)}\frac{d\mathcal{A}}{|x|^{p\alpha(n-1)}}\,dr=\omega_{n-1}C^p\int\limits_0^1\frac{dr}{r^{(n-1)(p\alpha-1)}}\,. \tag{23}$$

Поскольку интеграл $I:=\int_0^1\dfrac{dr}{r^{\beta}}$, как известно, сходится при $\beta<1$, то и интеграл в правой части соотношения (23) также сходится $\big($здесь показатель степени $\beta:=(n-1)(p\alpha-1)$ удовлетворяет условию $\beta<1$ при $\alpha\in(0,n/p(n-1))\big)$. Следовательно, $Q(x)\in L^p(\mathbb{B}^n)$.

Следующее утверждение указывает на то, что условие (2) является не только достаточным, но и необходимым условием непрерывного продолжения отображения в изолированную точку границы.

Теорема 4. *Пусть $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ — произвольная неубывающая функция и $0<\varepsilon_0<$ <1. Для каждой измеримой по Лебегу функции $Q\colon\mathbb{B}^n\to[1,\infty]$, $Q\in L_{\rm loc}(\mathbb{B}^n)$, такой, что $\int_0^{\varepsilon_0}\dfrac{dt}{tq_0^{1/(n-1)}(t)}<\infty$, найдется ограниченное отображение $f\in W^{1,\varphi}_{\rm loc}(\mathbb{B}^n\setminus\{0\})$ с конечным искажением, которое не может быть продолжено в точку $x_0=0$ непрерывным образом, при этом, $K_I(x,f)\le\widetilde{Q}(x)$ почти всюду, где $\widetilde{Q}(x)$ — некоторая измеримая по Лебегу функция, такая, что*

$$\widetilde{q_0}(r):=\frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}}\int\limits_{S(0,r)}\widetilde{Q}(x)d\mathcal{H}^{n-1}=q_0(r)$$

для почти всех $r\in(0,1)$.

Доказательство. Определим отображение $f:\mathbb{B}^n\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^n$ следующим образом: $f(x)=$ $=\dfrac{x}{|x|}\rho(|x|)$, где $\rho(r)=\exp\left\{-\displaystyle\int_r^1\frac{dt}{tq_0^{1/(n-1)}(t)}\right\}$. Заметим, что $f\in ACL$ и отображение f дифференцируемо почти всюду в $\mathbb{B}^n\setminus\{0\}$. Ввиду техники, изложенной перед формулировкой леммы 3,

$$\|f'(x)\|=\frac{\exp\left\{-\displaystyle\int_{|x|}^1\frac{dt}{tq_0^{1/(n-1)}(t)}\right\}}{|x|},\qquad l(f'(x))=\frac{\exp\left\{-\displaystyle\int_{|x|}^1\frac{dt}{tq_0^{1/(n-1)}(t)}\right\}}{|x|q_0^{1/(n-1)}(|x|)}$$

и

$$|J(x,f)|=\frac{\exp\left\{-n\displaystyle\int_{|x|}^1\frac{dt}{tq_0^{1/(n-1)}(t)}\right\}}{|x|^nq_0^{1/(n-1)}(|x|)}.$$

Поскольку почти всюду $J(x,f) \neq 0$, отображение f является отображением с конечным искажением. Имеем также $\varphi(|\nabla f(x)|) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{B}^n \setminus \{0\})$, ибо $\|f'(x)\|$ локально ограничена в $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$, а функция φ является неубывающей. Непосредственными вычислениями убеждаемся, что $K_I(x,f) = q_0(|x|)$. Полагая $\widetilde{Q}(x) := q_0(|x|)$, имеем $\widetilde{q}_0(r) = q_0(r)$ почти всюду. Осталось заметить, что отображение f не имеет непрерывного продолжения в точку $x_0 = 0$ вследствие его построения и с учетом условия $\displaystyle\int_0^{\varepsilon_0} \frac{dt}{tq_0^{1/(n-1)}(t)} < \infty$.

Литература

1. *Iwaniec T., Martin G.* Geometrical function theory and non-linear analysis. – Oxford: Clarendon Press, 2001. – 552 p.
2. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory. – New York: Springer Sci. + Business Media, LLC, 2009.
3. *Gutlyanskii V. Ya., Ryazanov V. I., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami equation: a geometric approach // Develop. Math. – New York etc.: Springer, 2012. – **26**.
4. *Севостьянов Е. А.* О точках ветвления отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности // Сиб. мат. журн. – 2010. – **51**, № 5. – С. 1129 – 1146.
5. *Зелинский Ю. Б.* Некоторые критерии гомеоморфизма при отображении областей евклидова пространства // Труды VIII летней мат. школы. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1971. – С. 194 – 211.
6. *Vuorinen M.* Exceptional sets and boundary behavior of quasiregular mappings in n-space // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A 1. Math. Dissertationes. – 1976. – **11**. – P. 1 – 44.
7. *Ковтонюк Д. А., Рязанов В. И., Салимов Р. Р., Севостьянов Е. А.* К теории классов Орлича – Соболева // Алгебра и анализ. – 2013. – **25**, № 6. – С. 50 – 102.
8. *Calderon A. P.* On the differentiability of absolutely continuous functions // Riv. mat. Univ. Parma. – 1951. – **2**. – P. 203 – 213.
9. *Gehring F. W.* Rings and quasiconformal mappings in space // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – **103**. – P. 353 – 393.
10. *Rickman S.* Quasiregular mappings // Results Math. and Relat. Areas. – Berlin: Springer-Verlag, 1993. – **26**, № 3.
11. *Ziemer W. P.* Extremal length and conformal capacity // Trans. Amer. Math. Soc. – 1967. – **126**, № 3. – P. 460 – 473.
12. *Шлык В. А.* О равенстве p-емкости и p-модуля // Сиб. мат. журн. – 1993. – **34**, № 6. – С. 216 – 221.
13. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. – М.: Наука, 1987.
14. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. – Новосибирск: Наука, 1982.
15. *Kovtonuyk D., Ryazanov V.* New modulus estimates in Orlicz – Sobolev classes // Ann. Univ. Bucharest. Math. Ser. – 2014. – **5 (63)**. – P. 131 – 135.
16. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Distortion and singularities of quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. – 1970. – **465**. – P. 1 – 13.
17. *Väisälä J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings // Lect. Notes Math. – Berlin etc.: Springer – Verlag, 1971. – **229**.
18. *Martio O., Srebro U.* Periodic quasimeromorphic mappings // J. Anal. Math. – 1975. – **28**. – P. 20 – 40.
19. *Игнатьев А., Рязанов В.* Конечное среднее колебание в теории отображений // Укр. мат. вестн. – 2005. – **2**, № 3. – С. 395 – 417.
20. *Рязанов В. И., Севостьянов Е. А.* Равностепенно непрерывные классы кольцевых Q-гомеоморфизмов // Сиб. мат. журн. – 2007. – **48**, № 6. – С. 1361 – 1376.

Получено 08.06.15