УДК 517.956.4

В. М. Лось (Нац. техн. ун-т України „КПІ”, Київ; Чернігів. нац. технол. ун-т)

ТЕОРЕМИ ПРО ІЗОМОРФІЗМИ ДЛЯ ДЕЯКИХ ПАРАБОЛІЧНИХ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВИХ ЗАДАЧ У ПРОСТОРАХ ХЕРМАНДЕРА: ГРАНИЧНИЙ ВИПАДОК

In Hilbert Hörmander spaces, we study the initial-boundary-value problems for arbitrary parabolic differential equations of the second order with Dirichlet boundary conditions or general boundary conditions of the first order in the case where the solutions of these problems belong to the space $H^{2,1,\varphi}$. It is shown that the operators corresponding to these problems are isomorphisms between suitable Hörmander spaces. The regularity of the functions that form these spaces is characterized by a couple of numerical parameters and a functional parameter φ slowly varying at infinity in Karamata's sense. Due to the presence of the parameter φ, the Hörmander spaces describe the regularity of the functions more precisely than the anisotropic Sobolev spaces.

В гильбертовых пространствах Хермандера исследованы начально-краевые задачи для произвольного параболического дифференциального уравнения второго порядка с краевым условием Дирихле или общим краевым условием первого порядка в случае, когда решения этих задач принадлежат пространству $H^{2,1,\varphi}$. Доказано, что операторы, соответствующие этим задачам, являются изоморфизмами между подходящими пространствами Хермандера. Регулярность функций, образующих эти пространства, характеризуется парой числовых параметров и функциональным параметром φ, медленно меняющимися на бесконечности по Карамата. Благодаря параметру φ пространства Хермандера описывают регулярность функций более тонко, чем анизотропные пространства Соболева.

1. Вступ. Сучасну теорію загальних параболічних початково-крайових задач розроблено для класичних шкал функціональних просторів Гельдера – Зигмунда і Соболєва [1–7]. Основний результат цієї теорії – теореми про коректну розв'язність (за Адамаром) цих задач у підходящих парах вказаних просторів.

Широке і змістовне узагальнення просторів Соболєва було запропоновано Л. Хермандером у [8]. Це простори $H^{\mu} := \mathcal{B}_{2,\mu}$. Для них показником регулярності розподілів служить загальна вагова функція μ. Такі простори знайшли різноманітні застосування в аналізі і теорії рівнянь з частинними похідними [8 – 16].

Так, В. А. Михайлець і О. О. Мурач [15 – 22] побудували теорію розв'язності загальних еліптичних систем і еліптичних крайових задач у гільбертових шкалах просторів $H^{s,\varphi} := \mathcal{B}_{2,\mu}$, для яких показником регулярності є функція вигляду $\mu(\xi) := (1 + |\xi|^2)^{s/2}\varphi((1 + |\xi|^2)^{1/2})$. Тут числовий параметр s є дійсним, а функціональний параметр φ — повільно змінним на нескінченності за Й. Карамата [23].

У роботах [24 – 30] досліджено параболічні задачі у $2b$-анізотропних просторах Хермандера $H^{s,s/(2b),\varphi}$, де $2b$ — параболічна вага рівняння, а параметри s і φ — такі, як і в згаданій еліптичній теорії.

Так, у статті [30] було доведено теорему про коректну розв'язність початково-крайових задач для загального багатовимірного лінійного параболічного рівняння другого порядку з крайовою умовою Діріхле або загальною крайовою умовою першого порядку у підходящих парах гільбертових анізотропних просторів Хермандера. Розв'язки цих задач належать просторам $H^{s,s/2,\varphi}$, де $s > 2$. З точки зору застосувань, зокрема при дослідженні питання, коли узагальнений розв'язок задачі буде її класичним розв'язком, є важливим також і граничний випадок $s = 2$. Мета даної роботи — поширити результати статті [30] на цей випадок.

2. Постановка задачі. Нехай довільно задано ціле число $n \geq 2$, дійсне число $\tau > 0$ і обмежену область $G \subset \mathbb{R}^n$ з нескінченно гладкою межею $\Gamma := \partial G$. Позначимо через $\Omega := G \times (0,\tau)$ циліндр в $\mathbb{R}^{n+1}$, $S := \Gamma \times (0,\tau)$ — його бічна поверхня. Тоді $\overline{\Omega} := \overline{G} \times [0,\tau]$ і $\overline{S} := \Gamma \times [0,\tau]$ — замикання Ω і S відповідно.

Для параболічного рівняння другого порядку, заданого в Ω, розглянемо початково-крайові задачі з крайовою умовою Діріхле або загальною крайовою умовою першого порядку:

$$Au \equiv \partial_t u(x,t) + \sum_{|\alpha|\leq 2} a^{\alpha}(x,t)\, D_x^{\alpha} u(x,t) = f(x,t) \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{1}$$

$$u(x,0) = h(x) \quad \text{при} \quad x \in G, \tag{2}$$

$$u(x,t)\big|_S = g(x,t) \quad \text{при} \quad x \in \Gamma, \quad 0 < t < \tau, \tag{3}$$

або

$$Bu\Big|_S \equiv \left.\left(\sum_{j=1}^{n} b_j(x,t) D_j u(x,t) + b_0(x,t) u(x,t)\right)\right|_S = g(x,t) \quad \text{при} \quad x \in \Gamma, \quad 0 < t < \tau. \tag{4}$$

Всі коефіцієнти диференціальних виразів A і B вважаємо нескінченно гладкими комплекснозначними функціями, тобто $a^{\alpha} \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, $b_j \in C^{\infty}(\overline{S})$. Використовуємо такі позначення для частинних похідних:

$$D_x^{\alpha} := D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}, \quad D_j := i\,\partial/\partial x_j, \quad \partial_t := \partial/\partial t.$$

Тут $x = (x_1,\ldots,x_n)$ — довільна точка простору $\mathbb{R}^n$, $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ — мультиіндекс і $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Підсумовування в (1) проводиться за цілими індексами $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \geq 0$, що задовольняють умову, зазначену під знаком суми.

Припускаємо [1] (§ 9, п. 1), що рівняння (1) є параболічним за Петровським у замкнутому циліндрі $\overline{\Omega}$, а граничний диференціальний оператор B накриває диференціальний оператор A на бічній поверхні $\overline{S}$ цього циліндра. Це означає виконання таких двох умов.

Умова 1. Для довільних $x \in \overline{G}$, $t \in [0,\tau]$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ та $p \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} p \geq 0$,

$$A^{(0)}(x,t,\xi,p) \equiv p + \sum_{|\alpha|=2} a^{\alpha}(x,t)\,\xi^{\alpha} \neq 0 \quad \text{за умови} \quad |\xi| + |p| \neq 0.$$

Довільно виберемо $x \in \Gamma$, $t \in [0,\tau]$, дотичний вектор $\eta = (\eta_1,\ldots,\eta_n) \in \mathbb{R}^n$ до межі Γ у точці x та число $p \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} p \geq 0$, такі, що $|\eta| + |p| \neq 0$. Нехай $\nu(x) = (\nu_1(x),\ldots,\nu_n(x))$ — орт внутрішньої нормалі до межі Γ у точці x.

Умова 2. Для кожного такого вибору x, t, η та p

а) $\sum_{j=1}^{n} b_j(x,t)\nu_j(x) \neq 0$,

б) число $\zeta = -\Big(\sum_{j=1}^{n} b_j(x,t)\eta_j\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} b_j(x,t)\nu_j(x)\Big)^{-1}$ не є коренем полінома $A^{(0)}\big(x,t,\eta+\zeta\nu(x),p\big)$ змінної $\zeta \in \mathbb{C}$.

З умови 1 випливає, що коли всі коефіцієнти $b_j(x,t)$, $j = 1,\ldots,n$ є дійсними, то частина б) в умові 2 виконується автоматично.

3. Простори Хермандера. У роботі Л. Хермандера [8] (п. 2.2) було введено і досліджено гільбертові функціональні простори $H^{\mu} := \mathcal{B}_{2,\mu}$. Згодом ці простори дослідили також Л. Р. Волевич і Б. П. Панеях [31] (§ 2, 3). Показником регулярності функцій (або розподілів), що утворюють простір $H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$, де ціле $k \geq 1$, є вимірна за Борелем функція $\mu : \mathbb{R}^k \to (0, \infty)$, яка задовольняє таку умову: існують додатні числа c та l такі, що $\mu(\xi)/\mu(\eta) \leq c\,(1 + |\xi - \eta|)^l$ для будь-яких $\xi, \eta \in \mathbb{R}^k$.

За означенням комплексний лінійний простір $H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$ складається з усіх повільно зростаючих розподілів $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^k)$, перетворення Фур'є $\widehat{w}$ яких є локально інтегровними за Лебегом функціями, що задовольняють умову

$$\int\limits_{\mathbb{R}^k} \mu^2(\xi)|\widehat{w}(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

(У роботі всі функції та розподіли вважаються комплекснозначними.) У просторі $H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$ скалярний добуток означено формулою

$$(w_1, w_2)_{H^{\mu}(\mathbb{R}^k)} = \int\limits_{\mathbb{R}^k} \mu^2(\xi)\widehat{w_1}(\xi)\overline{\widehat{w_2}(\xi)}d\xi,$$

де $w_1, w_2 \in H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$. Цей скалярний добуток породжує норму $\|w\|_{H^{\mu}(\mathbb{R}^k)} := (w, w)^{1/2}_{H^{\mu}(\mathbb{R}^k)}$. Простір $H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$ є гільбертовим і сепарабельним відносно введеного у ньому скалярного добутку. Цей простір є неперервно вкладеним у $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^k)$, а множина $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^k)$ — щільною в ньому [8] (п. 2.2).

Нам знадобиться версія простору $H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$ для довільної відкритої множини $V \neq \varnothing$. Лінійний простір $H^{\mu}(V)$ складається, за означенням, із звужень $u = w \restriction V$ всіх розподілів $w \in H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$ на множину V. У цьому просторі норму задано формулою

$$\|u\|_{H^{\mu}(V)} := \inf\bigl\{\|w\|_{H^{\mu}(\mathbb{R}^k)} : w \in H^{\mu}(\mathbb{R}^k),\ u = w \restriction V\bigr\}. \tag{5}$$

Іншими словами, $H^{\mu}(V)$ є фактор-простором простору $H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$ за його підпростором

$$H^{\mu}_{Q}(\mathbb{R}^k) := \bigl\{w \in H^{\mu}(\mathbb{R}^k) : \operatorname{supp} w \subseteq Q := \mathbb{R}^k \backslash V\bigr\}. \tag{6}$$

Тому простір $H^{\mu}(V)$ є гільбертовим і сепарабельним. Норма (5) породжується скалярним добутком

$$(u_1, u_2)_{H^{\mu}(V)} := (w_1 - \Upsilon w_1, w_2 - \Upsilon w_2)_{H^{\mu}(\mathbb{R}^k)},$$

де $w_j \in H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$, $w_j = u_j$ у V для кожного $j \in \{1, 2\}$. Тут Υ — ортогональний проектор простору $H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$ на його підпростір (6). У просторі $H^{\mu}(V)$ щільна множина $C_0^{\infty}(\overline{V}) :=$ $:= \{w \restriction_{\overline{V}} : w \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^k)\}$.

Для зручності позначень приймемо $\gamma := 1/2$. Далі будемо використовувати показники регулярності вигляду

$$\mu_{s,\varphi}(\xi', \xi_k) := \mu(\xi', \xi_k) := \bigl(1 + |\xi'|^2 + |\xi_k|^{2\gamma}\bigr)^{s/2}\varphi\bigl((1 + |\xi'|^2 + |\xi_k|^{2\gamma})^{1/2}\bigr), \tag{7}$$

де $\xi' \in \mathbb{R}^{k-1}$ та $\xi_k \in \mathbb{R}$ — аргументи функції μ. Тут числовий параметр s є дійсним, а функціональний параметр φ належить $\mathcal{M}$. За означенням клас $\mathcal{M}$ складається з усіх вимірних за Борелем функцій $\varphi : [1, \infty) \to (0, \infty)$, які задовольняють дві умови:

а) обидві функції φ та $1/\varphi$ обмежені на кожному відрізку $[1,b]$, де $1<b<\infty$;

б) функція φ повільно змінюється за Й. Карамата на нескінченності, а саме, $\varphi(\lambda r)/\varphi(r)\to 1$ при $r\to\infty$ для кожного $\lambda>0$.

Теорію повільно змінних функцій (на нескінченності) викладено, наприклад, у монографії [23]. Їх важливим прикладом є функції вигляду

$$\varphi(r) := (\log r)^{\theta_1}\,(\log\log r)^{\theta_2}\ldots(\underbrace{\log\ldots\log}_{k\ \text{разів}} r\,)^{\theta_k}\quad \text{при}\quad r\gg 1,$$

де параметри $k\in\mathbb{N}$ та $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k\in\mathbb{R}$ є довільними.

Нехай $s\in\mathbb{R}$ і $\varphi\in\mathcal{M}$. Розв'язки u початково-крайових задач (1)–(3) та (1), (2), (4) і праві частини f рівняння (1) будемо розглядати в анізотропних гільбертових функціональних просторах Хермандера $H^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega):=H^{\mu}(\Omega)$, де показник μ визначено формулою (7), у якій $k:=n+1$.

Якщо $\varphi(r)\equiv 1$, то $H^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega)$ стає анізотропним гільбертовим простором Соболєва порядку $(s,s\gamma)$; позначимо його через $H^{s,s\gamma}(\Omega)$. Тут s — показник регулярності розподілу $u=u(x,t)$ за просторовою змінною $x\in\Omega$, а $s\gamma$ — показник регулярності за часовою змінною $t\in(0,\tau)$. В загальному випадку, коли $\varphi\in\mathcal{M}$ є довільною, мають місце неперервні та щільні вкладення

$$H^{s_1,s_1\gamma}(\Omega)\hookrightarrow H^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega)\hookrightarrow H^{s_0,s_0\gamma}(\Omega)\quad\text{при}\quad s_0<s<s_1. \tag{8}$$

Справді, оскільки функція φ належить $\mathcal{M}$, то існують додатні числа c_0 і c_1 такі, що $c_0 r^{s_0-s}\leq$ $\leq\varphi(r)\leq c_1 r^{s_1-s}$ для всіх $r\geq 1$ [23] (п. 1.5, 1^0). Тоді

$$c_0\,\mu_{s_0,1}(\xi',\xi_{n+1})\leq\mu_{s,\varphi}(\xi',\xi_{n+1})\leq c_1\,\mu_{s_1,1}(\xi',\xi_{n+1})$$

для довільних $\xi'\in\mathbb{R}^n$ та $\xi_{n+1}\in\mathbb{R}$. Звідси безпосередньо випливають неперервні вкладення просторів (8). Ці вкладення щільні, оскільки множина $C_0^{\infty}(\overline{\Omega})$ щільна в усіх цих просторах.

Вкладення (8) показують, що функціональний параметр φ визначає додаткову гладкість по відношенню до основної анізотропної $(s,s\gamma)$-гладкості. Якщо $\varphi(r)\to\infty$ (або $\varphi(r)\to 0$) при $r\to\infty$, то φ визначає позитивну (або негативну) додаткову гладкість. Іншими словами, φ уточнює основну гладкість $(s,s\gamma)$.

Результати цієї роботи пов'язані з такими просторами Хермандера, де $\varphi\in\mathcal{M}$ є зростаючою (в нестрогому сенсі) функцією. Тому, для зручності, позначимо через $\mathcal{M}_1$ клас усіх зростаючих (в нестрогому сенсі) функцій $\varphi\in\mathcal{M}$. Подібно до (8), для довільної $\varphi\in\mathcal{M}_1$ має місце неперервне та щільне вкладення

$$H^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega)\hookrightarrow H^{s,s\gamma}(\Omega). \tag{9}$$

Це вкладення є безпосереднім наслідком зростання функції φ.

Праві частини g крайових умов (3) та (4) будуть належати анізотропним просторам Хермандера, заданим на бічній поверхні $S=\Gamma\times(0,\tau)$ циліндра Ω. Означимо ці простори, використавши спеціальні локальні карти на S (див. [29], п. 1).

Нехай $s>0$ і $\varphi\in\mathcal{M}$. Попередньо для відкритої смуги $\Pi:=\mathbb{R}^{n-1}\times(0,\tau)$ розглянемо гільбертові простори $H^{s,s\gamma,\varphi}(\Pi):=H^{\mu}(\Pi)$, де показник μ визначено формулою (7), у якій $k:=n$. Довільно виберемо скінченний атлас із C^{∞}-структури на замкненому многовиді Γ. Нехай цей атлас утворений локальними картами $\theta_j:\mathbb{R}^{n-1}\leftrightarrow\Gamma_j,\ j=1,\ldots,\lambda$. Тут відкриті множини $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_\lambda$ складають покриття многовиду Γ. Окрім цього, довільно виберемо функції $\chi_j \in C^\infty(\Gamma)$, $j = 1, \ldots, \lambda$, такі, що $\operatorname{supp} \chi_j \subset \Gamma_j$ і $\sum_{j=1}^{\lambda} \chi_j \equiv 1$ на Γ.

За означенням лінійний простір $H^{s,s\gamma,\varphi}(S)$ складається з усіх функцій $v \in L_2(S)$ на многовиді S таких, що для кожного номера $j \in \{1, \ldots, \lambda\}$ функція $v_j(x,t) := \chi_j(\theta_j(x))\, v(\theta_j(x), t)$ аргументів $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ і $t \in (0,\tau)$ належить до $H^{s,s\gamma,\varphi}(\Pi)$. У просторі $H^{s,s\gamma,\varphi}(S)$ скалярний добуток означено формулою

$$(v, g)_{H^{s,s\gamma,\varphi}(S)} := \sum_{j=1}^{\lambda} (v_j, g_j)_{H^{s,s\gamma,\varphi}(\Pi)},$$

де $v, g \in H^{s,s\gamma,\varphi}(S)$. Він породжує норму $\|v\|_{H^{s,s\gamma,\varphi}(S)} := (v,v)^{1/2}_{H^{s,s\gamma,\varphi}(S)}$.

Зауважимо, що простір $H^{s,s\gamma,\varphi}(S)$ означено за допомогою спеціальних локальних карт на S

$$\theta_j^* : \Pi = \mathbb{R}^{n-1} \times (0,\tau) \leftrightarrow \Gamma_j \times (0,\tau) \quad \text{для всіх} \quad j \in \{1, \ldots, \lambda\},$$

де $\theta_j^*(x,t) = (\theta_j(x), t)$, $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, $t \in (0,\tau)$. Цей простір є повним (гільбертовим) та не залежить з точністю до еквівалентності норм від вибору локальних карт і розбиття одиниці на Γ [29] (теорема 1).

Нам також знадобляться ізотропні простори Хермандера $H^{s,\varphi}(V)$, де $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$, а V — довільна відкрита непорожня множина. За означенням $H^{s,\varphi}(V)$ — гільбертів простір $H^{\mu}(V)$, де

$$\mu(\xi) = \bigl(1 + |\xi|^2\bigr)^{s/2} \varphi\bigl((1 + |\xi|^2)^{1/2}\bigr). \tag{10}$$

Тут $\xi \in \mathbb{R}^k$ — аргумент функції μ. Оскільки функція μ є радіальною (залежить лише від $|\xi|$), то простір $H^{s,\varphi}(V)$ є ізотропним. Ми будемо використовувати простори $H^{s,\varphi}(V)$ у випадках $V = \mathbb{R}^k$ і $V = G$. До просторів $H^{s,\varphi}(G)$ буде належати права частина h початкової умови (2).

Окрім того, як допоміжні, нам будуть потрібні простори $H^{s,\varphi}(\Gamma)$. Подібно до просторів на S, означимо їх за допомогою локальних карт θ_j, $j = 1, \ldots, \lambda$, вказаних вище. Нехай $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. За означенням лінійний простір $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ складається з усіх розподілів $w \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ на многовиді Γ таких, що для кожного номера $j \in \{1, \ldots, \lambda\}$ розподіл $w_j(x) := \chi_j(\theta_j(x))\, w(\theta_j(x))$ аргументу $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ належить до $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^{n-1})$. У просторі $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ скалярний добуток означено формулою

$$(w, g)_{H^{s,\varphi}(\Gamma)} := \sum_{j=1}^{\lambda} (w_j, g_j)_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^{n-1})}, \qquad w, g \in H^{s,\varphi}(\Gamma).$$

Він породжує норму $\|w\|_{H^{s,\varphi}(\Gamma)} := (w,w)^{1/2}_{H^{s,\varphi}(\Gamma)}$. Простір $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ є гільбертовим та не залежить з точністю до еквівалентності норм від вибору локальних карт і розбиття одиниці на Γ [15] (теорема 2.3).

Ізотропні простори $H^{s,\varphi}$ виділили і систематично використовували В. А. Михайлець та О. О. Мурач в теорії еліптичних крайових задач [15, 16].

Якщо $\varphi \equiv 1$, то означені вище простори стають соболєвськими просторами (анізотропними або ізотропними). У цьому випадку будемо нехтувати індексом φ у позначеннях просторів.

4. Основні результати. Розглянемо спочатку задачу (1) – (3), яка відповідає крайовій умові Діріхле. Нас буде цікавити розв'язок u цієї задачі, що належить простору $H^{2,1,\varphi}(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{M}_1$. Для його існування праві частини задачі повинні задовольняти деяку умову узгодження (див. [1] (§11), або [2] (гл. 4, §5), або [30] (п. 3)). Покажемо, як виникає ця умова, спираючись на соболєвську теорію параболічних задач ($\varphi \equiv 1$).

Пов'яжемо із задачею (1)–(3) лінійне відображення

$$\Lambda_{\mathrm{D}} : u \mapsto (Au,\, u\restriction_{\overline{S}},\, u(\cdot,0)), \qquad u \in C^{\infty}(\overline{\Omega}). \tag{11}$$

Нехай $s \geq 2$. Відображення (11) єдиним чином продовжується (за неперервністю) до обмеженого оператора

$$\Lambda_{\mathrm{D}} : H^{s,s/2}(\Omega) \to H^{s-2,(s-2)/2}(\Omega) \oplus H^{s-1/2,s/2-1/4}(S) \oplus H^{s-1}(G).$$

Це означає, що для кожної функції $u = u(x,t)$ з соболєвського простору $H^{s,s/2}(\Omega)$ означено праві частини задачі

$$f \in H^{s-2,(s-2)/2}(\Omega), \quad g \in H^{s-1/2,s/2-1/4}(S) \quad \text{та} \quad h \in H^{s-1}(G).$$

Оскільки (див. (8) і (9))

$$H^{2+\varepsilon,(2+\varepsilon)/2}(\Omega) \hookrightarrow H^{2,1,\varphi}(\Omega) \hookrightarrow H^{2,1}(\Omega) \quad \text{для довільного} \quad \varepsilon > 0,$$

то достатньо розглядати значення s із проміжку $[2; 5/2)$. У цьому випадку умову узгодження будуть задовольняти функції g і h. Вона природно виникає так. Для функції u означено сліди $\partial_t^k u(\cdot,0) \in H^{s-1-2k}(G)$ для всіх цілих k таких, що $0 \leq k < (s-1)/2$, і лише для таких цілих k. Оскільки $2 \leq s < 5/2$, то означено лише слід $u(\cdot,0) \in H^{s-1}(G)$. Цей слід виражається з початкової умови (3) через функцію h:

$$u(x,0) = h(x), \tag{12}$$

де $x \in G$ є довільним.

Окрім того, для цілих k таких, що $0 \leq k < (s-3/2)/2$, і лише для таких цілих k, означено сліди $\partial_t^k g(\cdot,0) \in H^{s-3/2-2k}(\Gamma)$. Оскільки $2 \leq s < 5/2$, то означено лише слід $g(\cdot,0) \in H^{s-3/2}(\Gamma)$. Тому, згідно з крайовою умовою (2), виконується рівність

$$u(\cdot,0) = g(\cdot,0) \tag{13}$$

на Γ.

Підставляючи (12) у (13), дістаємо умову узгодження

$$g\restriction\Gamma = h\restriction\Gamma. \tag{14}$$

Тепер сформулюємо основний результат для задачі (1)–(3). Це теорема про її коректну розв'язність у підходящих парах просторів Хермандера, введених у п. 2. Попередньо для довільних параметрів $s \in [2; 5/2)$ і $\varphi \in \mathcal{M}_1$ введемо гільбертів простір $\mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi}$. Позначимо

$$\mathcal{H}_{\mathrm{D}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi} := H^{s-2,(s-2)/2,\varphi}(\Omega) \oplus H^{s-1/2,s/2-1/4,\varphi}(S) \oplus H^{s-1,\varphi}(G).$$

За означенням лінійний простір $\mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi}$ складається з усіх векторів $\bigl(f,g,h\bigr) \in \mathcal{H}_{\mathrm{D}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi}$, які задовольняють умову узгодження (14). Цей лінійний простір наділяється скалярним добутком і нормою з гільбертового простору $\mathcal{H}_{\mathrm{D}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi}$. Простір $\mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi}$ є повним, тобто гільбертовим.

Цей факт відомий у соболєвському випадку $\varphi \equiv 1$ і є наслідком обмеженості у відповідних анізотропних соболєвських просторах крайових операторів, що фігурують у формулі (14). У загальному випадку, коли φ належить $\mathcal{M}_1$, повнота простору $\mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi}$ є наслідком рівності

$$\mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi} = \mathcal{H}_{\mathrm{D}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi} \cap \mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{s-2,(s-2)/2}.$$

Права частина цієї рівності є гільбертовим простором відносно скалярного добутку, що є сумою скалярних добутків у гільбертових просторах — компонентах перетину. Окрім того, норми у просторах, з'єднаних знаком рівності, еквівалентні на підставі неперервного вкладення

$$\mathcal{H}_{\mathrm{D}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi} \hookrightarrow \mathcal{H}_{\mathrm{D}}^{s-2,(s-2)/2},$$

яке є наслідком формули (9) та її очевидних аналогів для просторів на S і на G. Тому є повним і простір у лівій частині цієї рівності. З останнього вкладення випливає також, що умови узгодження (14) коректно сформульовані для довільного вектора $\big(f, g, h\big) \in \mathcal{H}_{\mathrm{D}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi}$, оскільки вони є коректними, якщо цей вектор лежить у ширшому анізотропному соболєвському просторі $\mathcal{H}_{\mathrm{D}}^{s-2,(s-2)/2}$.

Теорема 1. *Відображення* (11) *єдиним чином продовжується* (*за неперервністю*) *до ізоморфізму*

$$\Lambda_{\mathrm{D}} \colon H^{2,1,\varphi}(\Omega) \leftrightarrow \mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{0,0,\varphi} \tag{15}$$

для довільного $\varphi \in \mathcal{M}_1$.

Перейдемо до розгляду задачі (1), (2), (4), яка відповідає загальній крайовій умові першого порядку. Пов'яжемо з нею лінійне відображення

$$\Lambda_{\mathrm{N}} \colon u \mapsto (Au,\, Bu\!\restriction_{\overline{S}},\, u(\cdot,0)), \quad \text{де} \quad u \in C^{\infty}(\overline{\Omega}). \tag{16}$$

Відображення (11) єдиним чином продовжується (за неперервністю) до обмеженого оператора

$$\Lambda_{\mathrm{N}} \colon H^{s,s/2}(\Omega) \to H^{s-2,(s-2)/2}(\Omega) \oplus H^{s-3/2,s/2-3/4}(S) \oplus H^{s-1}(G).$$

Тепер, на відміну від попередньої задачі Діріхле, якщо $u \in H^{s,s/2}(\Omega)$, то $g \in H^{s-3/2,s/2-3/4}(S)$. Тобто сліди $\partial_t^k g(\cdot,0) \in H^{s-5/2-2k}(\Gamma)$ означено для цілих k таких, що $0 \le k < (s-5/2)/2$, і лише для таких цілих k. Оскільки $s < 5/2$, то жодний слід $\partial_t^k g(\cdot,0)$ не існує. Тому для задачі (1), (2), (4) умови узгодження правих частин у розглядуваному випадку не існують.

Тепер сформулюємо основний результат для задачі (1), (2), (4). Попередньо для довільних параметрів $s \in [2; 5/2)$ і $\varphi \in \mathcal{M}_1$ позначимо

$$\mathcal{H}_{\mathrm{N}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi} := H^{s-2,(s-2)/2,\varphi}(\Omega) \oplus H^{s-3/2,s/2-3/4,\varphi}(S) \oplus H^{s-1,\varphi}(G).$$

Теорема 2. *Відображення* (16) *єдиним чином продовжується* (*за неперервністю*) *до ізоморфізму*

$$\Lambda_{\mathrm{N}} \colon H^{2,1,\varphi}(\Omega) \leftrightarrow \mathcal{H}_{\mathrm{N}}^{0,0,\varphi} \tag{17}$$

для довільного $\varphi \in \mathcal{M}_1$.

У соболєвському випадку, коли $\varphi \equiv 1$, ці теореми містяться у результатах Аграновича, Вішика [1] (теорема 12.1), Ліонса, Мадженеса [3] (теорема 6.2) і Житарашу [4] (теорема 9.1). У статті Солоннікова [32] (теорема 17) для розглянутих задач доведено лише апріорні оцінки їх розв'язків.

5. Інтерполяція з функціональним параметром. Нагадаємо означення інтерполяції з функціональним параметром у випадку загальних гільбертових просторів та наведемо інтерполяційні властивості, які будуть використані у наступному пункті. Ми дотримуємося монографії [15] (п. 1.1) (див. також [22], п. 2). Обмежимось розглядом випадку сепарабельних комплексних гільбертових просторів.

Нехай $X := [X_0, X_1]$ — впорядкована пара сепарабельних комплексних гільбертових просторів, для яких має місце неперервне і щільне вкладення $X_1 \hookrightarrow X_0$. Таку пару називають допустимою. Для неї існує оператор J такий, що він є самоспряженим додатно визначеним оператором в X_0 з областю визначення X_1, до того ж $\|Ju\|_{X_0} = \|u\|_{X_1}$. Оператор J визначається парою X однозначно і називається породжуючим оператором для X.

Нехай ψ належить $\mathcal{B}$. Тут через $\mathcal{B}$ позначено множину всіх вимірних за Борелем функцій $\psi : (0, \infty) \to (0, \infty)$, для яких ψ є обмеженою на кожному відрізку $[a, b]$, де $0 < a < b < \infty$, і $1/\psi$ є обмеженою на кожному промені $[a, \infty)$, де $a > 0$.

Розглянемо оператор $\psi(J)$. Він є додатно визначеним оператором в X_0 як борелівська функція ψ від J. Позначимо через $[X_0, X_1]_\psi$, або скорочено X_ψ, область визначення оператора $\psi(J)$, наділену скалярним добутком

$$(u_1, u_2)_{X_\psi} := (\psi(J)u_1, \psi(J)u_2)_{X_0}.$$

Він породжує норму $\|u\|_{X_\psi} := \|\psi(J)u\|_{X_0}$. Простір X_ψ є сепарабельним і гільбертовим.

Функцію $\psi \in \mathcal{B}$ назвемо інтерполяційним параметром, якщо для всіх допустимих пар $X = [X_0, X_1]$ та $Y = [Y_0, Y_1]$ гільбертових просторів і для довільного лінійного відображення T, заданого на X_0, правильним є наступне: якщо звуження відображення T на X_j є обмеженим оператором $T : X_j \to Y_j$ для кожного $j \in \{0, 1\}$, то звуження відображення T на X_ψ також є обмеженим оператором $T : X_\psi \to Y_\psi$.

Якщо ψ — інтерполяційний параметр, то будемо казати, що гільбертовий простір X_ψ отримано в результаті інтерполяції з функціональним параметром ψ пари $X = [X_0, X_1]$. В цьому випадку маємо щільні та неперервні вкладення $X_1 \hookrightarrow X_\psi \hookrightarrow X_0$.

Нам буде потрібний такий критерій того, що функція $\psi \in \mathcal{B}$ є інтерполяційним параметром [14] (теорема 4.2).

Твердження 1. *Нехай $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ такі, що $s_0 < s_1$, а функція ψ належить $\mathcal{B}$. Покладемо*

$$\beta(t) := t^{s_0}\, \psi(t^{s_1 - s_0}) \quad \text{для} \quad t \geq 1.$$

Функція ψ є інтерполяційним параметром тоді і тільки тоді, коли існує таке число $c \geq 1$, що виконуються нерівності

$$\frac{\beta(t)}{t^{s_0}} \leq c\, \frac{\beta(\tau)}{\tau^{s_0}} \quad \text{і} \quad \frac{\beta(\tau)}{\tau^{s_1}} \leq c\, \frac{\beta(t)}{t^{s_1}} \quad \text{для всіх} \quad t \geq 1 \quad \text{і} \quad \tau \geq t. \tag{18}$$

У кінці цього пункту сформулюємо дві властивості інтерполяції, які будуть використані у подальших доведеннях. Перша з них дозволяє звести інтерполяцію підпросторів або факторпросторів до інтерполяції початкових просторів (див. [15] (п. 1.1.6) та [33] (п. 1.17)). Зазначимо, що підпростори припускаються замкненими, і будемо розглядати взагалі неортогональні проектори на підпростори.

Твердження 2. *Нехай $X = [X_0, X_1]$ — допустима пара гільбертових просторів, а Y_0 — підпростір в X_0. Тоді $Y_1 := X_1 \cap Y_0$ є підпростором в X_1. Припустимо, що існує лінійне* *відображення* $P : X_0 \to X_0$, *яке для кожного* $j \in \{0, 1\}$ *є проектором простору* X_j *на його підпростір* Y_j. *Тоді пари* $[Y_0, Y_1]$ *та* $[X_0/Y_0, X_1/Y_1]$ *є допустимими і для довільного інтерполяційного параметра* $\psi \in \mathcal{B}$ *справджуються рівності*

$$[Y_0, Y_1]_\psi = X_\psi \cap Y_0,$$
$$[X_0/Y_0, X_1/Y_1]_\psi = X_\psi/(X_\psi \cap Y_0)$$

з еквівалентністю норм. Тут $X_\psi \cap Y_0$ — *підпростір у* X_ψ.

Друга властивість дозволяє звести інтерполяцію прямих сум гільбертових просторів до інтерполяції їх доданків.

Твердження 3. *Нехай* $[X_0^{(j)}, X_1^{(j)}]$, *де* $j = 1, \ldots, p$, — *скінченний набір допустимих пар гільбертових просторів. Тоді*

$$\Bigl[\bigoplus_{j=1}^{p} X_0^{(j)}, \bigoplus_{j=1}^{p} X_1^{(j)}\Bigr]_\psi = \bigoplus_{j=1}^{p} [X_0^{(j)}, X_1^{(j)}]_\psi$$

з еквівалентністю норм. Тут $\psi \in \mathcal{B}$ — *довільний інтерполяційний параметр.*

6. Доведення результатів. Виявляється, що означені у п. 2 анізотропні $H^{s,s\gamma,\varphi}$ і ізотропні $H^{s,\varphi}$ простори Хермандера можна одержати в результаті інтерполяції з підходящим функціональним параметром відповідних пар гільбертових просторів Соболєва. Спочатку покажемо це. Потім, скориставшись цими фактами, виведемо теореми 1 і 2 з вищезгаданого результату Ліонса – Мадженеса.

Нехай дійсні числа s_0 і s_1 такі, що $0 \le s_0 < s_1$, а функціональний параметр φ належить $\mathcal{M}_1$. Розглянемо функцію

$$\psi(r) := \begin{cases} \varphi(r^{1/(s_1-s_0)}) & \text{для} \quad r \ge 1, \\ \varphi(1) & \text{для} \quad 0 < r < 1. \end{cases} \tag{19}$$

Покажемо, що ця функція є інтерполяційним параметром. З означення класу $\mathcal{M}_1$ випливає, що ψ належить $\mathcal{B}$. Справді, ψ є обмеженою на кожному відрізку $[a, b]$, де $0 < a < b < \infty$, оскільки φ є обмеженою на кожному відрізку $[1, b]$, де $1 < b < \infty$. Також $1/\psi$ є обмеженою на кожному промені $[a, \infty)$, $a > 0$, оскільки φ є додатною зростаючою функцією. Тепер з твердження 1 випливає, що (19) — інтерполяційний параметр. Справді, запишемо для даного випадку нерівності (18) зі сталою $c = 1$:

$$\varphi(t) \le \varphi(\tau) \quad \text{і} \quad \tau^{s_0-s_1}\varphi(\tau) \le t^{s_0-s_1}\varphi(t) \quad \text{для всіх} \quad t \ge 1 \quad \text{і} \quad \tau \ge t. \tag{20}$$

Ці нерівності є правильними. Справді, ліва нерівність у (20) є наслідком зростання функції φ, а права — наслідком повільної змінності φ (див. [23, с. 27]).

Зауважимо, що існують функції $\varphi \in \mathcal{M}$, з якими (19) не є інтерполяційним параметром (див. [15], приклад 1.5).

Далі будемо інтерполювати пари соболєвських просторів з функціональним параметром ψ.

Інтерполяцію ізотропних соболєвських просторів досліджено в роботах В. А. Михайлеця та О. О. Мурача [14 – 16]. Нам знадобиться рівність

$$H^{s_0,\varphi}(G) = \bigl[H^{s_0}(G), H^{s_1}(G)\bigr]_\psi, \tag{21}$$

яка є правильною з точністю до еквівалентності норм. Тут $0 \le s_0 < s_1$, $\varphi \in \mathcal{M}_1$, інтерполяційний параметр ψ задано формулою (19). Рівність (21) є окремим випадком формули (4.2) з [14].

Встановимо версії формули (21) для просторів $H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^k)$, $H^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega)$ та $H^{s,s\gamma,\varphi}(S)$.

Лема 1. *Нехай натуральне* $k \ge 2$, $\gamma = 1/2$, *дійсні числа* s_0 *і* s_1 *такі, що* $0 \le s_0 < s_1$, *функціональний параметр* φ *належить* $\mathcal{M}_1$, *а* ψ — *інтерполяційний параметр, заданий формулою* (19). *Тоді правильною є інтерполяційна формула*

$$H^{s_0,s_0\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^k) = \bigl[H^{s_0,s_0\gamma}(\mathbb{R}^k), H^{s_1,s_1\gamma}(\mathbb{R}^k)\bigr]_\psi \tag{22}$$

з рівністю норм.

Доведення. Позначимо для зручності

$$r_\gamma(\xi',\xi_k) := \bigl(1 + |\xi'|^2 + |\xi_k|^{2\gamma}\bigr)^{1/2} \quad \text{для будь-яких} \quad \xi' \in \mathbb{R}^{k-1}, \quad \xi_k \in \mathbb{R}.$$

Пара анізотропних просторів Соболєва $X = \bigl[H^{s_0,s_0\gamma}(\mathbb{R}^k), H^{s_1,s_1\gamma}(\mathbb{R}^k)\bigr]$ є допустимою. Породжуючий оператор для цієї пари задається формулою

$$J\colon w \mapsto \mathcal{F}^{-1}[r_\gamma^{s_1-s_0}\,\mathcal{F}w\,] \quad \text{з} \quad w \in H^{s_1,s_1\gamma}(\mathbb{R}^k).$$

Це безпосередньо випливає з означення цих просторів. Тут через $\mathcal{F}$ (та $\mathcal{F}^{-1}$) позначено оператори прямого (та оберненого) перетворення Фур'є (за всіма змінними) повільно зростаючих розподілів, заданих на $\mathbb{R}^k$. Оператор J за допомогою перетворення Фур'є зводиться до оператора множення на функцію $r_\gamma^{s_1-s_0}$ і встановлює ізометричний ізоморфізм $\mathcal{F}\colon H^{s_0,s_0\gamma}(\mathbb{R}^k) \leftrightarrow L_2\bigl(\mathbb{R}^k, r_\gamma^{2s_0}(\xi',\xi_k)d\xi'd\xi_k\bigr)$. Тому $\mathcal{F}$ зводить $\psi(J)$ до оператора множення на функцію

$$\psi(r_\gamma^{s_1-s_0}(\xi',\xi_k)) \equiv \varphi(r_\gamma(\xi',\xi_k)).$$

Тепер для кожного $w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$ можна записати наступне:

$$\|w\|^2_{X_\psi} = \|\psi(J)w\|^2_{H^{s_0,s_0\gamma}(\mathbb{R}^k)} =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^k} |\psi(r_\gamma^{s_1-s_0}(\xi',\xi_k))\,(\mathcal{F}w)(\xi',\xi_k)|^2\, r_\gamma^{2s_0}(\xi',\xi_k)d\xi'd\xi_k =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^k} r_\gamma^{2s_0}(\xi',\xi_k)\,\varphi^2(r_\gamma(\xi',\xi_k))\,|(\mathcal{F}w)(\xi',\xi_k)|^2\,d\xi'd\xi_k = \|w\|_{H^{s_0,s_0\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^k)}.$$

З цього випливає рівність просторів (22), оскільки в них обох є щільною множина $C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$. Зауважимо, що $C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$ є щільною у другому просторі, позначеному як X_ψ, тому що $C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$ є щільною у просторі $H^{s_1,s_1\gamma}(\mathbb{R}^k)$, який неперервно та щільно вкладений в X_ψ.

Лему 1 доведено.

Лема 2. *Нехай* $\gamma = 1/2$, *дійсні числа* s_0 *і* s_1 *такі, що* $0 \le s_0 < s_1$, *функціональний параметр* φ *належить* $\mathcal{M}_1$, *а* ψ — *інтерполяційний параметр, заданий формулою* (19). *Тоді правильними є інтерполяційні формули*

$$H^{s_0,s_0\gamma,\varphi}(\Omega) = \bigl[H^{s_0,s_0\gamma}(\Omega), H^{s_1,s_1\gamma}(\Omega)\bigr]_\psi, \tag{23}$$

$$H^{s_0,s_0\gamma,\varphi}(\Pi) = \bigl[H^{s_0,s_0\gamma}(\Pi), H^{s_1,s_1\gamma}(\Pi)\bigr]_\psi \tag{24}$$

з точністю до еквівалентності норм.

Доведення формул (23) та (24) спирається на твердження 2 у частині інтерполяції фактор-просторів і на базову інтерполяційну формулу (22).

Доведення формули (23) дослівно збігається з доведенням леми 1 з [30], а доведення формули (24) — з доведенням леми 2 з [29]. Для цього потрібно у доведеннях зазначених лем покласти $s := s_0$, в якості інтерполяційного параметра ψ взяти параметр (19) і використати інтерполяційну формулу (22).

Лема 3. *Нехай виконуються умови леми* 2. *Додатково припустимо, що* $s_0 > 0$. *Тоді правильною є інтерполяційна формула*

$$H^{s_0,s_0\gamma,\varphi}(S) = \bigl[H^{s_0,s_0\gamma}(S), H^{s_1,s_1\gamma}(S)\bigr]_{\psi} \tag{25}$$

з точністю до еквівалентності норм.

Формула (25) виводиться з (24) відомим способом „розпрямлення" та „склеювання" многовиду S. Доведення (25) дослівно збігається з доведенням теореми 2 з [29]. Для цього потрібно покласти $s := s_0$, в якості інтерполяційного параметра ψ взяти параметр (19) і використати інтерполяційну формулу (24).

Для доведення основних результатів роботи нам потрібне твердження про властивості оператора сліду в анізотропних просторах Хермандера. Воно є окремим випадком лем 2 і 3 з [30].

Твердження 4. *Для довільних дійсного числа* $s > 1$ *і функціонального параметра* $\varphi \in \mathcal{M}_1$ *правильними є такі твердження*:

(i) *лінійне відображення*

$$g \mapsto g\restriction\Gamma, \quad \text{де} \quad g \in C^{\infty}(\overline{S}),$$

продовжується за неперервністю до обмеженого оператора

$$R_{\Gamma}\colon H^{s,s/2,\varphi}(S) \to H^{s-1,\varphi}(\Gamma); \tag{26}$$

(ii) *існує таке лінійне відображення* $T\colon L_2(\Gamma) \mapsto L_2(S)$, *що його звуження на простір* $H^{s-1,\varphi}(\Gamma)$ *є лінійним обмеженим оператором*

$$T\colon H^{s-1,\varphi}(\Gamma) \to H^{s,s/2,\varphi}(S), \tag{27}$$

правим оберненим до оператора (26).

Перейдемо до встановлення основних результатів.

***Доведення теореми* 1.** Спочатку встановимо, що правильною є інтерполяційна формула

$$\mathcal{Q}^{0,0,\varphi}_{\mathrm{D}} = \bigl[\mathcal{Q}^{0,0}_{\mathrm{D}}, \mathcal{Q}^{s_1-2,(s_1-2)/2}_{\mathrm{D}}\bigr]_{\psi} \tag{28}$$

з точністю до еквівалентності норм. Тут $s_1 \in (2; 5/2)$, а ψ — інтерполяційний параметр, заданий формулою (19), у якій $s_0 = 2$.

Доведення формули (28) спирається на твердження 2 (у частині інтерполяції підпросторів) і інтерполяційну формулу для базових соболєвських просторів $\mathcal{H}^{\cdot,\cdot}_{\mathrm{D}}$.

Побудуємо лінійний оператор P, який для довільного $\sigma \in [2; 5/2)$ буде проектором соболєвського простору $\mathcal{H}^{\sigma-2,(\sigma-2)/2}_{\mathrm{D}}$ на його підпростір $\mathcal{Q}^{\sigma-2,(\sigma-2)/2}_{\mathrm{D}}$. Нехай $(f,g,h) \in \mathcal{H}^{\sigma-2,(\sigma-2)/2}_{\mathrm{D}}$. Покладемо

$$g^{*} := g + T\bigl(h\restriction\Gamma - g\restriction\Gamma\bigr). \tag{29}$$

Тут T є оператором (27), де $s := \sigma - 1/2$. Розглянемо відображення

$$P\colon (f, g, h) \mapsto (f, g^*, h),$$

де $(f, g, h) \in \mathcal{H}_{\mathrm{D}}^{\sigma-2,(\sigma-2)/2}$. Оператор P є шуканим. Справді, він є лінійним обмеженим оператором на просторі $\mathcal{H}_{\mathrm{D}}^{\sigma-2,(\sigma-2)/2}$. З його побудови випливає, що $P(f, g, h) \in \mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{\sigma-2,(\sigma-2)/2}$ для довільного $(f, g, h) \in \mathcal{H}_{\mathrm{D}}^{\sigma-2,(\sigma-2)/2}$. Більш того, якщо $(f, g, h) \in \mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{\sigma-2,(\sigma-2)/2}$, то $P(f, g, h) = (f, g, h)$. Справді, в цьому випадку правильною є рівність (14). З неї та з формули (29) випливає, що $g^* = g$.

Тепер скористаємось твердженням 2. Згідно з ним пара $\bigl[\mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{0,0}, \mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{s_1-2,(s_1-2)/2}\bigr]$ є допустимою і справджується рівність

$$\bigl[\mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{0,0}, \mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{s_1-2,(s_1-2)/2}\bigr]_{\psi} = \bigl[\mathcal{H}_{\mathrm{D}}^{0,0}, \mathcal{H}_{\mathrm{D}}^{s_1-2,(s_1-2)/2}\bigr]_{\psi} \cap \mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{0,0}. \tag{30}$$

Тут права частина рівності є підпростором інтерполяційного простору

$$\bigl[\mathcal{H}_{\mathrm{D}}^{0,0}, \mathcal{H}_{\mathrm{D}}^{s_1-2,(s_1-2)/2}\bigr]_{\psi}.$$

На підставі твердження 3 і формул (21), (23) і (25) можемо записати

$$\begin{aligned}
&\bigl[\mathcal{H}_{\mathrm{D}}^{0,0}, \mathcal{H}_{\mathrm{D}}^{s_1-2,(s_1-2)/2}\bigr]_{\psi} = \bigl[H^{0,0}(\Omega) \oplus H^{3/2,\,3/4}(S) \oplus H^{1}(G),\\
&H^{s_1-2,(s_1-2)/2}(\Omega) \oplus H^{s_1-1/2,\,s_1/2-1/4}(S) \oplus H^{s_1-1}(G)\bigr]_{\psi} =\\
&= \bigl[H^{0,0}(\Omega), H^{s_1-2,(s_1-2)/2}(\Omega)\bigr]_{\psi} \oplus \bigl[H^{3/2,\,3/4}(S), H^{s_1-1/2,\,s_1/2-1/4}(S)\bigr]_{\psi} \oplus\\
&\oplus \bigl[H^{1}(G), H^{s_1-1}(G)\bigr]_{\psi} = H^{0,0,\varphi}(\Omega) \oplus H^{3/2,\,3/4,\varphi}(S) \oplus H^{1,\varphi}(G) = \mathcal{H}_{\mathrm{D}}^{0,0,\varphi}.
\end{aligned}$$

Отже,

$$\bigl[\mathcal{H}_{\mathrm{D}}^{0,0}, \mathcal{H}_{\mathrm{D}}^{s_1-2,(s_1-2)/2}\bigr]_{\psi} = \mathcal{H}_{\mathrm{D}}^{0,0,\varphi} \tag{31}$$

з точністю до еквівалентності норм. На підставі (30) і (31) маємо

$$\bigl[\mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{0,0}, \mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{s_1-2,(s_1-2)/2}\bigr]_{\psi} = \mathcal{H}_{\mathrm{D}}^{0,0,\varphi} \cap \mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{0,0} = \mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{0,0,\varphi}. \tag{32}$$

Остання рівність є правильною, оскільки елементи просторів $\mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{0,0}$ і $\mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{0,0,\varphi}$ задовольняють одну і ту саму умову узгодження (14).

Тепер встановимо ізоморфізм (15). Виберемо довільне число $s_1 \in (2; 5/2)$. Завдяки згаданій вище теоремі Ліонса – Мадженеса [3] (теорема 6.2) маємо ізоморфізми у просторах Соболєва

$$\Lambda_{\mathrm{D}}\colon H^{2,1}(\Omega) \leftrightarrow \mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{0,0} \quad \text{і} \quad \Lambda_{\mathrm{D}}\colon H^{s_1,s_1/2}(\Omega) \leftrightarrow \mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{s_1-2,(s_1-2)/2}. \tag{33}$$

Застосувавши інтерполяцію з функціональним параметром ψ до (33), отримаємо ще один ізоморфізм

$$\Lambda_{\mathrm{D}}\colon \bigl[H^{2,1}(\Omega), H^{s_1,s_1/2}(\Omega)\bigr]_{\psi} \leftrightarrow [\mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{0,0}, \mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{s_1-2,(s_1-2)/2}]_{\psi}. \tag{34}$$

Тут параметр ψ задано формулою (19), у якій $s_0 = 2$. Цей ізоморфізм є розширенням за неперервністю відображення (11), оскільки $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ є щільним в області визначення (34). Застосувавши у (34) інтерполяційні формули (23) та (28), отримаємо (15).

Теорему 1 доведено.

***Доведення теореми* 2.** Спочатку встановимо, що правильною є інтерполяційна формула

$$\mathcal{H}_{\mathrm{N}}^{0,0,\varphi} = \left[\mathcal{H}_{\mathrm{N}}^{0,0}, \mathcal{H}_{\mathrm{N}}^{s_1-2,(s_1-2)/2}\right]_{\psi} \qquad (35)$$

з точністю до еквівалентності норм. Тут $s_1 \in (2; 5/2)$, а ψ — інтерполяційний параметр, заданий формулою (19), у якій $s_0 = 2$.

На підставі твердження 3 і формул (21), (23) і (25) можемо записати

$$\left[\mathcal{H}_{\mathrm{N}}^{0,0}, \mathcal{H}_{\mathrm{N}}^{s_1-2,(s_1-2)/2}\right]_{\psi} = \left[H^{0,0}(\Omega) \oplus H^{1/2,\,1/4}(S) \oplus H^{1}(G),\right.$$

$$\left. H^{s_1-2,(s_1-2)/2}(\Omega) \oplus H^{s_1-3/2,\,s_1/2-3/4}(S) \oplus H^{s_1-1}(G)\right]_{\psi} =$$

$$= \left[H^{0,0}(\Omega), H^{s_1-2,(s_1-2)/2}(\Omega)\right]_{\psi} \oplus \left[H^{1/2,\,1/4}(S), H^{s_1-3/2,\,s_1/2-3/4}(S)\right]_{\psi} \oplus$$

$$\oplus \left[H^{1}(G), H^{s_1-1}(G)\right]_{\psi} =$$

$$= H^{0,0,\varphi}(\Omega) \oplus H^{1/2,\,1/4,\varphi}(S) \oplus H^{1,\varphi}(G) = \mathcal{H}_{\mathrm{N}}^{0,0,\varphi}.$$

Отже, формула (35) є правильною з точністю до еквівалентності норм.

Тепер встановимо ізоморфізм (17). Виберемо довільне число $s_1 \in (2; 5/2)$. Завдяки згаданій вище теоремі Ліонса – Мадженеса [3] (теорема 6.2) маємо ізоморфізми у просторах Соболєва

$$\Lambda_{\mathrm{N}} \colon H^{2,1}(\Omega) \leftrightarrow \mathcal{H}_{\mathrm{N}}^{0,0} \quad \text{і} \quad \Lambda_{\mathrm{N}} \colon H^{s_1,s_1/2}(\Omega) \leftrightarrow \mathcal{H}_{\mathrm{N}}^{s_1-2,(s_1-2)/2}. \qquad (36)$$

Застосувавши інтерполяцію з функціональним параметром ψ до (36), отримаємо ще один ізоморфізм

$$\Lambda_{\mathrm{N}} \colon \left[H^{2,1}(\Omega), H^{s_1,s_1/2}(\Omega)\right]_{\psi} \leftrightarrow [\mathcal{H}_{\mathrm{N}}^{0,0}, \mathcal{H}_{\mathrm{N}}^{s_1-2,(s_1-2)/2}]_{\psi}. \qquad (37)$$

Тут параметр ψ задано формулою (19), у якій $s_0 = 2$. Цей ізоморфізм є розширенням за неперервністю відображення (16), оскільки $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ є щільним в області визначення (37). Застосувавши у (37) інтерполяційні формули (23) та (35), отримаємо (17).

Теорему 2 доведено.

Література

1. *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи мат. наук. – 1964. – **19**, № 3. – С. 53 – 161.
2. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
3. *Lions J.-L., Magenes E.* Non-homogeneous boundary-value problems and applications. – Berlin: Springer, 1972. – Vol. II. – xi+242 p.
4. *Житарашу Н. В.* Теоремы о полном наборе изоморфизмов в L_2-теории обобщенных решений граничных задач для одного параболического по И. Г. Петровскому уравнения // Мат. сб. – 1985. – **128(170)**, № 4. – С. 451 – 473.
5. *Eidel'man S. D., Zhitarashu N. V.* Parabolic boundary value problems // Operator Theory: Adv. and Appl. – Basel: Birkhäuser, 1998. – **101**. – xii+298 p.
6. *Eidel'man S. D.* Parabolic equations // Encycl. Math. Sci. Vol. 63. Partial Different. Equat. VI. – Berlin: Springer, 1994. – P. 205 – 316.
7. *Ивасишен С. Д.* Матрицы Грина параболических граничных задач. – Киев: Вища шк., 1990. – 200 с.
8. *Hörmander L.* Linear partial differential operators. – Berlin: Springer, 1963. – 285 p. (Рус. перевод: *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. – М.: Мир, 1965. – 380 с.)

9. *Лизоркин П. И.* Пространства обобщенной гладкости // Теория функциональных пространств / Х. Трибель. – М.: Мир, 1986. – С. 381 – 415.
10. *Paneah B.* The oblique derivative problem. The Poincaré problem. – Berlin: Wiley-VCH, 2000. – 348 p.
11. *Triebel H.* The structure of functions. – Basel: Birkhäuser, 2001. – xii+425 p.
12. *Farkas W., Leopold H.-G.* Characterisations of function spaces of generalized smoothness // Ann. mat. pura ed appl. – 2006. – **185**, № 1. – P. 1 – 62.
13. *Nicola F., Rodino L.* Global pseudodifferential calculas on Euclidean spaces. – Basel: Birkhäuser, 2010. – xi+306 p.
14. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Interpolation Hilbert spaces between Sobolev spaces // Results Math. – 2015. – **67**, № 1. – P. 135 – 152.
15. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Hoȑmander spaces, interpolation, and elliptic problems. – Berlin: De Gruyter, 2014. – xiv+297 p.
16. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* The refined Sobolev scale, interpolation, and elliptic problems // Banach J. Math. Anal. – 2012. – **6**, № 2. – P. 211 – 281.
17. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Improved scales of spaces and elliptic boundary-value problems. I // Ukr. Math. J. – 2006. – **58**, № 2. – P. 244 – 262.
18. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Improved scale of spaces and elliptic boundary-value problems. II // Ukr. Math. J. – 2006. – **58**, № 3. – P. 398 – 417.
19. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Refined scale of spaces and elliptic boundary-value problems. III // Ukr. Math. J. – 2007. – **59**, № 5. – P. 744 – 765.
20. *Murach A. A.* Elliptic pseudo-differential operators in a refined scale of spaces on a closed manifold // Ukr. Math. J. – 2007. – **59**, № 6. – P. 874 – 893.
21. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* An elliptic boundary-value problem in a two-sided refined scale of spaces // Ukr. Math. J. – 2008. – **60**, № 4. – P. 574 – 597.
22. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Interpolation with a function parameter and refined scale of spaces // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2008. – **14**, № 1. – P. 81 – 100.
23. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 144 с.
24. *Los V., Murach A. A.* Parabolic problems and interpolation with a function parameter // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2013. – **19**, № 2. – P. 146 – 160.
25. *Лось В. М., Мурач О. О.* Про гладкість розв'язків параболічних мішаних задач // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 2. – С. 219 – 234.
26. *Лось В. Н., Мурач А. А.* Параболические смешанные задачи в пространствах обобщенной гладкости // Доп. НАН України. – 2014. – № 6. – С. 23 – 31.
27. *Лось В. М.* Параболічні мішані задачі для систем Петровського в просторах узагальненої гладкості // Доп. НАН України. – 2014. – № 10. – С. 24 – 32.
28. *Los V. M.* Mixed problems for the two-dimensional heat-conduction equation in anisotropic Hörmander spaces // Ukr. Math. J. – 2015. – **67**, № 5. – P. 735 – 747.
29. *Лось В. М.* Анізотропні простори Хермандера на бічній поверхні циліндра // Нелінійні коливання. – 2015. – **18**, № 2. – С. 226 – 237.
30. *Лось В. М., Мурач О. О.* Теореми про ізоморфізми для деяких параболічних початково-крайових задач у просторах Хермандера // arXiv:1510.06270
31. *Волевич Л. Р., Панеях Б. П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения // Успехи мат. наук. – 1965. – **20**, № 1. – С. 3 – 74.
32. *Солонников В.А.* Априорные оценки для уравнений второго порядка параболического типа // Труды Мат. ин-та АН СССР. – 1964. – **70**. – С. 133 – 212.
33. *Triebel H.* Interpolation theory, function spaces, differential operators. – 2nd ed. – Heidelberg: Johann Ambrosius Barth, 1995.

Одержано 27.10.15