УДК 517.51

В. С. Романюк (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

КРАТНЫЙ БАЗИС ХААРА И m-ЧЛЕННЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССОВ БЕСОВА. II

We establish the exact-order estimates for the best m-term approximations in the multiple Haar basis H^d of functions from the Besov classes in the Lebesgue spaces $L_q(\mathbb{I}^d)$. We also present a practical algorithm of the construction of the extreme nonlinear m-term aggregates (in a sense of the exact-order estimates for approximations).

Встановлено точні за порядком оцінки найкращих m-членних наближень за кратним базисом Хаара H^d у просторах Лебега $L_q(\mathbb{I}^d)$ функцій із класів Бєсова. Наведено практично здійсненний алгоритм побудови екстремальних (у розумінні точних за порядком оцінок наближень) нелінійних m-членних агрегатів.

Настоящая статья является второй частью работы [19], поэтому в ней продолжается нумерация пунктов, формул, теорем и т. п., а также используются обозначения и определения из [19].

В п. 4 сформулированы и доказаны основные результаты: теорема 2 о совпадении по порядку m-членных наилучших приближений по базису H^d и приближений с помощью p-жадных аппроксимант индивидуальных функций из $L_p(\mathbb{I}^d)$, $1 < p < \infty$, и теорема 3 об m-членном приближении по системе H^d единичных шаров пространств $B^{\alpha}_{p,\theta}$ в пространстве $L_q(\mathbb{I}^d)$.

В п. 5 вводится в рассмотрение новая шкала пространств $B^{\Lambda}_{\theta}(L_p) \subset L_p(\mathbb{I}^d)$, изучены элементарные свойства этих пространств и установлены оценки нелинейного приближения единичных шаров этих пространств в $L_q(\mathbb{I}^d)$ по типу теоремы 3.

4. Теоремы об m-членных приближениях по базису Хаара H^d.

Теорема 2. *Пусть $1 < p < \infty$. Тогда для любого $g \in L_p(\mathbb{I}^d)$ справедливо соотношение*

$$g_m(g;\ \mathrm{H}^d;\ L_p(\mathbb{I}^d)) \asymp \sigma_m(g;\ \mathrm{H}^d;\ L_p(\mathbb{I}^d)).$$

Доказательство. Неравенство $\gg$ выполняется *a priori* по определению обеих величин.

В [5] (но только в случае $d = 1$!) доказано неравенство $g_m(g;\mathcal{H}^d;L_p(\mathbb{I}^d)) \ll \sigma_m(g;\mathcal{H}^d;L_p(\mathbb{I}^d))$ в контексте изучения системы $\mathcal{H}^d$ базисных функций Хаара многих переменных, определенных как тензорное произведение базисов Хаара функций одной переменной. При $d \geq 2$ это неравенство, вообще говоря, не выполняется [5].

Однако, учитывая, что при $d = 1$ системы H^d и $\mathcal{H}^d$ — это одно и то же множество функций, для установления неравенства $g_m(g;\mathrm{H}^d;L_p(\mathbb{I}^d)) \ll \sigma_m(g;\mathrm{H}^d;L_p(\mathbb{I}^d))$ при $d \geq 2$ (для системы H^d) достаточно воспроизвести доказательство этого неравенства для случая $d = 1$ [5], предварительно проиндексировав функции системы H^d кубами I двоичного разбиения в соответствии с п. 2, т. е. исходя из системы H^d_0, которая при $d = 1$ тождественна системе $\mathbb{H}$, используемой в этом доказательстве.

Теперь сформулируем и докажем основной результат статьи. Обозначим через $\mathcal{D}$ область допустимых значений параметров $d,\ p,\ q$ и α :

$$\mathcal{D} = \left\{(d,p,q,\alpha) : d \in \mathbb{N},\ 1 \leq p < \infty,\ 1 < q < \infty,\ \left(\frac{d}{p} - \frac{d}{q}\right)_+ < \alpha < \frac{1}{p}\right\},$$

где $a_+ = \max\{0, a\},\ a \in \mathbb{R}$.

Теорема 3. *Пусть* $(d,\, p,\, q,\, \alpha) \in \mathcal{D}$ *и* $1 \leq \theta < \infty$. *Тогда*

$$\sigma_m(SB^{\alpha}_{p,\theta}; \mathrm{H}^d; L_q(\mathbb{I}^d)) \asymp g_m(SB^{\alpha}_{p,\theta}; \mathrm{H}^d; L_q(\mathbb{I}^d)) \asymp m^{-\alpha/d}.$$

Доказательство. Заметим вначале, что в силу теоремы 2 для доказательства теоремы 3 достаточно установить требуемую оценку сверху для величины σ_m и оценку снизу для величины g_m. При этом метод установления таких оценок предполагает использование результатов из [20], которые касаются нелинейной аппроксимации так называемых q-эллипсоидов в дискретных пространствах — пространствах кратных последовательностей.

Установим оценку сверху. Пусть

$$W_j := \left\{ \varphi \colon \varphi(t) = \sum_{\overline{k} \in Z_{j,d}} a_{\overline{k}} h_{\overline{k}}(t),\ t \in \mathbb{I}^d,\ a_{\overline{k}} \in \mathbb{R} \right\}, \quad j = 0, 1, \ldots .$$

Через W^p_j обозначим линейное пространство W_j, снабженное нормой объемлющего его пространства $L_p(\mathbb{I}^d)$, $1 \leq p < \infty$.

Если $\varphi \in W^p_j \cap B^{\alpha}_{p,\theta}$, то согласно теореме 1 настоящей работы и лемме 1 из [1] соответственно

$$\|\varphi\|^{(\alpha)}_{p,\theta} \asymp 2^{j\left(\alpha - \frac{d}{p} + \frac{d}{2}\right)} \|a\|_{l^{m_j}_p}, \tag{I}$$

$$\|\varphi\|_q \asymp 2^{-j\left(\frac{d}{q} - \frac{d}{2}\right)} \|a\|_{l^{m_j}_q}, \quad 1 \leq q \leq \infty, \tag{II}$$

где $a = \{a_{\overline{k}}\}_{\overline{k} \in Z_{j,d}}$, $m_j := \sharp Z_{j,d}$.

Далее, пусть $f \in B^{\alpha}_{p,\theta} \subset L_q(\mathbb{I}^d)$. Тогда, как показано в [1], в смысле сходимости ряда в $L_q(\mathbb{I}^d)$

$$f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} R_j f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(t),$$

где $f_j(t) = R_j f(t) := \sum_{\overline{k} \in Z_{j,d}} (f, h_{\overline{k}}) h_{\overline{k}}(t) = \sum_{\overline{k} \in Z_{j,d}} b_{\overline{k}}(f) h_{\overline{k}}(t)$.

Если $n \in \mathbb{N}$ задано и $(n_j)_{j=0}^{\infty}$ — последовательность целых неотрицательных чисел такая, что $\sum_{j=0}^{\infty} n_j \leq n$, то оптимальный (в смысле точности приближения по порядку) агрегат n-членной аппроксимации f по системе H^d строим в виде

$$S^{(n)}(f; \mathrm{H}^d)(t) = \sum_{j=0}^{\infty} G^p_{n_j}(f_j; \mathrm{H}^d)(t),$$

где $G^p_m(f_j; \mathrm{H}^d)(\cdot)$ — функции, определенные во введении.

Тогда при любом q, $1 \leq q \leq \infty$,

$$\left\| f - S^{(n)}(f; \mathrm{H}^d) \right\|_q \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left\| f_j - G^p_{n_j}(f_j; \mathrm{H}^d) \right\|_q. \tag{16}$$

Далее из соотношений (I) и (II) следует, что если $f \in SB^{\alpha}_{p,\theta}$, то

$$\|f_j\|_p \asymp 2^{-j\left(\frac{d}{p}-\frac{d}{2}\right)} \left\|\{b_{\overline{k}}\}_{\overline{k}\in Z_{j,d}}\right\|_{l_p^{m_j}} \asymp 2^{-j\left(\frac{d}{p}-\frac{d}{2}\right)} \cdot 2^{-j\left(\alpha-\frac{d}{p}+\frac{d}{2}\right)} \|f_j\|_{p,\theta}^{(\alpha)} \leq$$

$$\leq 2^{-j\alpha}\|f_j\|_{p,\theta}^{(\alpha)} \ll 2^{-j\alpha},$$

т. е.

$$f_j \in C2^{-j\alpha}(W_j^p \cap B_p) \tag{17}$$

с некоторой постоянной $C > 0$.

Теперь рассмотрим семейство линейных операторов $A_j : W_j \to \mathbb{R}^{m_j}$, $j \in \mathbb{Z}_+$, действующих по правилу

$$g_j(t) = \sum_{\overline{k}\in Z_{j,d}} a_{\overline{k}} h_{\overline{k}}(t) \to a^{(j)} = (a_{\overline{k}})_{\overline{k}\in Z_{j,d}}.$$

При каждом $j \in \mathbb{Z}_+$ оператор A_j осуществляет взаимно однозначное отображение между линейными пространствами W_j и $\mathbb{R}^{m_j}$ и, согласно соотношению (II),

$$\|A_j\|_p := \|A_j\|_{L_p(\mathbb{I}^d)\to l_p^{m_j}} \ll 2^{j\left(\frac{d}{p}-\frac{d}{2}\right)}, \tag{18}$$

а если $A_j^{-1} : \mathbb{R}^{m_j} \to W_j$ — оператор, обратный к A_j, то

$$\|A_j^{-1}\|_q := \|A_j^{-1}\|_{l_q^{m_j}\to L_q(\mathbb{I}^d)} \ll 2^{-j\left(\frac{d}{q}-\frac{d}{2}\right)}. \tag{19}$$

Обозначим через $\varepsilon = \{e_1, \ldots, e_n\}$ канонический (стандартный) базис в $\mathbb{R}^n$, а через $G_m^{(\varepsilon)} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$, оператор, действующий по правилу

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \ \to G_m^{(\varepsilon)} x = \sum_{j=1}^{m} x_{k_j} e_{k_j},$$

$\{k_j\}_{j=1}^m$ — подсистема системы $\{1, \ldots, n\}$ такая, что $|x_{k_1}| \geq |x_{k_2}| \geq \ldots \geq |x_{k_m}|$ $\big($при $m = 0$ считаем, что $G_m^{(\varepsilon)} x = 0 \in \mathbb{R}^m$ $\big)$. Для $B \subset l_s^n$ определим

$$g_m(B; \varepsilon;\ l_s^n) := \sup_{x\in B} \left\|x - G_m^{(\varepsilon)} x\right\|_{l_s^n}.$$

Из (16), используя теорему 2 и учитывая (17)–(19), для $f \in SB_{p,\theta}^{\alpha}$ и $n_j \leq m_j$, $j \in \mathbb{Z}_+$, получаем

$$\left\|f - S^{(n)}(f; \mathrm{H}^d)\right\|_q \ll \sum_{j=0}^{\infty} \left\|f_j - G_{n_j}^p(f_j; \mathrm{H}^d)\right\|_q \ll$$

$$\ll \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_{n_j}(f_j;\ \mathrm{H}^d;\ L_q(\mathbb{I}^d)) \ll \sum_{j=0}^{\infty} \inf_{\substack{\Lambda\subset\mathbb{Z}_{j,d} \\ \sharp\Lambda=n_j}} \left\|f_j - \sum_{\overline{k}\in\Lambda} (f_j, h_{\overline{k}}) h_{\overline{k}}\right\|_q \ll$$

$$\ll \sum_{j=0}^{\infty} \|A_j^{-1}\|_q \cdot \|A_j\|_p \cdot 2^{-j\alpha} \sup_{b\in B_p^{m_j}} \|b - G_{n_j}^{(\varepsilon)} b\|_{l_q^{m_j}} \ll$$

$$\ll \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j\left(\alpha-\frac{d}{p}+\frac{d}{q}\right)} g_{n_j}\big(B_p^{m_j};\varepsilon;l_q^{m_j}\big), \quad 1\le q\le\infty. \tag{20}$$

Таким образом, для любого натурального n и последовательности $(n_j)_{j=0}^{\infty}$ целых неотрицательных чисел такой, что $\sum_{j=0}^{\infty} n_j \le n$ и $n_j \le m_j = \sharp Z_{j,d}$, $j\in\mathbb{Z}_+$, выполняется неравенство

$$\sigma_n\big(SB_{p,\theta}^{\alpha};\mathrm{H}^d;L_q(\mathbb{I}^d)\big) \ll \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j\left(\alpha-\frac{d}{p}+\frac{d}{q}\right)} g_{n_j}(B_p^{m_j};\varepsilon;l_q^{m_j}) \tag{21}$$

при любом q, $1\le q<\infty$. Прежде чем продолжить оценку величины $\sigma_n\big(SB_{p,\theta}^{\alpha};\mathrm{H}^d;L_q(\mathbb{I}^d)\big)$, сделаем следующее замечание, касающееся приведенного ниже неравенства (22).

Пусть задано натуральное $n\ge 2^d$. Выберем $s\in\mathbb{Z}_+$ так, чтобы выполнялось соотношение $\sum_{j=0}^{s}\sharp Z_{j,d}\le n<\sum_{j=0}^{s+1}\sharp Z_{j,d}$ или, учитывая, что $\bigcup\limits_{j=0}^{l} Z_{j,d}=Y_{l,d}$, $Z_{j_1,d}\cap Z_{j_2,d}=\varnothing$, $j_1\ne j_2$, и $\sharp Y_{l,d}=2^{ld}$, — равносильное ему соотношение $2^{sd}\le n<2^{(s+1)d}$. Поскольку, очевидно, при любых $1\le p,\ q,\theta<\infty$ и α таких, что $\left(\dfrac{d}{p}-\dfrac{d}{q}\right)_+<\alpha<\dfrac{1}{p}$, выполняются неравенства

$$\sigma_{2^{(s+1)d}}\big(SB_{p,\theta}^{\alpha};\mathrm{H}^d;L_q(\mathbb{I}^d)\big)\le\sigma_n\big(SB_{p,\theta}^{\alpha};\mathrm{H}^d;L_q(\mathbb{I}^d)\big)\le$$
$$\le\sigma_{2^{sd}}\big(SB_{p,\theta}^{\alpha};\mathrm{H}^d;L_q(\mathbb{I}^d)\big), \tag{22}$$

то оценку сверху величин $\sigma_n\big(SB_{p,\theta}^{\alpha};\mathrm{H}^d;L_q(\mathbb{I}^d)\big)$ достаточно доказать для $n=2^{sd}$, $s=0,1,\dots$, а также только для таких значений параметров p, q и α, что $1\le p\le q<\infty$ и $\dfrac{d}{p}-\dfrac{d}{q}<\alpha<\dfrac{1}{p}$. Для других значений параметров p, q и α из области $\mathcal{D}$ оценка сверху следует из оценки сверху при $1<p=q<\infty$ вследствие вложения $L_{q_1}\hookrightarrow L_{q_2}$, $1\le q_2\le q_1<\infty$.

Итак, пусть фиксировано $s\in\mathbb{N}$ и $n=2^{sd}=:M_s$. Для заданного $\delta>0$ положим

$$n_j=\begin{cases} m_j, & 0\le j\le s-1,\\ \big[C2^{-\delta(j-s)}m_s\big], & j\ge s,\end{cases}$$

где $C>0$ — постоянная, для которой $\sum_{j=0}^{\infty} n_j\le n$ $\big($напомним, что $m_0=1$ и $m_j=(2^d-1)2^{(j-1)d}$, $j=1,2,\dots\big)$.

Понятно, что

$$\sum_{j=0}^{\infty} n_j\le\sum_{j=0}^{s-1} m_j+m_sC\sum_{j=s}^{\infty}2^{-\delta(j-s)}\le M_s=n,$$

если $C<C(\delta)=1-2^{-\delta}$.

Теперь вернемся к неравенству (21) и продолжим оценку его правой части. Но прежде заметим, что в [20] установлены порядковые оценки величин $g_n(B_p^m;\varepsilon;l_q^m)$ при всех $0<p$, $q<\infty$, $n\in\mathbb{N}$ и $m=[\gamma n]+1$, $\gamma>1$, а именно,

$$g_n\big(B_p^{[\gamma n]+1};\varepsilon;l_q^{[\gamma n]+1}\big)\asymp n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}. \tag{23}$$

Очевидно, что при $0 \le j \le s-1$

$$g_{n_j}\bigl(B_p^{m_j};\varepsilon;l_q^{m_j}\bigr)=0. \tag{24}$$

Далее, из определения последовательности $(n_j)_{j=0}^{\infty}$ следует, что найдется $\lambda=\lambda(\delta)>1$ такое, что для $s^*=[\lambda s]+1$ будет $n_j=0$, если $j>s^*$, и $n_j\ge 1$, если $s\le j\le s^*$. Тогда согласно определению $g_n\bigl(B_p^m;\varepsilon;l_q^m\bigr)$ для $n=0$, с учетом неравенства $\|\cdot\|_{l_q^m}\le\|\cdot\|_{l_p^m}$, $1\le p<q<\infty$, при $j>s^*$ можем записать

$$g_{n_j}\bigl(B_p^{m_j};\varepsilon;l_q^{m_j}\bigr)\le 1,\quad 1\le p\le q<\infty. \tag{25}$$

Для $j, s\le j\le s^*$, согласно (23), при $1\le p<q<\infty$

$$g_{n_j}\bigl(B_p^{m_j};\varepsilon;l_q^{m_j}\bigr)\ll\bigl(2^{-\delta(j-s)}m_s\bigr)^{\frac1q-\frac1p}. \tag{26}$$

Таким образом, из соотношения (21), используя (24) – (26), при $1\le p<q<\infty$ и $\dfrac dp-\dfrac dq<\alpha<\dfrac1p$ находим

$$g_n\bigl(SB_{p,\theta}^{\alpha};\ \mathrm{H}^d;\ L_q(\mathbb{I}^d)\bigr)\ll\sum_{j=s}^{s^*}2^{-\alpha j}\cdot 2^{j\left(\frac dp-\frac dq\right)}\bigl(2^{-\delta(j-s)}m_s\bigr)^{\frac1q-\frac1p}+$$

$$+\sum_{j=s^*+1}^{\infty}2^{-j\left(\alpha-\frac dp+\frac dq\right)}=m_s^{\frac1q-\frac1p}2^{\delta s\left(\frac1q-\frac1p\right)}\sum_{j=s}^{s^*}2^{-\alpha j}\cdot 2^{j\left(\frac dp-\frac dq\right)}\cdot 2^{\delta j\left(\frac1p-\frac1q\right)}+$$

$$+\sum_{j=s^*+1}^{\infty}2^{-j\left(\alpha-\frac dp+\frac dq\right)}\ll m_s^{\frac1q-\frac1p}2^{\delta s\left(\frac1q-\frac1p\right)}\sum_{j=s}^{s^*}2^{-\beta j}+2^{-s^*\left(\alpha-\frac dp+\frac dq\right)}, \tag{27}$$

где

$$\beta:=\alpha-\frac dp+\frac dq-\delta\left(\frac1p-\frac1q\right).$$

Если δ удовлетворяет условию $0<\delta<\left(\alpha-\dfrac dp+\dfrac dq\right)\Big/\left(\dfrac1p-\dfrac1q\right)$, то $\beta>0$, а значит, учитывая также при оценке второго слагаемого, что $s^*=[\lambda s]+1,\ \lambda>1$, получаем

$$g_n\bigl(SB_{p,\theta}^{\alpha};\mathrm{H}^d;L_q(\mathbb{I}^d)\bigr)\ll m_s^{\frac1q-\frac1p}2^{\delta s\left(\frac1q-\frac1p\right)}\cdot 2^{-\beta s}+2^{-\alpha s}\asymp 2^{-\alpha s}=n^{-\alpha/d}. \tag{28}$$

Аналогично, при $1\le p=q<\infty$ и $0<\alpha<\dfrac1p$, учитывая, что для $j,\ s\le j\le s^*$, очевидно, $g_{n_j}\bigl(B_p^{m_j};\varepsilon;l_p^{m_j}\bigr)\le 1$, имеем

$$g_n(SB_{p,\theta}^{\alpha};\ \mathrm{H}^d;\ L_q(\mathbb{I}^d))\ll\sum_{j=s+1}^{\infty}2^{-\alpha j}\ll 2^{-\alpha s}\asymp n^{-\alpha/d}. \tag{29}$$

Перейдем к установлению оценки снизу. Эту оценку достаточно установить для $g_m\bigl(SB_{p,\theta}^{\alpha};\mathrm{H}^d;L_q(\mathbb{I}^d)\bigr)$ при $1\le q\le p<\infty$ и $0<\alpha<\dfrac1p$. По заданному натуральному $m>2^d$ выберем

$n \in \mathbb{N}$ из условия

$$\sharp Y_{n-2,d} \le m < \sharp Y_{n-1,d},$$

т. е.

$$2^{(n-2)d} \le m < 2^{(n-1)d}.$$

Отметив, что $\sharp Z_{j,d} = \sharp\big(Y_{j,d} \setminus Y_{j-1,d}\big) = 2^{jd} - 2^{(j-1)d} = 2^{(j-1)d}(2^d - 1)$ $\big($тогда $\sharp Z_{n,d} \ge \sharp Y_{n-1,d} > > m\big)$, рассмотрим пространство $B(n)$ полиномов по системе $\widetilde{H}^d_n = \{h_{\overline{k}}\}_{\overline{k} \in Z_{n,d}}$ вида

$$R_n f(x) = \sum_{\overline{k} \in Z_{n,d}} b_{\overline{k}}(f) h_{\overline{k}}(x), \quad f \in L_q(\mathbb{I}^d) \tag{30}$$

$\big($значит, $B(n) \subset W_n\big)$. Пусть, далее, $B(n)^\alpha_{p,\theta}$ — подпространство из $B^\alpha_{p,\theta} \subset L_q(\mathbb{I}^d)$, состоящее из функций $f \in B(n)$, т. е. $B(n)^\alpha_{p,\theta} = B(n) \cap B^\alpha_{p,\theta}$. Тогда

$$g_m\big(SB^\alpha_{p,\theta}; \mathrm{H}^d; L_q(\mathbb{I}^d)\big) \ge g_m\big(SB(n)^\alpha_{p,\theta}; \widetilde{H}^d_n; L_q(\mathbb{I}^d)\big). \tag{31}$$

Рассмотрим отображение $A\colon B(n) \to \mathbb{R}^{m_n}$ $(m_n = \sharp Z_{n,d})$ такое, что $Af = \{b_{\overline{k}}(f)\}_{\overline{k} \in Z_{n,d}}$, $f \in B(n)$. Тогда для $f \in B(n)^\alpha_{p,\theta}$, согласно (I), $\|f\|^{(\alpha)}_{p,\theta} \asymp 2^{n\left(\alpha - \frac{d}{p} + \frac{d}{2}\right)} \|Af\|_{l^{m_n}_p}$ и для $f \in B(n)$, согласно (II), $\|f\|_q \asymp 2^{-n\left(\frac{d}{q} - \frac{d}{2}\right)} \|Af\|_{l^{m_n}_q}$. Поэтому, как и при установлении оценок сверху, отправляясь от (30), находим

$$g_m\big(SB(n)^\alpha_{p,\theta}; \widetilde{H}^d_n; L_q(\mathbb{I}^d)\big) \gg$$

$$\gg \sup_{f \in SB(n)^\alpha_{p,\theta}} \inf_{\substack{\Lambda \subset \mathbb{Z}_{n,d} \\ \sharp\Lambda = m}} \left\| f - \sum_{\overline{k} \in \Lambda} b_{\overline{k}}(f) h_{\overline{k}} \right\|_q \gg 2^{-n\alpha} 2^{nd(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} g_m(B^{m_n}_p; \varepsilon; l^{m_n}_q).$$

Отсюда, учитывая, что $m_n \asymp m \asymp 2^{nd}$, и применяя к оценке $g_m(B^{m_n}_p;\ \varepsilon;\ l^{m_n}_q)$ соотношение (23), окончательно, в сочетании с (31), получаем

$$g_m(SB^\alpha_{p,\theta};\ \mathrm{H}^d;\ L_q(\mathbb{I}^d)) \gg 2^{-n\alpha} \asymp m^{-\frac{\alpha}{d}}.$$

Теорема 3 доказана.

***Замечание* 2.** В работе [21] при рассмотрении приближений классов 1-периодических функций $S\bar{B}^\alpha_{p,\theta}$ с помощью m-членных агрегатов, построенных по тригонометрической системе $\mathcal{T} = \left\{e^{2\pi i k x}\right\}_{k \in \mathbb{Z}}$, в случае $d = 1$ доказано, в частности, что

$$\sigma_m(S\bar{B}^\alpha_{p,\theta}; \mathcal{T}; L_q(\mathbb{I})) \asymp m^{-\frac{q}{2}\left(\alpha - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)} \tag{32}$$

при $1 \le p \le 2 < q < \infty$, $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} < \alpha < \dfrac{1}{p}$.

Заметим, что классы $S\bar{B}^{\alpha}_{p,\theta}$ определяются аналогично классам $SB^{\alpha}_{p,\theta}$. Отличие состоит лишь в использовании других модулей непрерывности, дополнительную информацию о которых можно получить из [8].

Сравнивая оценку (32) с оценкой величины $\sigma_m\big(SB^{\alpha}_{p,\theta}; \mathrm{H}^d; L_q(\mathbb{I})\big)$ из теоремы 3 при $d = 1$ $\big($учитывая также, что $S\bar{B}^{\alpha}_{p,\theta} \subset SB^{\alpha}_{p,\theta}\big)$, легко показать, что при данных ограничениях на параметры p, q и α приближение классов $SB^{\alpha}_{p,\theta}$ по тригонометрической системе, вообще говоря, уступает по порядку приближению по системе Хаара (одномерной). Подтверждением этого факта, например, в случае $p = 2$, $q = 4$ и, соответственно, $\dfrac{1}{4} < \alpha < \dfrac{1}{2}$ является довольно простое сравнение указанных оценок, использующее только соответствующую геометрическую иллюстрацию для данного множества параметров p, q и α.

К такому же выводу приходим, сравнивая оценки величин $\sigma_m\big(SB^{\alpha}_{p,\theta}; \mathrm{H}^d; L_q(\mathbb{I})\big)$ с оценками величин $\sigma_m\big(S\bar{B}^{\alpha}_{p,\theta}; \mathcal{T}; L_q(\mathbb{I}^d)\big)$, найденными в [22], и для случая функций многих переменных.

5. Нелинейная аппроксимация функций из пространств $\boldsymbol{B^{\Lambda}_{\theta}(L_p)}$. В этом пункте, исходя из разложений функций $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$ в ряд Фурье–Хаара по базису H^d, вводятся в рассмотрение пространства $B^{\Lambda}_{\theta}(L_p)$, как линейные подпространства в $L_p(\mathbb{I}^d)$, снабженные указанной нормой $\|f\|^{\Lambda}_{p,\theta}$, $f \in B^{\Lambda}_{\theta}(L_p)$. Эта норма представляется с помощью функционального параметра Λ и числового параметра θ в виде выражений, содержащих величины $\big\|(f, h_i)h_i\big\|_p$, $i = 0, 1, \ldots ,$ и определенным образом характеризует функции $f \in B^{\Lambda}_{\theta}(L_p)$ степенью убывания к нулю этих величин.

Конечной целью этого пункта является получение для классов $SB^{\Lambda}_{\theta}(L_p)$ аналога теоремы 3.

В исходном варианте определения пространств $B^{\Lambda}_{\theta}(L_p)$ используем базисную систему функций H^d_0.

Итак, пусть Q_j, $j \in \mathbb{N}$, — множество кубов I объемом $\mathrm{vol}\,\mathrm{I} = 2^{(-j+1)d}$ двоичного разбиения куба $\mathbb{I}^d$. На каждом кубе $\mathrm{I} \in Q_j$, как отмечалось ранее, сосредоточены носители ровно $2^d - 1$ функции системы H^d_0. Обозначим эти функции через $\mathrm{H}^{(i)}_{\mathrm{I}}$, $i = 0, 1, \ldots$. Таким образом, имеем соответствие

$$Q_j \ni \mathrm{I} \leftrightarrow \{\mathrm{H}^{(i)}_{\mathrm{I}}\}_{i=1}^{2^d-1} \in \mathrm{H}^d_0.$$

Положим

$$\mathrm{H}(j) := \big\{\mathrm{H}^{(i)}_{\mathrm{I}} : \mathrm{I} \in Q_j, i = 1, 2, \ldots, 2^d - 1\big\}.$$

Пусть далее $\Lambda \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — произвольная неубывающая функция, определенная на $\mathbb{R}_+$. Множество таких функций обозначим через P_0.

Определение 2. *Для $1 \le p \le \infty$ и $\Lambda \in P_0$ нормированные пространства $B^{\Lambda}_{\theta}(L_p)$ — это множества функций $f \in L^{\circ}_p(\mathbb{I}^d)$, для которых*

$$\|f\|^{\Lambda}_{p,\theta} := \left(\sum_{j=1}^{\infty} \Lambda^{\theta}(2^j) \sum_{\mathrm{I} \in Q_j} \sum_{i=1}^{2^d-1} \big\|c^{(i)}_{\mathrm{I}}(f)\mathrm{H}^{(i)}_{\mathrm{I}}\big\|^{\theta}_p\right)^{1/\theta} < \infty, \quad 1 \le \theta < \infty,$$

и

$$\|f\|^{\Lambda}_{p,\infty} := \sup_j \Lambda(2^j) \sum_{\mathrm{I} \in Q_j} \sum_{i=1}^{2^d-1} \big\|c^{(i)}_{\mathrm{I}}(f)\mathrm{H}^{(i)}_{\mathrm{I}}\big\|_p < \infty, \quad \theta = \infty,$$

где $c_{\mathrm{I}}^{(i)}(f) = \int_{\mathbb{I}^d} f(x)\mathrm{H}_{\mathrm{I}}^{(i)}(x)dx,\ i \in \mathbb{N},$ *— коэффициенты Фурье функции* f *по системе* $\mathrm{H}_0^d = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathrm{H}(j) \cup \{\mathrm{H}_{\mathbb{I}^d}\}$, *а* $L_p^{\circ}(\mathbb{I}^d) := \left\{ f \in L_p(\mathbb{I}^d) \colon \int_{\mathbb{I}^d} f(x)dx = 0 \right\}.$

В дальнейшем функция Λ, кроме условия $\Lambda \in P_0$, будет подчинена некоторым ограничениям. Введем следующие определения.

Определение 3. *Функция* $\varphi\colon (0;\infty) \longrightarrow (0;\infty)$ *удовлетворяет* $\Delta_2^{(1)}$*-условию (пишем* $\varphi \in \Delta_2^{(1)}$*), если существуют постоянные* $C_1,\ C_2 > 1$ *такие, что*

$$C_1 \le \frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)} \le C_2.$$

Определение 4. *Если* $1 \le p, q, \theta \le \infty$ *и* $d \in \mathbb{N}$, *то для функции* $\Lambda \in P_0$ *запись* $\Lambda \in \Delta_2^{(1)}(p, q, \theta, d)$ *означает, что функция* $\Lambda(t) t^{-\left(\left(\frac{d}{p} - \frac{d}{\theta}\right)_+ + \left(\frac{d}{p} - \frac{d}{q}\right)_+\right)}$ *принадлежит* $\Delta_2^{(1)}$.

Положим $\xi = \xi(p, q, \theta) = \left(\dfrac{d}{p} - \dfrac{d}{\theta}\right)_+ + \left(\dfrac{d}{p} - \dfrac{d}{q}\right)_+$ и

$$A = \big\{(p, q, \theta) \colon 1 \le p, q, \theta \le \infty \text{ и } \xi > 0\big\},$$

$$A_0 = \big\{(p, q, \theta) \colon 1 \le p, q, \theta \le \infty \text{ и } \xi = 0\big\}.$$

Понятно, что при $(p, q, \theta) \in A_0$ (т. е. если $1 \le \theta \le p \le \infty$ и $1 \le q \le p \le \infty$) условия $\Lambda \in \Delta_2^{(1)}(p, q, \theta, d)$ и $\Lambda \in P_0 \cap \Delta_2^{(1)}$ равносильны. Примером функций, удовлетворяющих условию $\Lambda \in P_0 \cap \Delta_2^{(1)}$, являются функции $\Lambda(t) = \ln t$ и $\Lambda(t) = t^{\beta},\ \beta > 0$.

Условию $\Lambda \in \Delta_2^{(1)}(p, q, \theta, d)$ при $(p, q, \theta) \in A$ удовлетворяют, например, функции $\Lambda(t) = t^{\beta}$, $\beta > \xi$ и $\Lambda(t) = t^{\xi} \ln^{\gamma}(t+1),\ \gamma > 0$.

Отметим простые свойства пространств $B_\theta^\Lambda(L_p)$; часть из них являются элементарными следствиями определения 2 (далее полагаем также $\overset{\circ}{B}{}^{\alpha}_{p,\theta} := B^{\alpha}_{p,\theta} \cap L_p^{\circ}(\mathbb{I}^d)$) :

(a) $\forall\ 1 \le p \le \infty$ и $\Lambda \in P_0 \colon B_{\theta_1}^{\Lambda}(L_p) \hookrightarrow B_{\theta_2}^{\Lambda}(L_p),\ 1 \le \theta_1 < \theta_2 \le \infty$;

(b) если $1 \le p = \theta < \infty$ и $\Lambda(t) = t^{\alpha},\ 0 < \alpha < \dfrac{1}{p}$, то

$$\overset{\circ}{B}{}^{\alpha}_{p,p} \sim B_p^{(\alpha)}(L_p),$$

т. е. пространства $\overset{\circ}{B}{}^{\alpha}_{p,p}$ и $B_p^{\Lambda}(L_p) =: B_p^{(\alpha)}(L_p),\ \Lambda(t) = t^{\alpha}$, как множества функций, совпадают, а соответствующие нормы элементов эквивалентны.

Действительно, при указанных ограничениях на параметры p и Λ при $1 \le \theta < \infty$ для любой функции $f \in B_\theta^{(\alpha)}(L_p) := B_\theta^{\Lambda}(L_p),\ \Lambda(t) = t^{\alpha}$,

$$\|f\|_{p,\theta}^{\Lambda} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} 2^{j\alpha\theta} \sum_{\overline{k} \in Z_{j,d}} |b_{\overline{k}}(f)|^{\theta} \cdot 2^{-j\theta\left(\frac{d}{p} - \frac{d}{2}\right)} \right)^{1/\theta} =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{\infty} 2^{j\left(\alpha - \frac{d}{p} + \frac{d}{2}\right)\theta} \sum_{\overline{k} \in Z_{j,d}} |b_{\overline{k}}(f)|^{\theta} \right)^{1/\theta}, \tag{33}$$

где, напомним, $b_{\overline{k}}(f) := (f; h_{\overline{k}})$, $\overline{k} \in Z_{j,d}$.

С другой стороны, согласно теореме 1, для любой функции $f \in \overset{\circ}{B}{}^{\alpha}_{p,\theta}$, $1 \le p, \theta < \infty$ и $0 < \alpha < \dfrac{1}{p}$

$$\|f\|_{B^{\alpha}_{p,\theta}} := \|f\|^{(\alpha)}_{p,\theta} \asymp \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} \left[2^{j\left(\alpha - \frac{d}{p} + \frac{d}{2}\right)} \left(\sum_{\overline{k}\in Z_{j,d}} |b_{\overline{k}}(f)|^p \right)^{1/p} \right]^{\theta} \right)^{1/\theta}. \tag{34}$$

Сравнивая (33) и (34) при $p = \theta$, получаем $\|f\|^{(\alpha)}_{p,p} \asymp \|f\|^{\Lambda}_{p,p}$, $f \in B^{(\alpha)}_{\theta}(L_p)$, что доказывает свойство (b).

(c) $\overset{\circ}{B}{}^{\alpha}_{p,\theta} \hookrightarrow B^{(\alpha)}_{\theta}(L_p)$ при $1 \le p < \theta < \infty$, $0 < \alpha < \dfrac{1}{p}$.

(d) $\overset{\circ}{B}{}^{\alpha}_{p,\theta} \hookleftarrow B^{(\alpha)}_{\theta}(L_p)$ при $1 \le \theta < p < \infty$, $0 < \alpha < \dfrac{1}{p}$.

Как и в предыдущем случае $\big(p = \theta$, свойство (b) $\big)$, достаточно сравнить (33) и (34), приняв во внимание неравенство $\|\cdot\|_{l^s_{\gamma}} \le \|\cdot\|_{l^s_{\mu}}$, $1 \le \mu < \gamma < \infty$.

Вопрос о конструктивной характеристике пространств $B^{(\alpha)}_{\theta}(L_p)$ в терминах величин наилучших m-членных приближений, однако лишь в случае $d = 1$, при $1 < \theta = p < \infty$ и $0 < \alpha < \dfrac{1}{p}$ $\big($а тогда согласно свойству (b) $B^{(\alpha)}_{\theta}(L_p) \sim \overset{\circ}{B}{}^{\alpha}_{p,p}$ $\big)$, решен, как частный случай более общего результата, в [5]. А именно, установлена импликация

$$f \in B^{(\alpha)}_{p}(L_p) \Leftrightarrow \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sigma_m(f;\ \mathrm{H};\ L_{\tau}(\mathbb{I})) m^{\alpha - \frac{1}{p}} \right]^{p} < \infty,$$

где $1 < p < \infty$, $1 < \tau < \infty$, $0 < \alpha < 1$ и параметры p, τ и α связаны соотношением $p = \left(\alpha + \dfrac{1}{\tau}\right)^{-1}$, т. е. $\alpha = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{\tau}$ $\left(\text{понятно, что тогда } 1 < p < \tau < \infty \text{ и } 0 < \alpha < \dfrac{1}{p}\right)$.

Автором в случае произвольного $d \in \mathbb{N}$ изучены аппроксимационные свойства системы H^d по отношению к классам $SB^{\Lambda}_{\theta}(L_p)$ $1 \le p$, $\theta \le \infty$, на широком спектре изменения функционального параметра Λ, и в частности, при $\Lambda(t) = t^r$ $\left(0 < r < \dfrac{1}{p},\ 1 \le p < \infty\right)$. Однако вопрос о конструктивном описании пространств $B^{\Lambda}_{\theta}(L_p)$ в терминах величин $\sigma_m\big(f; \mathrm{H}^d; L_q(\mathbb{I}^d)\big)$, $f \in B^{\Lambda}_{\theta}(L_p)$ в общем случае не рассматривается. Сформулируем полученный результат.

Теорема 4. *Пусть* $1 \le p$, $\theta \le \infty$, $1 < q < \infty$ *и* $\Lambda \in \Delta^{(1)}_2(p, q, \theta, d)$. *Тогда*

$$\sigma_m\big(SB^{\Lambda}_{\theta}(L_p); \mathrm{H}^d; L_q(\mathbb{I}^d)\big) \asymp g_m\big(SB^{\Lambda}_{\theta}(L_p); \mathrm{H}^d;\ L_q(\mathbb{I}^d)\big) \asymp$$

$$\asymp \Lambda^{-1}(m^{\frac{1}{d}}) m^{\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right)_+}.$$

Доказательство. Исходным пунктом является представление норм элементов пространств $B^{\Lambda}_{\theta}(L_p)$, использующее векторную нумерацию функций Хаара, т. е. систему $\mathbb{H}^d_0$. А именно, легко видеть, что для $f \in B^{\Lambda}_{\theta}(L_p)$

$$\|f\|_{p,\theta}^{\Lambda} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \Lambda^{\theta}(2^j) 2^{-j\theta d\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)} \sum_{\overline{k}\in Z_{j,d}} |b_{\overline{k}}(f)|^{\theta} \right)^{1/\theta}, \quad 1 \le \theta < \infty, \tag{35}$$

$$\|f\|_{p,\infty}^{\Lambda} = \sup_j \Lambda(2^j) 2^{-jd\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)} \sum_{\overline{k}\in Z_{j,d}} |b_{\overline{k}}(f)|. \tag{36}$$

В дальнейшем доказательство теоремы 4, по сути, повторяет, с незначительными отличиями, вызванными условиями на функцию Λ в (35), (36), доказательство теоремы 3. Опишем тезисно эти отличия.

Ключевую роль при установлении как оценок сверху, так и оценок снизу в теореме 3 играли соотношения (I) и (II). Соотношение (II) не связано непосредственно с аппроксимируемыми классами функций и поэтому остается в силе и при доказательстве теоремы 4. Вместо соотношения (I), как следствия теоремы 1 об эквивалентном представлении нормы в пространстве $B_{p,\theta}^{\alpha}$, при установлении оценок снизу в теореме 4 следует использовать для $\varphi \in W_j \subset B_{\theta}^{\Lambda}(L_p)$ равенства

$$\|\varphi\|_{p,\theta}^{\Lambda} = \Lambda(2^j) 2^{-j\left(\frac{d}{p}-\frac{d}{2}\right)} \|a\|_{l_{\theta}^{m_j}} \tag{37}$$

в случае $1 \le \theta < \infty$ и

$$\|\varphi\|_{p,\infty}^{\Lambda} = \Lambda(2^j) 2^{-j\left(\frac{d}{p}-\frac{d}{2}\right)} \|a\|_{l_1^{m_j}} \tag{38}$$

в случае $\theta = \infty$.

В доказательстве оценки сверху в теореме 3 определяющим было вложение (17) при условии, что $f \in SB_{p,\theta}^{\alpha}$. Его аналогом для $f \in SB_{\theta}^{\Lambda}(L_p)$ является вложение

$$f_j \in C\Lambda^{-1}(2^j) 2^{j\left(\frac{d}{p}-\frac{d}{\theta^*}\right)_+} (W_j \cap B_p),$$

где $\theta^* = \theta$, если $1 \le \theta < \infty$, и $\theta^* = p$, если $\theta = \infty$.

В доказательстве этого вложения вместо (I) следует использовать (37) при $1 \le \theta < \infty$ и (38) при $\theta = \infty$, а также, дополнительно, известное соотношение $\|\cdot\|_{l_{p_2}^n} \le \|\cdot\|_{l_{p_1}^n} \le n^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}} \|\cdot\|_{l_{p_2}^n}$, $1 \le p_1 < p_2 \le \infty$.

Очевидной коррекции подлежат также рассуждения, используемые при переходе от неравенства (27) к неравенствам (28) и (29). Здесь следует задействовать условие $\Lambda \in \Delta_2^{(1)}(p,q,\theta,d)$, которое, фактически, является условием вложения $B_{\theta}^{\Lambda}(L_p) \subset L_q(\mathbb{I}^d)$.

Литература

19. *Романюк В. С.* Кратный базис Хаара и m-членные приближения функций из классов Бесова. I // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 4. – С. 551 – 562.
20. *Романюк В. С.* Нелинейная аппроксимация в пространствах кратных последовательностей // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. – **12**, № 4. – С. 256 – 265.
21. *Белинский Э. С.* Приближение „плавающей” системой экспонент на классах гладких периодических функций // Мат. сб. – 1987. – **132**, № 1. – С. 20 – 27.
22. *Stasyuk S. A.* Best m-term trigonometric approximation of periodic functions of several variables from Nikol’skii – Besov classes for small smoothness // J. Approxim. Theory. – 2014. – **177**. – P. 1 – 16.

Получено 10.07.15