УДК 517.5

В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович (Днепропетр. нац. ун-т им. О. Гончара)

ОЦЕНКА РАВНОМЕРНОЙ НОРМЫ ОДНОМЕРНОГО ПОТЕНЦИАЛА РИССА ЧАСТНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ С ОГРАНИЧЕННЫМ ЛАПЛАСИАНОМ

We obtain new exact Landau-type estimates for the uniform norms of one-dimension Riesz potentials of the partial derivatives of a multivariable function in terms of the norm of the function itself and the norm of its Laplacian.

Отримано нові точні оцінки типу Ландау рівномірних норм одновимірних потенціалів Рісса частинних похідних функції багатьох змінних через норму самої функції і норму результату застосування до неї оператора Лапласа.

Неравенства, оценивающие нормы промежуточных производных функций одной и многих переменных через нормы самих функций и нормы производных более высокого порядка, играют важную роль во многих областях математики и ее приложений. Особенно важны неулучшаемые неравенства такого типа, и на протяжении более 100 лет усилия многих математиков были направлены на их получение. К настоящему времени известно значительное количество точных неравенств такого типа для функций одной переменной. Обзоры многих известных в этом направлении результатов и дальнейшие ссылки можно найти в [1 – 3]. Ряд точных неравенств для промежуточных производных целого порядка функций многих переменных получен в работах [4 – 11].

Во многих вопросах анализа возникает необходимость наряду с производными целых порядков рассматривать и производные дробных порядков (см., например, [12]). Некоторые известные точные неравенства типа Колмогорова для производных дробного порядка можно найти в работах [13 – 19], [20] (глава 2).

Ранее нами получены точные неравенства, оценивающие нормы производных Рисса функций многих переменных через равномерные нормы функций и L_p-нормы результата применения к функциям оператора Лапласа (см. [21, 22]), а также L_p-нормы их градиентов (см. [23]).

Пусть $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, — евклидово пространство точек $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $|x| = \left(\sum_{i=1}^m x_i^2\right)^{1/2}$. Через $C = C(\mathbb{R}^m)$ будем обозначать пространство непрерывных ограниченных функций $u\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ с нормой

$$\|u\|_C = \|u\|_{C(\mathbb{R}^m)} := \sup\{|u(x)| \colon x \in \mathbb{R}^m\},$$

через $L_\infty = L_\infty(\mathbb{R}^m)$ — пространство измеримых существенно ограниченных функций на $\mathbb{R}^m$ с нормой

$$\|u\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}\{|u(x)| \colon x \in \mathbb{R}^m\},$$

через $D = D(\mathbb{R}^m)$ — пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^m$. Через $L_\infty^\Delta = L_\infty^\Delta(\mathbb{R}^m)$ обозначим класс функций $u \in C$, для которых значение оператора

Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}$$

принадлежит $L_\infty(\mathbb{R}^m)$. В случае $m = 1$ под Δu мы понимаем u'', при этом u'' и Δu понимаются в смысле Соболева, а именно, относительно пары функций $u \in C$ и $v \in L_\infty$ считаем, что $u \in L_\infty^\Delta$ и $v = \Delta u$, если для любой функции $\varphi \in D$ выполняется равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} v(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^m} u(x)\Delta\varphi(x)\,dx. \tag{1}$$

В. Г. Тимофеевым [8, 9] получено точное неравенство, оценивающее нормы частных производных $\|u'_{x_i}\|_C$ функций из класса L_∞^Δ через нормы $\|u\|_C$ и $\|\Delta u\|_\infty$:

$$\|u'_{x_i}\|_C \le \sqrt{2}\|u\|_C^{1/2}\|\Delta u\|_\infty^{1/2}$$

(при $m = 1$ это неравенство Ландау [24]).

Пусть $u\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ и $\alpha \in (0, 1)$. Одномерным потенциалом Рисса (определение потенциала Рисса см. в [12, с. 173]) порядка α частной производной $\partial u/\partial x_i$ функции u назовем

$$(I_{x_i}^\alpha u)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x - te_i)}{|t|^{1-\alpha}}\,dt,$$

где e_i — i-й орт пространства $\mathbb{R}^m$.

Для $h > 0$ и $i = 1, \ldots, m$ определим функцию $v_{h,i}$ следующим образом:

$$v_{h,i}(x) = \begin{cases} \dfrac{x_i}{h^2}(h - x_i) + \dfrac{x_i}{h}, & x_i \in [0, h], \\[2ex] \dfrac{x_i}{h^2}(h + x_i) + \dfrac{x_i}{h}, & x_i \in [-h, 0], \\[2ex] \operatorname{sign} x_i, & x_i \notin [-h, h]. \end{cases} \tag{2}$$

В случае $m = 1$ вместо $v_{h,i}$ будем писать v_h, а вместо $x_i - x$.

В данной работе мы получим неулучшаемые неравенства, оценивающие $\|I_{x_i}^\alpha u'_{x_i}\|_C$ через $\|u\|_C$ и $\|\Delta u\|_\infty$.

Теорема. *Пусть $0 < \alpha < 1$. Тогда для любой функции $f \in L_\infty^\Delta$ при каждом $h > 0$ и $i = 1, \ldots, m$ имеют место точные неравенства*

$$\|I_{x_i}^\alpha u'_{x_i}\|_C \le \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \left(\frac{2}{h^{1-\alpha}}\,\|u\|_C + \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}\,h^{1+\alpha}\,\|\Delta u\|_\infty \right), \tag{3}$$

которые обращаются в равенства для функций $v_{h,i}$ при всех $h > 0$.

Кроме того, для любой функции $f \in L_\infty^\Delta$ имеет место точное неравенство

$$\|I_{x_i}^\alpha u'_{x_i}\|_\infty \le \frac{2}{\Gamma(\alpha + 2)}\, 2^{\frac{1+\alpha}{2}}\, \|u\|_C^{\frac{1+\alpha}{2}}\, \|\Delta u\|_\infty^{\frac{1-\alpha}{2}},$$

которое превращается в равенство для функции $v_{h,i}$ при любом значении параметра $h > 0$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $m = 1$. Как известно (см., например, [25], соотношение (6)), для $u \in L_\infty^\Delta$ имеет место представление

$$u(x) = u(-h)\,\frac{h-x}{2h}\,(x,-h) + u(h)\,\frac{x+h}{2h}\,(x,h) - \int\limits_{-h}^{h} G(x,t)u''(t)\,dt =$$

$$= u(-h)\,\frac{\partial G}{\partial t}\,(x,-h) - u(h)\,\frac{\partial G}{\partial t}\,(x,h) - \int\limits_{-h}^{h} G(x,t)u''(t)\,dt, \quad x \in [-h,h],$$

где

$$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{(h-x)(t+h)}{2h}, & t \in [-h,x], \\[2ex] \dfrac{(h-t)(x+h)}{2h}, & t \in [x,h], \end{cases} \tag{4}$$

а под $\dfrac{\partial G}{\partial t}(x,-h)$ и $\dfrac{\partial G}{\partial t}(x,h)$ понимаются правая и левая производные соответственно.

Отсюда для производной любой функции $u \in L_\infty^\Delta$ легко следует представление

$$u'(x) = u(-h)\,\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial t}\,(x,-h) - u(h)\,\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial t}\,(x,h) - \int\limits_{-h}^{h} \frac{\partial G}{\partial x}\,(x,t)u''(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2h}\,(u(h) - u(-h)) - \int\limits_{-h}^{h} \frac{\partial G}{\partial x}\,(x,t)u''(t)\,dt, \tag{5}$$

которое, впрочем, можно получить и непосредственно.

Для функции $u \in L_\infty^\Delta$ из (5) следует непрерывность первой производной u', а вместе с ней и непрерывность $I^\alpha u'$. Установим оценку сверху для $\|I^\alpha u'\|_C$. Для этого, вследствие инвариантности величины $\|I^\alpha u'\|_C$ относительно сдвига аргумента, достаточно оценить $|I^\alpha u'(0)|$. Для любого $h > 0$ имеем

$$(I^\alpha u')(0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{u'(t)}{|t|^{1-\alpha}}\,dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(t)u'(t)\,dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-h}^{h} \left(\frac{1}{|t|^{1-\alpha}} - \frac{1}{h^{1-\alpha}}\right) u'(t)\,dt,$$

где

$$\Phi(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{h^{1-\alpha}}, & t \in [-h,h], \\[2ex] \dfrac{1}{|t|^{1-\alpha}}, & t \notin [-h,h]. \end{cases}$$

После интегрирования по частям в первом слагаемом, подстановки выражения (5) для $u'(t)$ во второе слагаемое и перемены порядка интегрирования получим

$$(I^\alpha u')(0) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi'(t)u(t)\,dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{-h}^{h}\left(\frac{1}{|t|^{1-\alpha}} - \frac{1}{h^{1-\alpha}}\right)u'(t)\,dt =$$

$$= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi'(t)u(t)\,dt +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{-h}^{h}\left(\frac{1}{|t|^{1-\alpha}} - \frac{1}{h^{1-\alpha}}\right)\left\{\frac{1}{2h}\left(u(h)-u(-h)\right) - \int\limits_{-h}^{h}\frac{\partial G}{\partial t}(t,\xi)u''(\xi)\,d\xi\right\}dt.$$

Таким образом,

$$(I^\alpha u')(0) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi'(t)u(t)\,dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{2h}\left(u(h)-u(-h)\right)\int\limits_{-h}^{h}\left(\frac{1}{|t|^{1-\alpha}} - \frac{1}{h^{1-\alpha}}\right)dt -$$

$$-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{-h}^{h}u''(\xi)\left(\frac{1}{|t|^{1-\alpha}} - \frac{1}{h^{1-\alpha}}\right)\frac{\partial G}{\partial t}(t,\xi)\,dt d\xi. \qquad (6)$$

Теперь оценим $|I^\alpha u'(0)|$:

$$|I^\alpha u'(0)| \le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\Phi'(t)|\,dt + \frac{1-\alpha}{\alpha}2h^{\alpha-1}\right)\|u\|_C + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{-h}^{h}|F(\xi)|\,d\xi\,\|u''\|_\infty =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{2h^{\alpha-1}}{\alpha}\|u\|_C + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{-h}^{h}|F(\xi)|\,d\xi\,\|u''\|_\infty, \qquad (7)$$

где

$$F(\xi) = \int\limits_{-h}^{h}\left(\frac{1}{|t|^{1-\alpha}} - \frac{1}{h^{1-\alpha}}\right)\frac{\partial G}{\partial t}(t,\xi)\,dt, \quad \xi\in[-h,h].$$

Покажем, что

$$\int\limits_{-h}^{h}|F(\xi)|\,d\xi = \frac{1-\alpha}{\alpha(1+\alpha)}h^{1+\alpha}.$$

Рассмотрим функцию $v_h,\ h>0$ (см. (2)). Для ее производной имеем

$$v_h'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{h} - \dfrac{2x}{h^2}, & x\in[0,h],\\[2ex] \dfrac{2}{h} + \dfrac{2x}{h^2}, & x_1\in[-h,0],\\[2ex] 0, & x\notin[-h,h]. \end{cases}$$

Вычисляя $I^\alpha v_h'$ в точке $x = 0$, получаем

$$(I^\alpha v_h')(0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|t|^{1-\alpha}}\, v_h'(t)\, dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{0}^{h} \frac{1}{t^{1-\alpha}} \left(\frac{2}{h} - \frac{2t}{h^2}\right) dt +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-h}^{0} \frac{1}{(-t)^{1-\alpha}} \left(\frac{2}{h} + \frac{2t}{h^2}\right) dt = \frac{4}{\alpha(\alpha+1)\Gamma(\alpha)}\, h^{\alpha-1}. \qquad (8)$$

Как несложно проверить, $F(\xi) \le 0$ для $\xi \in [-h, 0]$ и $F(\xi) \ge 0$ для $\xi \in [0, h]$. С учетом этого замечания выражение (6) для этой функции принимает вид

$$(I^\alpha v_h')(0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{2h^{\alpha-1}}{\alpha} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{2}{h^2} \int\limits_{-h}^{h} |F(\xi)|\, d\xi.$$

Следовательно, с учетом (8) имеем

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{2h^{\alpha-1}}{\alpha} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{2}{h^2} \int\limits_{-h}^{h} |F(\xi)|\, d\xi = \frac{4}{\alpha(\alpha+1)\Gamma(\alpha)}\, h^{\alpha-1},$$

откуда

$$\int\limits_{-h}^{h} |F(\xi)|\, d\xi = \frac{1-\alpha}{\alpha(\alpha+1)} h^{\alpha+1}. \qquad (9)$$

Подставляя (9) в (7), получаем

$$|I^\alpha u'(0)| \le \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \left(\frac{2}{h^{1-\alpha}}\, \|u\|_C + \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\, h^{1+\alpha}\, \|\Delta u\|_\infty\right),$$

откуда следует неравенство (3) в случае $m = 1$.

Учитывая соотношения $\|v_h\|_C = 1$, $\|v_h''\|_\infty = \dfrac{2}{h^2}$ и $\|I^\alpha v_h'\|_\infty = \dfrac{4}{\alpha(\alpha+1)\Gamma(\alpha)}\, h^{\alpha-1}$, нетрудно убедиться в том, что неравенство (3) превращается в равенство для функции v_h.

Подставляя в правую часть (3) $h = \sqrt{\dfrac{2\|u\|_C}{\|u''\|_\infty}}$, приходим к неравенству

$$\|I^\alpha u'\|_\infty \le \frac{2}{\Gamma(\alpha)} \frac{2^{\frac{1+\alpha}{2}}}{\alpha(1+\alpha)} \|u\|_C^{\frac{1+\alpha}{2}}\, \|u''\|_\infty^{\frac{1-\alpha}{2}},$$

которое превращается в равенство для функции v_h при любом значении параметра h.

Теперь рассмотрим случай $m \ge 2$. Выделим в $\mathbb{R}^m$ слой

$$\Pi_h = \{\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m :\ -h < \xi_1 < h,\ \ -\infty < \xi_i < \infty,\ \ i = 2, \ldots, m\}, \quad h > 0.$$

Пусть $G(\xi, \eta)$ — функция Грина внутренней задачи Дирихле для слоя Π_h, т. е.

$$G(\xi,\eta)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(m/2)}{(n-2)2\pi^{m/2}}\,|\xi-\eta|^{2-m}-g(\xi,\eta), & \text{если}\quad m\geq 3,\\[2ex] -\dfrac{1}{2\pi}\,\ln|\xi-\eta|-g(\xi,\eta), & \text{если}\quad m=2,\end{cases}$$

где $g(\xi,\eta)$ — такая гармоническая функция в Π_h, что для всех $\eta\in\Pi_h$ $G(\xi,\eta)=0$, если $\xi\in\partial\Pi_h$.

Отметим, что ранее задачу Дирихле для слоя в $\mathbb{R}^m$ использовал В. Г. Тимофеев при исследовании неравенств Колмогорова (см. [8, 9]).

Известно (см., например, [8, 9]), что для частной производной первого порядка любой функции $u\in L_\infty^\Delta$ имеет место интегральное представление

$$u'_{x_1}(x)=\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)=-\int\limits_{\partial\Pi_h}u(\xi)\frac{\partial^2G(\xi,x)}{\partial x_1\partial n_\xi}\,d\xi-\int\limits_{\Pi_h}\Delta u(\xi)\frac{\partial G(\xi,x)}{\partial x_1}\,d\xi,\quad x\in\Pi_h, \tag{10}$$

где $\dfrac{\partial G(\xi,x)}{\partial n_\xi}$ — производная по направлению внешней нормали к границе $\partial\Pi_h$ области Π_h.

Для функции $u\in L_\infty^\Delta$ из [9] следует непрерывность первой частной производной u'_{x_1}, а вместе с ней и непрерывность $I_{x_1}^\alpha u'_{x_1}$.

Установим оценку сверху для $\|I_{x_1}^\alpha(u'_{x_1})\|_C$. Как и в случае $m=1$, для этого достаточно оценить величину $|I_{x_1}^\alpha(u'_{x_1})(0)|$.

Для любого $h>0$ имеем

$$(I_{x_1}^\alpha u'_{x_1})(0)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{u'_{x_1}(te_1)}{|t|^{1-\alpha}}\,dt=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi(t)u'_{x_1}(te_1)\,dt+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{-h}^{h}\left(\frac{1}{|t|^{1-\alpha}}-\frac{1}{h^{1-\alpha}}\right)u'_{x_1}(t)\,dt,$$

где, как и выше, функция $\Phi(t)$ определена соотношением

$$\Phi(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{h^{1-\alpha}}, & t\in[-h,h],\\[2ex] \dfrac{1}{|t|^{1-\alpha}}, & t\notin[-h,h].\end{cases}$$

После интегрирования по частям в первом слагаемом и подстановки из (10) выражения для u'_{x_1} во второе слагаемое получаем

$$(I_{x_1}^\alpha u'_{x_1})(0)=-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi'(t)u(te_1)\,dt+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{-h}^{h}\left(\frac{1}{|t|^{1-\alpha}}-\frac{1}{h^{1-\alpha}}\right)\left\{-\int\limits_{\partial\Pi_h}u(\xi)\frac{\partial^2G(\xi,te_1)}{\partial x_1\partial n_\xi}\,d\xi-\int\limits_{\Pi_h}\Delta u(\xi)\frac{\partial G(\xi,te_1)}{\partial x_1}\,d\xi\right\}dt.$$

После перемены порядка интегрирования будем иметь

$$(I_{x_1}^{\alpha} u'_{x_1})(0) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi'(t) u(te_1)\, dt -$$

$$-\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{\partial \Pi_h} u(\xi) \int\limits_{-h}^{h} \left(\frac{1}{|t|^{1-\alpha}} - \frac{1}{h^{1-\alpha}} \right) \frac{\partial^2 G(\xi, te_1)}{\partial x_1 \partial n_\xi}\, dt\, d\xi -$$

$$-\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{\Pi_h} \Delta u(\xi) \int\limits_{-h}^{h} \left(\frac{1}{|t|^{1-\alpha}} - \frac{1}{h^{1-\alpha}} \right) \frac{\partial G(\xi, te_1)}{\partial x_1}\, dt\, d\xi. \qquad (11)$$

Полагая

$$F_1(\xi) = \int\limits_{-h}^{h} \left(\frac{1}{|t|^{1-\alpha}} - \frac{1}{h^{1-\alpha}} \right) \frac{\partial^2 G(\xi, te_1)}{\partial x_1 \partial n_\xi}\, dt, \quad \xi \in \partial \Pi_h, \qquad (12)$$

$$F_2(\xi) = \int\limits_{-h}^{h} \left(\frac{1}{|t|^{1-\alpha}} - \frac{1}{h^{1-\alpha}} \right) \frac{\partial G(\xi, te_1)}{\partial x_1}\, dt, \quad \xi \in \Pi_h, \qquad (13)$$

записываем (11) в виде

$$(I_{x_1}^{\alpha} u'_{x_1})(0) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi'(t) u(te_1)\, dt - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{\partial \Pi_h} F_1(\xi) u(\xi)\, d\xi -$$

$$-\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{\Pi_h} F_2(\xi) \Delta u(\xi)\, d\xi. \qquad (14)$$

Теперь оценим $|(I_{x_1}^{\alpha} u'_{x_1})(0)|$:

$$|(I_{x_1}^{\alpha} u'_{x_1})(0)| \le \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\Phi'(t)| |u(te_1)|\, dt +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{\partial \Pi_h} |F_1(\xi)| |u(\xi)|\, d\xi + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{\Pi_h} |F_2(\xi)| |\Delta u(\xi)|\, d\xi \le$$

$$\le A(m, \alpha) \|u\|_C + B(m, \alpha) \|\Delta u\|_\infty, \qquad (15)$$

где

$$A(m, \alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\Phi'(t)|\, dt + \int\limits_{\partial \Pi_h} |F_1(\xi)|\, d\xi \right), \quad B(m, \alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{\Pi_h} |F_2(\xi)|\, d\xi.$$

Для вычисления $A(m, \alpha)$ и $B(m, \alpha)$ нам понадобятся некоторые свойства функций $F_1(\xi)$ и $F_2(\xi)$, которые мы сформулируем в виде утверждений 1 и 2.

Утверждение 1. *Если* $\xi_1 = -h$, *то* $F_1(\xi)|_{\xi_1=-h} \geq 0$. *Если* $\xi_1 = h$, *то* $F_1(\xi)|_{\xi_1=h} \leq 0$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{M}(t) = \dfrac{1}{|t|^{1-\alpha}} - \dfrac{1}{h^{1-\alpha}}$. Тогда (12) принимает вид

$$F_1(\xi) = \int\limits_{-h}^{h} \mathcal{M}(t)\,\frac{\partial^2 G(\xi, te_1)}{\partial x_1 \partial n_\xi}\,dt. \tag{16}$$

После интегрирования по частям в (16) имеем

$$F_1(\xi) = -\int\limits_{-h}^{h} \mathcal{M}'(t)\frac{\partial G(\xi, te_1)}{\partial n_\xi}\,dt = -\left(\int\limits_{-h}^{0} + \int\limits_{0}^{h}\right)\mathcal{M}'(t)\frac{\partial G(\xi, te_1)}{\partial n_\xi}\,dt. \tag{17}$$

Заметим, что $\mathcal{M}'(t)$, являясь нечетной функцией, принимает отрицательные значения для $t \in$ $\in (0, h)$. После замены переменной в первом слагаемом в (17) получаем

$$F_1(\xi) = \int\limits_{0}^{h} (-\mathcal{M}'(t))\frac{\partial}{\partial n_\xi}\,\left(G(\xi, te_1) - G(\xi, -te_1)\right)\,dt.$$

Для $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ положим $\widetilde{\xi} = (-\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$.

Поскольку функция $G(\xi, \eta)$ является функцией Грина слоя Π_h, то, как нетрудно проверить, функция $\overline{G}(\xi, \eta) = G(\xi, \eta) - G(\xi, \widetilde{\eta})$ является функцией Грина слоя $\Pi_h' = \{\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in$ $\in \mathbb{R}^m : 0 < \xi_1 < h,\ -\infty < \xi_i < \infty,\ i = 2, \ldots, m\},\ h > 0$. Следовательно,

$$\left.\frac{\partial \overline{G}(\xi, \eta)}{\partial n_\xi}\right|_{\partial \Pi_h'} \leq 0, \tag{18}$$

где $\dfrac{\partial \overline{G}(\xi, \eta)}{\partial n_\xi}$ — производная по направлению внешней нормали к $\partial \Pi_h'$.

Учитывая это свойство и тот факт, что $(-\mathcal{M}'(t)) > 0$ при $0 < t < h$, получаем $F_1(\xi)|_{\xi_1=h} \leq$ ≤ 0.

Аналогично, выполняя замену во втором интеграле (17), приходим к представлению

$$F_1(\xi) = \int\limits_{-h}^{0} (-\mathcal{M}'(t))\frac{\partial}{\partial n_\xi}\,\left(G(\xi, te_1) - G(\xi, -te_1)\right)\,dt = \int\limits_{-h}^{0} \Big(-\mathcal{M}'(t)\Big)\,\frac{\partial}{\partial n_\xi}\,\overline{G}(\xi, te_1)\,dt.$$

Учитывая, что функция $\overline{G}(\xi, \eta)$ является функцией Грина слоя $\Pi_h'' = \{\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n :\ -h <$ $< \xi_1 < 0,\ -\infty < \xi_i < \infty,\ i = 2, \ldots, n\},\ h > 0$, отрицательность функции $(-\mathcal{M}'(t))$ при $t \in (-h, 0)$ и свойство (18), получаем $F_1(\xi)|_{\xi_1=-h} \geq 0$.

Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. *Если* $-h \leq \xi_1 \leq 0$, *то* $F_2(\xi) \leq 0$, *а если* $0 \leq \xi_1 \leq h$, *то* $F_2(\xi) \geq 0$.

Доказательство. Рассуждая, как при доказательстве утверждения 1, приходим к представлениям

$$F_2(\xi) = \int\limits_0^h (-\mathcal{M}'(t))\overline{G}(\xi, te_1)\, dt, \tag{19}$$

где $\overline{G}(\xi,\eta) = G(\xi,\eta) - G(\xi,\widetilde{\eta})$ — функция Грина слоя Π_h', и

$$F_2(\xi) = \int\limits_{-h}^0 (-\mathcal{M}'(t))\overline{G}(\xi, te_1)\, dt, \tag{20}$$

где $\overline{G}(\xi,\eta) = G(\xi,\eta) - G(\xi,\widetilde{\eta})$ — функция Грина слоя Π_h''.

Поскольку $\overline{G}(\xi,\eta) \geq 0$ в Π_h', а $(-\mathcal{M}'(t)) > 0$ при $0 < t < h$, из (19) получаем $F_2(\xi) \geq 0$ при $0 \leq \xi_1 \leq h$. Аналогично, используя отрицательность $(-\mathcal{M}'(t))$ при $-h < t < 0$, из (20) имеем $F_2(\xi) \leq 0$ при $-h \leq \xi_1 \leq 0$.

Утверждение 2 доказано.

Вычислим $A(m,\alpha)$. С этой целью рассмотрим функцию

$$w(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{h}x_1, & x \in \Pi_h, \\ \operatorname{sign} x_1, & x \notin \Pi_h. \end{cases}$$

Функция w является решением задачи $\Delta w = 0,\ w|_{\partial\Pi_h} = \operatorname{sign}\xi_1$ в слое Π_h. Выражение (14) для этой функции с учетом утверждения 1 принимает вид

$$(I_{x_1}^\alpha w_{x_1}')(0) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi'(t)w(te_1)\, dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{\partial\Pi_h} |F_1(\xi)|\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\Phi'(t)|\, dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{\partial\Pi_h} |F_1(\xi)|\, d\xi. \tag{21}$$

Таким образом,

$$A(m,\alpha) = (I_{x_1}^\alpha w_{x_1}')(0).$$

Вычисляя $(I_{x_1}^\alpha w_{x_1}')(0)$, получаем

$$A(m,\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\,\frac{1}{h}\int\limits_{-h}^{h} \frac{1}{|t|^{1-\alpha}}\, dt = \frac{2}{\alpha\Gamma(\alpha)}\,\frac{1}{h^{1-\alpha}}. \tag{22}$$

Для отыскания $B(m,\alpha)$ рассмотрим функцию $v_{h,1},\ h > 0$ (см. (2)). Для ее производной имеем

$$(v_{h,1})'_{x_1} = \begin{cases} \dfrac{2}{h} - \dfrac{2x_1}{h^2}, & x_1 \in [0,h], \\[2ex] \dfrac{2}{h} + \dfrac{2x_1}{h^2}, & x_1 \in [-h,0], \\[2ex] 0, & x_1 \notin [-h,h]. \end{cases}$$

Ясно, что

$$(I^\alpha_{x_1}(v_{h,1})'_{x_1})(0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|t|^{1-\alpha}} (v_{h,1})'_{x_1}(e_1 t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^h \frac{1}{t^{1-\alpha}} \left(\frac{2}{h} - \frac{2t}{h^2}\right) dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-h}^0 \frac{1}{(-t)^{1-\alpha}} \left(\frac{2}{h} + \frac{2t}{h^2}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{2}{h} \int\limits_0^h \frac{1}{t^{1-\alpha}}\, dt - \frac{2}{h^2} \int\limits_0^h t^\alpha\, dt + \frac{2}{h} \int\limits_{-h}^0 \frac{dt}{(-t)^{1-\alpha}} + \frac{2}{h^2} \int\limits_{-h}^0 \frac{t}{(-t)^{1-\alpha}}\, dt \right) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{2}{\alpha} h^{\alpha-1} - \frac{2}{\alpha+1} h^{\alpha-1} + \frac{2}{\alpha} h^{\alpha-1} - \frac{2}{\alpha+1} h^{\alpha-1} \right) = \frac{4}{\alpha(\alpha+1)\Gamma(\alpha)} h^{\alpha-1}. \tag{23}$$

В то же время с учетом утверждений 1 и 2 выражение (14) для этой функции принимает вид

$$(I^\alpha_{x_1}(v_{h,1})'_{x_1})(0) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi'(t) v_{h,1}(te_1)\, dt - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{\partial\Pi_h} F_1(\xi) v(\xi)\, d\xi -$$

$$- \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{\Pi_h} F_2(\xi) \Delta v(\xi)\, d\xi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\Phi'(t)|\, dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{\partial\Pi_h} |F_1(\xi)|\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{\Pi_h} |F_2(\xi)| \frac{2}{h^2}\, d\xi = A(m,\alpha) + \frac{2}{h^2} B(m,\alpha).$$

Следовательно, с учетом (23) получаем

$$A(m,\alpha) + \frac{2}{h^2} B(m,\alpha) = \frac{4}{\alpha(\alpha+1)\Gamma(\alpha)} h^{\alpha-1}.$$

Отсюда, используя (22), находим

$$B(m,\alpha) = \frac{1-\alpha}{\alpha(\alpha+1)\Gamma(\alpha)} h^{1+\alpha}. \tag{24}$$

Подставляя (22) и (24) в (15), получаем неравенство

$$|(I^\alpha_{x_1} u'_{x_1})(0)| \le \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \left(\frac{2}{h^{1-\alpha}} \|u\|_C + \frac{1-\alpha}{1+\alpha} h^{1+\alpha} \|\Delta u\|_\infty \right),$$

откуда следует неравенство (3). Учитывая, что $\|v_{h,1}\|_C = 1$, $\|\Delta v_{h,1}\|_\infty = \dfrac{2}{h^2}$ и $\|I^\alpha_{x_1}(v_{h,1})'_{x_1}\|_\infty = = \dfrac{4}{\alpha(\alpha+1)\Gamma(\alpha)}\, h^{\alpha-1}$, нетрудно убедиться в том, что неравенство (3) превращается в равенство для функции $v_{h,1}$.

Подставляя в правую часть (3)

$$h = \sqrt{\frac{2\|u\|_C}{\|\Delta u\|_\infty}},$$

приходим к неравенству

$$\|I^\alpha_{x_1} u'_{x_1}\|_\infty \le \frac{2}{\Gamma(\alpha)}\, \frac{2^{\frac{1+\alpha}{2}}}{\alpha(1+\alpha)}\, \|u\|_C^{\frac{1+\alpha}{2}}\, \|\Delta u\|_\infty^{\frac{1-\alpha}{2}},$$

которое превращается в равенство для функции $v_{h,1}$ при любом значении параметра h.

Теорема доказана.

Литература

1. *Арестов В. В., Габушин В. Н.* Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 11. – С. 42 – 63.
2. *Арестов В. В.* Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи. мат. наук. – 1996. – **51**, № 6. – С. 88 – 124.
3. *Бабенко В. Ф., Корнейчук Н. П., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Неравенства для производных и их приложения. – Киев: Наук. думка, 2003. – 590 с.
4. *Коновалов В. Н.* Точные неравенства для норм функций, третьих частных и вторых смешанных производных // Мат. заметки. – 1978. – **23**, № 1. – С. 67 – 78.
5. *Буслаев А. П., Тихомиров В. М.* О неравенствах для производных в многомерном случае // Мат. заметки. – 1979. – **25**, № 1. – С. 59 – 74.
6. *Тимошин О. А.* Наилучшее приближение оператора второй смешанной производной // Изв. РАН. Сер. мат. – 1998. – **62**, № 1. – С. 201 – 210.
7. *Тимошин О. А.* Наилучшее приближение оператора второй смешанной производной в метриках L и C на плоскости // Мат. заметки. – 1984. – **36**, № 3. – С. 369 – 375.
8. *Тимофеев В. Г.* Неравенства типа Колмогорова с оператором Лапласа // Теория функций и приближений. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1983. – С. 84 – 92.
9. *Тимофеев В. Г.* Неравенства типа Ландау для функций нескольких переменных // Мат. заметки. – 1985. – **37**, № 5. – С. 676 – 689.
10. *Babenko V. F., Kofanov V. A., Pichugov S. A.* Multivariate inequalities of Kolmogorov type and their applications // Multivariate Approximation and Splines / Eds G. Nërberger, J. W. Schmidt, G. Walz. – Basel: Birkhäuser, 1997. – P. 1 – 12.
11. *Бабенко В. Ф.* О точных неравенствах типа Колмогорова для функций двух переменных // Доп. НАН України. – 2000. – № 5. – С. 7 – 11.
12. *Самко С. Г., Килбас А. А., Марычев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и их приложения. – Минск, 1987. – 650 с.
13. *Гейсберг С. П.* Обобщение неравенства Адамара // Исследование по некоторым проблемам конструктивной теории функций: Сб. науч. тр. ЛОМИ. – 1965. – **50**. – С. 42 – 54.
14. *Arestov V. V.* Inequalities for fractional derivatives on the half-line // Approxim. Theory. – Warsaw: PWN, 1979. – P. 19 – 34.
15. *Magaril-Il’jaev G. G., Tihomirov V. M.* On the Kolmogorov inequality for fractional derivatives on the half-line // Anal. Math. – 1981. – **7**, № 1. – P. 37 – 47.
16. *Бабенко В. Ф., Чурилова М. С.* О неравенствах типа Колмогорова для производных дробного порядка // Вестн. Днепропетр. ун-та. Математика. – 2001. – **6**. – С. 16 – 20.

17. *Babenko V. F., Pichugov S. A.* Kolmogorov type inequalities for fractional derivatives of Hölder functions of two variables // East J. Approxim. – 2007. – **13**, № 3. – P. 321 – 329.
18. *Бабенко В. Ф., Пичугов С. А.* Точные оценки для норм дробных производных функций многих переменных, удовлетворяющих условию Гельдера // Мат. заметки. – 2010. – **87**. – С. 26 – 34.
19. *Babenko V. F., Parfinovych N. V., Pichugov S. A.* Sharp Kolmogorov-type inequalities for norms of fractional derivatives of multivariate functions // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 3. – С. 301 – 314.
20. *Моторный В. П., Бабенко В. Ф., Довгошей А. А., Кузнецова О. И.* Теория аппроксимации и гармонический анализ. – Киев: Наук. думка, 2010. – 302 с.
21. *Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В., Пичугов С. А.* Неравенства типа Колмогорова для норм производных Рисса функций многих переменных с ограниченным в L_∞ лапласианом и смежные задачи // Мат. заметки. – 2014. – **95**, № 1. – С. 3 – 17.
22. *Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В.* Неравенства типа Колмогорова для норм производных Рисса функций многих переменных и некоторые их приложения // Укр. мат. вiсн. – 2012. – **9**, № 2. – С. 157 – 174.
23. *Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В.* Неравенства типа Колмогорова для норм производных Рисса функций многих переменных и некоторые их приложения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2011. – **17**, № 3. – С. 60 – 70.
24. *Landau E.* Einige Ungleichungen für zweimal differenzierbare Funktion // Proc. London Math. Soc. – 1913. – **13**. – P. 43 – 49.
25. *Бабенко В. Ф., Лескевич Т. Ю.* Приближение некоторых классов функций многих переменных гармоническими сплайнами // Укр. мат. журн. – 2010. – **64**, № 8. – С. 1011 – 1024.

Получено 30.03.15