УДК 517.98+517.954

Ю. В. Богданский, А. Ю. Потапенко (Ин-т прикл. систем. анализа Нац. техн. ун-та Украины „КПИ”, Киев)

ЛАПЛАСИАН ПО МЕРЕ НА РИМАНОВОМ МНОГООБРАЗИИ И ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ. I

We propose an L^2-version of the Laplacian with respect to measure on an infinite-dimensional Riemannian manifold. The Dirichlet problem for equations with proposed Laplacian is solved in the region of a Rimannian manifold from a certain class.

Запропоновано L^2-версію лапласіана за мірою на (нескінченновимірному) рімановому многовиді. Розв'язано задачу Діріхле для рівнянь з уведеним лапласіаном в області ріманового многовиду певного класу.

Различным вариантам оператора Лапласа для функций бесконечномерного аргумента посвящено много публикаций (см., например, работы [1 – 8]). В настоящей работе продолжено исследование иной конструкции — L^2-версии лапласиана по мере. Эта версия лапласиана для функций на гильбертовом пространстве была предложена и изучалась в работах [9 – 12].

В данной статье исследуется соответствующая конструкция лапласиана на сепарабельном римановом многообразии (вообще говоря, бесконечномерном) с заданной на нем борелевской мерой. Опубликовано достаточно много работ, посвященных изучению оператора Лапласа и связанных с ним уравнений на конечномерных римановых многообразиях (см., например, [13, 14]). Но в этих исследованиях лапласиан строился на базе риманова объема — меры, порожденной римановой метрикой. Принципиальное отличие бесконечномерного случая состоит в отсутствии канонической меры, ассоциированной с римановой метрикой.

Цель данной статьи — введение L^2-версии лапласиана по мере на (бесконечномерном) римановом многообразии, рассмотрение и решение (при дополнительных условиях) задачи Дирихле для уравнения с предложенным лапласианом в области риманова многообразия, а также приведение модельного примера многообразия с мерой, на котором реализуются все условия, используемые при решении задачи.

1. Лапласиан по мере в L^2-версии на римановом многообразии. Пусть $\mathcal{M}$ — сепарабельное риманово многообразие класса C^2, модельное пространство которого представляет собой (сепарабельное) вещественное гильбертово пространство H ($\dim H \leq \infty$). Риманов тензор R в каждом касательном пространстве $T_p(\mathcal{M})$ индуцирует структуру гильбертова пространства (изоморфного H) и порождает на $\mathcal{M}$ внутреннюю метрику. По отношению к этой метрике $\mathcal{M}$ предполагается сепарабельным пространством. Будем также предполагать полноту метрического пространства $\mathcal{M}$.

Обозначим через $C_b(\mathcal{M})$ пространство всех ограниченных непрерывных вещественных функций на $\mathcal{M}$, через $C_{b;v}(\mathcal{M})$ пространство всех непрерывных ограниченных векторных полей на $\mathcal{M}$, через $C_b^1(\mathcal{M})$ (соответственно $C_{b;v}^1(\mathcal{M})$) пространство всех функций $f \in C_b(\mathcal{M})$ (соответственно всех векторных полей $\mathbf{X} \in C_{b;v}(\mathcal{M})$), дифференцируемых в каждой точке $x \in \in \mathcal{M}$ с непрерывной и ограниченной на всем $\mathcal{M}$ производной $f'(\cdot)$ (соответственно $\mathbf{X}'(\cdot)$). Здесь $f'(p) \in T_p^*(\mathcal{M})$ определен формулой $f'(p)\colon T_p(\mathcal{M}) \ni \mathbf{Y}_p \longmapsto \mathbf{Y}_p f \in \mathbb{R}$, $\mathbf{X}'(p)$ — линейный оператор в $T_p(\mathcal{M})$, определенный формулой $\mathbf{X}'(p)\colon \mathbf{Y}_p \longmapsto \nabla_{\mathbf{Y}_p}\mathbf{X}$, где ∇ — связность Леви – Чивиты на $\mathcal{M}$ (бесконечномерный вариант см., например, в [15, с. 83]).

Пусть G — ограниченная область в $\mathcal{M}$ с границей $S = \partial G$. Через $C^1(G)$ обозначим семейство всех функций на $\overline{G}$, допускающих продолжение на все $\mathcal{M}$ до функций класса $C^1_b(\mathcal{M})$; через $C^1_0(\mathcal{M})$ — семейство функций из $C^1(G)$, носители которых не пересекаются с некоторой ε-окрестностью S. Аналогично определяем

$$C(G) = \left\{ f\big|_{\overline{G}} \;\Big|\; f \in C_b(\mathcal{M}) \right\} \qquad \text{и} \qquad C^1_v(G) = \left\{ \mathbf{X}\big|_{\overline{G}} \;\Big|\; \mathbf{X} \in C^1_{b,v}(\mathcal{M}) \right\}.$$

Пусть σ — конечная неотрицательная борелевская мера на $\mathcal{M}$. Через $L^2(G) = L^2(G, \sigma)$ обозначим пространство интегрируемых с квадратом функций на G по отношению к мере $\sigma\big|_G$. Векторное поле $\mathbf{X}$ на $\mathcal{M}$ назовем *измеримым*, если существует последовательность векторных полей $\mathbf{X}_m \in C_{b;v}(\mathcal{M})$, сходящаяся к $\mathbf{X}$ почти всюду ($\|\mathbf{X}_m(\cdot) - \mathbf{X}(\cdot)\| \to 0 \pmod{\sigma}$). Назовем векторное поле *интегрируемым*, если $\mathbf{X}$ измеримо и функция $\|\mathbf{X}(\cdot)\|$ принадлежит $L^1(\mathcal{M}, \sigma)$, и *интегрируемым с квадратом*, если $\mathbf{X}$ измеримо и функция $\|\mathbf{X}(\cdot)\|$ принадлежит $L^2(\mathcal{M}, \sigma)$.

***Замечание* 1.** В случае, когда многообразие $\mathcal{M}$ не является поверхностью в линейном пространстве, говорить о значении интеграла интегрируемого на $\mathcal{M}$ поля не представляется возможным.

Пространства интегрируемых и интегрируемых с квадратом векторных полей обозначим соответственно $L^1_v(\mathcal{M}) = L^1_v(\mathcal{M}, \sigma)$ и $L^2_v(\mathcal{M}) = L^2_v(\mathcal{M}, \sigma)$.

Скалярное произведение в $L^2_v(\mathcal{M})$ задаем формулой

$$(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \int\limits_{\mathcal{M}} (\mathbf{X}(\cdot), \mathbf{Y}(\cdot)) d\sigma = \int\limits_{\mathcal{M}} R(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) d\sigma,$$

а соответствующую норму $\mathbf{X}$ обозначим символом $|||\mathbf{X}|||$. Аналогично вводятся в рассмотрение пространства $L^2_v(G) = L^2_v(G; \sigma); L^\infty_v(\mathcal{M}); L^\infty_v(G)$.

Для функций $u \in C^1_b(\mathcal{M})$ на римановом многообразии определено векторное поле $\mathbf{grad}\, u \in C_{b;v}(\mathcal{M})$ (оно определено соотношением $R(\mathbf{grad}\, u, \mathbf{Y}) = \mathbf{Y}u$, которое выполнено для любого $\mathbf{Y} \in C^1_{b;v}(\mathcal{M})$). В случае, когда для любого непустого открытого множества $U \subset \mathcal{M}$ выполнено неравенство $\sigma(U) > 0$ (полнота носителя меры σ), равенство $u = v \pmod{\sigma}$ (здесь $u,\ v \in C^1_b(\mathcal{M})$) влечет равенство $\mathbf{grad}\, u = \mathbf{grad}\, v \pmod{\sigma}$. Тем самым корректно определен оператор

$$\mathbf{grad} = \mathbf{grad}_{\mathcal{M}} \colon L^2(\mathcal{M}) \supset C^1_b(\mathcal{M}) \ni u \longmapsto \mathbf{grad}\, u \in L^2_v(\mathcal{M}).$$

Поскольку $C^1_b(\mathcal{M})$ плотно в $L^2(\mathcal{M})$, корректно определен оператор

$$\operatorname{div} = -(\mathbf{grad})^* \colon L^2_v(\mathcal{M}) \longrightarrow L^2(\mathcal{M}).$$

В случае, когда оператор $\mathbf{grad}$ замыкаем, лапласиан (по мере σ) на $\mathcal{M}$ определен формулой

$$\Delta = \operatorname{div} \circ \overline{\mathbf{grad}},$$

где Δ — самосопряженный оператор в $L^2(\mathcal{M})$ (см., например, [16, с. 106]).

Поскольку $\mathcal{M}$ предполагается полным пространством относительно внутренней метрики, поле $\mathbf{X} \in C^1_b(\mathcal{M})$ является полным. Пусть $\Phi_t = \Phi^{\mathbf{X}}_t$ — поток поля $\mathbf{X}$. Дифференцируемость меры σ вдоль поля $\mathbf{X}$ понимается всюду в дальнейшем в сильном смысле: для каждого борелевского множества $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{M})$ существует предел $\nu(A) = \lim_{t\to 0} \dfrac{1}{t}(\sigma(\Phi_t A) - \sigma(A))$. Отсюда следует, что $\nu = d_X\sigma$ является борелевской мерой (знакопеременной), абсолютно непрерывной относительно σ. Логарифмическую производную меры σ вдоль поля $\mathbf{X}$ (т. е. дивергенцию поля $\mathbf{X}$ относительно меры σ) обозначим символом $\rho_\sigma = \rho_\sigma^X = \dfrac{d\nu}{d\sigma} = \mathrm{div}_\sigma \mathbf{X}$.

Пусть граница S ограниченной области $G \subset \mathcal{M}$ является гладким вложенным в $\mathcal{M}$ подмногообразием коразмерности 1, а поле внешней единичной нормали границы S продолжимо до векторного поля $\mathbf{n} \in C^1_{b;v}(\mathcal{M})$.

В случае, когда мера σ дифференцируема вдоль поля $\mathbf{n}$, говорим о „согласовании S с мерой σ". При согласовании меры σ с поверхностью $S = \partial G$ на S индуцируется поверхностная борелевская мера τ [9, 11, 17]. Мера τ на S корректно определена формулой

$$\int\limits_S f d\tau = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \int\limits_{\Phi_t^{\mathbf{n}} G} f d\sigma,$$

справедливой для каждой $f \in C_b(\mathcal{M})$. Другой подход к (эквивалентному) определению меры τ состоит в следующем: для множеств $A \subset \mathcal{M},\ B \subset \mathbb{R}$ вводим обозначение

$$\Phi_B A := \{\Phi_t^{\mathbf{n}} x \mid x \in A;\ t \in B\}.$$

Тогда для $A \in \mathfrak{B}(S)$ мера τ определена равенством

$$\tau(A) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \sigma\left(\Phi^{\mathbf{n}}_{(-\infty,t)} A\right) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \sigma\left(\Phi^{\mathbf{n}}_{(-\infty,t]} A\right) \tag{1}$$

(здесь использован тот факт, что $\sigma(\Phi_t^{\mathbf{n}} S) = 0$ для $t \in \mathbb{R}$) (см. [17]).

Для функций $u \in C_b^1(G)$ имеет место равенство

$$\int\limits_S u\, d\tau = \int\limits_G (\mathbf{grad}\, u, \mathbf{n})\, d\sigma + \int\limits_G u \cdot \mathrm{div}_G\, \mathbf{n}\, d\sigma \tag{2}$$

(см. [9, 17]).

В случае, когда $\mathrm{div}_\sigma \mathbf{n} \in L^\infty(\mathcal{M})$ (или, по крайней мере, $\mathrm{div}_\sigma \mathbf{n}\big|_G \in L^\infty(G)$), из (2) следует существование константы C, для которой при всех $u \in C^1(G)$ выполняется неравенство

$$\left\| u\big|_S \right\|_{L^2(S,\tau)} \le C\left(\|\, u \|_{L^2(G)} + |||\, \mathbf{grad}\, u\, |||_{L^2_v(G)} \right) \tag{3}$$

(в работе [9] формула доказана для гильбертова пространства, в случае риманова многообразия доказательство идентично).

В работе [9] установлена плотность множества $C_0^1(G)$ в пространстве $L^2(G)$ в случае, когда $\mathcal{M} = H$ — сепарабельное гильбертово пространство. В случае сепарабельного многообразия доказательство аналогично. Поэтому оператор

$$\mathbf{grad}_G \colon L^2(G) \supset C^1(G) \ni u \longmapsto \mathbf{grad}\, u \in L^2_v(G)$$

плотно определен. В случае, когда оператор $\mathbf{grad}_G$ допускает замыкание, а $\mathrm{div}_\sigma \mathbf{n} \in$ $\in L^\infty(\mathcal{M})$, из неравенства (3) следует корректность построения оператора следа

$$\gamma \colon L^2(G) \longrightarrow L^2(S) = L^2(S, \tau)$$

с областью определения $\mathcal{D}(\overline{\mathbf{grad}}_G)$, который для функции $u \in C^1(G)$ совпадает с оператором ограничения : $u \longmapsto u\big|_S$. Оператор γ является ограниченным оператором из банахова в норме графика пространства $\mathcal{D}(\overline{\mathbf{grad}}_G)$ в $L^2(S)$ (в работе [9] построение оператора γ обосновано для случая гильбертова пространства; случай риманова многообразия полностью аналогичен).

Оператор $\operatorname{div}_G\colon L^2_v(G) \longrightarrow L^2(G)$ введем формулой

$$\operatorname{div}_G = -\left(\overline{\mathbf{grad}}_G\Big|_{\operatorname{Ker}\gamma}\right)^*. \tag{4}$$

Целесообразность этого определения следует из формулы (4) работы [11]:

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\int\limits_{\Phi_t^{\mathbf{n}}G} u\,d\sigma = \int\limits_S (\mathbf{Z},\mathbf{n})u\,d\tau = \int\limits_G (\mathbf{grad}\,u,\mathbf{Z})\,d\sigma + \int\limits_G u\cdot\operatorname{div}_\sigma\mathbf{Z}\,d\sigma, \tag{5}$$

в которой $\mathbf{Z} \in C^1_{b;v}(\mathcal{M}), u \in C^1_b(\mathcal{M})$ и σ дифференцируема вдоль поля $\mathbf{Z}$.

В случае $u\big|_S = 0$ формула (5) превращается в равенство

$$\int\limits_G (\mathbf{grad}\,u,\mathbf{Z})\,d\sigma + \int\limits_G u\cdot\operatorname{div}_\sigma\mathbf{Z}\,d\sigma, = 0,$$

которое и является аргументом для введения оператора div_G формулой (4).

Лапласиан $\Delta_G\colon L^2(G) \longrightarrow L^2(G)$ определим формулой $\Delta_G = \operatorname{div}_G \circ \overline{\mathbf{grad}}_G$; Δ_G плотно определен, так как является расширением самосопряженного оператора $-\left(\overline{\mathbf{grad}}_G\right)^*\overline{\mathbf{grad}}_G$.

***Замечание* 2.** По аналогии с результатом работы [11] можно доказать следующее утверждение: $C_0(G)$ плотно в $\operatorname{Ker}\gamma$ в норме графика оператора $\overline{\mathbf{grad}}_G$.

2. Модельный пример. Пусть H — сепарабельное вещественное гильбертово пространство, D — ограниченная область в H, $\mathcal{M} = \partial D$ — граница области D — представляет собой гладкое класса C^2 вложенное в H подмногообразие коразмерности 1. Вложение $\mathcal{M}$ в H индуцирует на $\mathcal{M}$ структуру риманова многообразия. Поле внешней нормали к $\mathcal{M}$ предполагается продолжимым до векторного поля $\mathbf{N} \in C^1_{b;v}(H)$. Пусть μ — конечная борелевская (неотрицательная) мера в H, для которой существует в H полная система векторов h, вдоль которых мера μ L^2-дифференцируема $\Big($т. е. μ дифференцируема вдоль h и $\rho^h_\mu = \dfrac{d(d_h\mu)}{d\mu} \in L^2(H)\Big)$.

Меру μ подчиним также условию квазиинвариантности: множество квазиинвариантных сдвигов h $\big(\mu_h(A) := \mu(A+h);\ \mu_h \sim \mu\big)$ содержит плотное в H линейное подмногообразие. Для такой меры выполнено условие: $\mu(U) > 0$ для любого открытого множества в H (полнота носителя меры).

Если мера μ удовлетворяет приведенным выше условиям, то соответствующий оператор $\mathbf{grad}\colon L^2(H) \supset C^1_b(H) \longrightarrow L^2_v(H)$ корректно определен [9] (предложение 4). Примером меры μ, удовлетворяющей обоим приведенным условиям, является гауссова мера, корреляционный ядерный оператор которой имеет плотный образ в H.

К мере μ применим процедуру сглаживания вдоль поля $\mathbf{N}$ (см. [10]). При этом мера μ_φ строится по правилу

$$\mu_\varphi(A) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,\mu\left(\Phi_t^{\mathbf{N}}A\right)dt.$$

Здесь A — произвольное борелевское множество в H, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,dt < \infty$.

Полученная мера μ_φ дифференцируема вдоль поля $\mathbf{N}$.

Если существует константа $C > 0$, для которой при всех $s \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $|\varphi'(s)| \leq C\varphi(s)$ $\left(\text{например, } \varphi(s) = \dfrac{1}{1+s^2}\right)$, то $\rho^{\mathbf{N}}_{\mu_\varphi} \in L^\infty(H;\mu_\varphi)$.

В работе [10] доказано, что при переходе от меры μ к мере μ_φ сохраняется условие полноты носителя меры, а также условие замыкаемости оператора $\mathbf{grad}$ (но теперь уже $\mathbf{grad}\colon L^2(H;\mu_\varphi) \longrightarrow L^2_v(H;\mu_\varphi)$).

Мера μ_φ согласована с $\mathcal{M} = \partial D$, что позволяет индуцировать на $\mathcal{M}$ поверхностную меру σ.

***Замечание* 3.** Согласование меры μ с поверхностью $\mathcal{M}$ предполагает существование по крайней мере одного векторного поля $\mathbf{N} \in C^1_{b;v}(H)$, ограничение которого на $\mathcal{M}$ совпадает с полем единичной нормали к $\mathcal{M}$ и вдоль которого мера μ дифференцируема. В этой связи возникает проблема описания класса поверхностей в H, согласованных с заданной мерой μ. Данный вопрос представляется весьма непростым и исследован не был. Процедура сглаживания меры вдоль векторного поля позволяет решать двойственную задачу: построение класса мер, согласованных с фиксированной поверхностью.

Далее будет доказано (теорема 1), что в случае, когда $\rho^{\mathbf{N}}_{\mu_\varphi}$ принадлежит $L^\infty(H;\mu_\varphi)$ (а это условие осуществимо), индуцированная на $\mathcal{M}$ мера σ наследует два свойства меры μ_φ: полноту носителя меры и замыкаемость (индуцированного) оператора

$$\mathbf{grad}_{\mathcal{M}}\colon L^2(\mathcal{M},\sigma) \supset C^1_b(\mathcal{M}) \ni u \longmapsto \mathbf{grad}_{\mathcal{M}} u \in L^2_v(\mathcal{M};\sigma)$$

(напомним построение индуцированного оператора $\mathbf{grad}_{\mathcal{M}}$: $(\mathbf{grad}_{\mathcal{M}} u)(x) = P_x((\mathbf{grad}\,\hat{u})(x))$, где $\hat{u} \in C^1_b(H)$, $\hat{u}\big|_{\mathcal{M}} = u$, P_x — ортопроектор в H, $\operatorname{Im} P_x = T_x(\mathcal{M})$).

Непрерывность поля $\mathbf{N}$ на $\mathcal{M} = \partial D$ обеспечивает совпадение на $\mathcal{M}$ двух топологий: индуцированной вложением в H и порожденной внутренней метрикой. Поэтому $\mathcal{M}$ является полным метрическим пространством относительно внутренней метрики, что гарантирует полноту на $\mathcal{M}$ векторных полей класса $C^1_b(\mathcal{M})$.

Теорема 1. *Пусть D — ограниченная область в гильбертовом пространстве H, $\mathbf{N} \in C^1_{b;v}(H)$ — векторное поле в H, представляющее собой продолжение поля внешней единичной нормали к границе $\mathcal{M} = \partial D$ области D, μ — борелевская конечная* (*неотрицательная*) *мера в H, дифференцируемая вдоль поля $\mathbf{N}$, мера μ имеет полный носитель, $\operatorname{div}_\mu \mathbf{N} \in L^\infty(H)$, σ — мера на $\mathcal{M}$, индуцированная мерой μ. Пусть, далее, оператор $\mathbf{grad}\colon L^2(H) \supset C^1_b(H) \longrightarrow L^2_v(H)$ замыкаем. Тогда индуцированный на $\mathcal{M}$ оператор*

$$\mathbf{grad}_{\mathcal{M}}\colon L^2(\mathcal{M},\sigma) \supset C^1_b(\mathcal{M}) \ni u \longmapsto \mathbf{grad}_{\mathcal{M}} u \in L^2_v(\mathcal{M},\sigma)$$

корректно определен и замыкаем.

Доказательство. Положим $C = \|\operatorname{div}_\mu \mathbf{N}\|_{L^\infty(H)}$. В работе [11] (лемма 2) было доказано следующее утверждение: если $\operatorname{div}_\mu \mathbf{N} \in L^\infty(H)$, то $\mu_t \prec \mu$ для каждого $t \in R$ (здесь $\mu_t = \mu \circ \Phi_t$, Φ_t — поток поля $\mathbf{N}$), $\dfrac{d\mu_t}{d\mu} \in L^\infty(H)$ и при этом

$$\frac{d\mu_t}{d\mu} \leq e^{C|t|} \pmod{\mu}. \tag{6}$$

Для каждого борелевского множества $A \in \mathfrak{B}(H)$ справедливы равенства

$$d_{\mathbf{N}}\mu_t(A) = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \mu_{t+s}(A) = \int\limits_{\Phi_t A} \operatorname{div}_\mu \mathbf{N}\, d\mu.$$

Отсюда $|d_{\mathbf{N}}\, \mu_t(A)| \leq C\mu(\Phi_t A) = C\mu_t(A)$, поэтому

$$|\operatorname{div}_{\mu_t}\mathbf{N}| \leq C(\operatorname{mod}\, \mu_t), \qquad \mu \sim \mu_t, \qquad \|\operatorname{div}_{\mu_t}\mathbf{N}\|_{L^\infty(H)} = \|\operatorname{div}_\mu \mathbf{N}\|_{L^\infty(H)}.$$

Далее, отсюда следует неравенство $\dfrac{d\mu}{d\mu_t} \leq e^{C|t|}$ $(\operatorname{mod}\, \mu)$, и, следовательно,

$$\frac{d\mu_t}{d\mu} \geq e^{-C|t|} \quad (\operatorname{mod}\, \mu). \tag{7}$$

Шаг 1. Докажем полноту носителя меры σ.

Пусть V — непустое открытое множество в $\mathcal{M}$. Тогда $\Phi_{(-\infty,t)}V = \{\Phi_s x \,|\, s < t;\ x \in V\}$ — непустое открытое множество в H.

По аналогии с формулой (1) имеет место формула

$$\sigma(V) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \mu\left(\Phi_{(-\infty,t)}V\right). \tag{8}$$

Далее

$$\frac{d}{dt}\mu\left(\Phi_{(-\infty,t)}V\right) = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \mu\left(\Phi_{(-\infty,t+s)}V\right) = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \mu_t\left(\Phi_{(-\infty,t)}V\right). \tag{9}$$

В силу неравенства (6) при фиксированном t функция

$$h(s) = \mu\big(\Phi_{(-\infty,s)}V\big)\, e^{C|t|} - \mu_t\big(\Phi_{(-\infty,s)}V\big)$$

является монотонно неубывающей. Поэтому выполняется неравенство

$$\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \mu_t\left(\Phi_{(-\infty,s)}V\right) \leq e^{C|t|} \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \mu\left(\Phi_{(-\infty,s)}V\right),$$

или, с учетом (8) и (9), неравенство

$$\frac{d}{dt}\mu\left(\Phi_{(-\infty,t)}V\right) \leq e^{C|t|}\sigma(V).$$

Отсюда (в силу полноты носителя меры μ)

$$0 < \mu\left(\Phi_{(0,1)}V\right) = \int\limits_0^1 dt \left(\frac{d}{dt}\mu\left(\Phi_{(-\infty,t)}V\right)\right) \leq \sigma(V) \int\limits_0^1 e^{C|t|}dt.$$

Тем самым $\sigma(V) > 0$ для непустого открытого множества $V \subset S$.

Шаг 2. Пусть $u \in C_b^1(\mathcal{M})$. Функцию $\hat{u}\colon H \longrightarrow \mathbb{R}$ строим по следующему правилу. Пусть $\varphi \in C^\infty(R)$, $0 \leq \varphi \leq 1$, существуют $\delta > 0$ и $\varepsilon \in (0,\delta)$ такие, что $\operatorname{supp}\varphi \subset (-\delta,\delta)$, $\varphi(t) = 1$

для $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Если $x = \Phi_t y,\ y \in \mathcal{M},\ |t| < \delta$, то полагаем $\hat{u}(x) = \varphi(t)u(y)$. Для остальных значений $x \in H$ полагаем $\hat{u}(x) = 0$.

Очевидно, $\hat{u} \in C_b^1(H)$ и отображение $C_b^1(\mathcal{M}) \ni u \longmapsto \hat{u} \in C_b^1(H)$ линейно.

Докажем, что отображение $L^2(\mathcal{M};\sigma) \supset C_b^1(\mathcal{M}) \ni u \longmapsto \hat{u} \in L^2(H;\mu)$ является непрерывным. Имеем

$$\|u\|^2_{L^2(H)} = \int\limits_{\Phi_\delta D \setminus \Phi_{-\delta} D} \hat{u}^2 d\mu = \int\limits_{-\delta}^{\delta} dt \left(\frac{d}{dt} \int\limits_{\Phi_t D} \hat{u}^2 d\mu \right), \tag{10}$$

$$\int\limits_{\Phi_t D_1} \hat{u}^2\, d\mu = \int\limits_{D_1} (\hat{u} \circ \Phi_t)^2 d\mu_t = \int\limits_{D_1} (\hat{u} \circ \Phi_t)^2 \frac{d\mu_t}{d\mu}\, d\mu. \tag{11}$$

Далее воспользуемся следующим фактом: если функция w неотрицательна, существует $\left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=0} \displaystyle\int_{\Phi_t D_1} w d\mu$ и при достаточно малых $t > 0$ имеет место вложение $\Phi_t D_1 \supset D_1$, то

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int\limits_{\Phi_t D_1} w d\mu = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(\int\limits_{\Phi_t D_1} w d\mu - \int\limits_{D_1} w d\mu \right) \geq 0.$$

На основании (11), полагая $D_1 = \Phi_s D$ (при достаточно малых s и $t > 0$ имеет место вложение $\Phi_s D \subset \Phi_{t+s} D$) и используя (6), получаем

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{\Phi_t D} \hat{u}^2\, d\mu = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \int\limits_{\Phi_t(\Phi_s D)} \hat{u}^2\, d\mu = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \int\limits_{\Phi_s D} (\hat{u} \circ \Phi_t)^2 \frac{d\mu_t}{d\mu} d\mu \leq$$

$$\leq e^{C|t|} \int\limits_S (\hat{u} \circ \Phi_t)^2 d\sigma = e^{C|t|} \varphi^2(t) \int\limits_S u^2 d\sigma. \tag{12}$$

Теперь из (10) и (12) следует неравенство

$$\|\hat{u}\|^2_{L^2(H)} \leq \int\limits_{-\delta}^{\delta} e^{C|t|} \varphi^2(t) t \int\limits_S u^2 d\sigma,$$

что доказывает L^2-непрерывность отображения $u \longmapsto \hat{u}$.

Шаг 3. Докажем существование таких констант $K_1,\ K_2 \in \mathbb{R}$, что для любой функции $u \in C_b^1(\mathcal{M})$ выполняется неравенство

$$|||\, \mathbf{grad}\, \hat{u}\, |||^2 \leq K_1 |||\, \mathbf{grad}_{\mathcal{M}} u\, |||^2 + K_2 \|u\|^2_{L^2(\mathcal{M})}. \tag{13}$$

Для точек x, лежащих в достаточно малой окрестности $\mathcal{M}$ (представимых в виде $x = \Phi_t y = \Phi(t, y)$, где $t \in \mathbb{R},\ y \in \mathcal{M}$), обозначим через $t(x)$ значение t, при котором $x = \Phi(t(x), y),\ y \in \mathcal{M}$. Следовательно, $\Phi(-t(x), x) \in \mathcal{M}$.

$\frac{d}{dx}\Phi(-t(x),x)$ — линейный оператор в H, образ которого — касательное пространство к $\mathcal{M}$ в соответствующей точке $y=\Phi(-t(x),x)$. Поэтому $\frac{d}{dx}\Phi(-t(x),x)h\perp\mathbf{n}(\Phi(-t(x),x))$ для каждого $h\in H$, откуда получаем

$$\left(\frac{d}{dx}\Phi(-t(x),x)\right)^{*}\mathbf{n}(\Phi(-t(x),x))=0. \tag{14}$$

Далее используем непрерывную дифференцируемость функции $t(\cdot)$ (следует из теоремы о неявной функции):

$$\frac{d}{dx}\Phi(-t(x),x)=-\frac{\partial\Phi}{\partial t}(-t(x),x)\cdot t'(x)+\frac{\partial\Phi}{\partial x}(-t(x),x)=$$

$$=-\mathbf{n}(\Phi(-t(x),x))\cdot t'(x)+\frac{\partial\Phi}{\partial x}(-t(x),x),$$

откуда следует равенство

$$\left(\frac{d}{dx}\Phi(-t(x),x)\right)^{*}=-\mathbf{grad}\,t(x)\cdot\mathbf{n}^{*}(\Phi(-t(x),x))+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}(-t(x),x)\right)^{*}. \tag{15}$$

Здесь вектор h интерпретируем как оператор $\mathbb{R}\ni s\longmapsto sh\in H$. Поэтому

$$h_1h_2^{*}\colon H\ni x\longmapsto(x,h_2)h_1\in H,\qquad h_1^{*}h_2\colon\mathbb{R}\ni s\longmapsto(h_1,h_2)s\in\mathbb{R}.$$

Теперь из (14) и (15) следует

$$-\mathbf{grad}\,t(x)\cdot\mathbf{n}^{*}(\Phi(-t(x),x))\cdot\mathbf{n}(\Phi(-t(x),x))+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}(-t(x),x)\right)^{*}\cdot$$

$$\cdot\mathbf{n}\left(\Phi(-t(x),x)\right)=0. \tag{16}$$

Поскольку $\mathbf{n}^{*}(y)\mathbf{n}(y)=\|n(y)\|^{2}=1$ (здесь $y\in\mathcal{M}$), из (16) получаем

$$\mathbf{grad}\,t(x)=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}(-t(x),x)\right)^{*}\mathbf{n}\left(\Phi(-t(x),x)\right). \tag{17}$$

Для точек x вида $x=\Phi(t,y)$ $(y\in\mathcal{M})$ имеем

$$\hat{u}(x)=\varphi(t(x))\,u\left(\Phi(-t(x),x)\right),$$

$$\hat{u}'(x)=\varphi'(t(x))\,t'(x)\,u\left(\Phi(-t(x),x)\right)+\varphi(t(x))\,u'(\Phi(-t(x),x))\frac{d}{dx}\Phi(-t(x),x).$$

Поэтому, учитывая (15), (17) и равенство $\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t,x)=\mathbf{n}(\Phi(t,x))$, находим

$$\mathbf{grad}\,\hat{u}(x)=\varphi'(t(x))u\left(\Phi(-t(x),x)\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}(-t(x),x)\right)^{*}\mathbf{n}\left(\Phi(-t(x),x)\right)+$$

$$+\varphi(t(x))\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}(-t(x),x)\right)^{*}-\mathbf{grad}\,t(x)\cdot\mathbf{n}^{*}(\Phi(-t(x),x))\cdot\mathbf{grad}\,u\left(\Phi(-t(x),x)\right),$$

откуда, учитывая равенство, справедливое для $y \in \mathcal{M}$,

$$\mathbf{n}^*(y)\mathbf{grad}\, u(y) = (\mathbf{grad}\, u(y), \mathbf{n}(y)) = 0,$$

получаем

$$\mathbf{grad}\, \hat{u}(x) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(-t(x), x)\right)^* (\varphi(t(x))\, \mathbf{grad}\, u\, (\Phi(-t(x), x))) + \\ + \varphi'(t(x)) u\, (\Phi(-t(x), x))\, \mathbf{n}\, (\Phi(-t(x), x)). \tag{18}$$

Заметим, что при достаточно малых t для всех $x \in H$ имеет место оценка $\left\|\dfrac{\partial}{\partial x}\Phi_t x\right\| \le 2$. Доказательство этого факта содержится в шаге 5.

Поэтому при достаточно малом $\delta > 0$ из (18) при $|t| < \delta$ и $y \in \mathcal{M}$ следует неравенство

$$\|\mathbf{grad}\, \hat{u}\, (\Phi_t y)\| \le 2 \left(\varphi(t)\, \|\mathbf{grad}_{\mathcal{M}}\, u(y)\| + |\varphi'(t)||u(y)|\right). \tag{19}$$

Теперь по аналогии с шагом 2 (см. (12)) из (19) получаем

$$\int\limits_H \|\mathbf{grad}\, \hat{u}\|^2\, d\mu = \int\limits_{-\delta}^{\delta} dt \left(\frac{d}{dt} \int\limits_{\Phi_t D} \|\mathbf{grad}\, \hat{u}\|^2\, d\mu\right) \le$$

$$\le \int\limits_{-\delta}^{\delta} dt \int\limits_{\mathcal{M}} e^{C|t|}\, 8 \left(\varphi^2(t) \|\mathbf{grad}_{\mathcal{M}}\, u\|^2 + (\varphi'(t))^2 u^2\right)\, d\sigma =$$

$$= 8 \int\limits_{-\delta}^{\delta} e^{C|t|}\, \varphi^2(t)\, dt \int\limits_{\mathcal{M}} \|\mathbf{grad}_{\mathcal{M}}\, u\|^2 d\sigma + 8 \int\limits_{-\delta}^{\delta} e^{C|t|}\, (\varphi'(t))^2\, dt \int\limits_{\mathcal{M}} u^2 d\sigma,$$

откуда и следует оценка (13).

Шаг 4. Пусть последовательность функций $u_m \in C_b^1(\mathcal{M})$ сходится к 0 в $L^2(\mathcal{M})$, $\mathbf{grad}_{\mathcal{M}} u_m \to \mathbf{Z}$ в $L_v^2(\mathcal{M})$. Для проверки замыкаемости оператора $\mathbf{grad}_{\mathcal{M}}$ следует показать, что $\mathbf{Z} = 0 \pmod{\sigma}$.

В силу доказанного выше для последовательности функций $\hat{u}_m$ имеют место сходимости $\hat{u}_m \to 0$ в $L^2(H)$, $\mathbf{grad}\, \hat{u}_m \to W$ в $L_v^2(H)$. Из замыкаемости оператора $\mathbf{grad}$ следует равенство $W = 0 \pmod{\mu}$.

$\varphi(t) = 1$ при $|t| < \varepsilon$, поэтому для $y \in \mathcal{M}$ при $|t| < \varepsilon$ из (18) получаем равенство

$$\mathbf{grad}_{\mathcal{M}} u(y) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(-t, \Phi_t y)\right)^* \mathbf{grad}\, \hat{u}(\Phi_t y),$$

откуда следует неравенство

$$\|\mathbf{grad}_{\mathcal{M}} u(y)\| \le \left\|\frac{\partial \Phi}{\partial x}(-t, \Phi_t y)\right\|\, \|\mathbf{grad}\, \hat{u}(\Phi_t y)\|. \tag{20}$$

Далее (см. шаг 5) будет доказано, что при достаточно малых t при всех $x \in H$ выполнено неравенство $\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t,x) \right\| \leq 2.$

Поэтому при достаточно малом $\delta > 0$ (и, соответственно, $\varepsilon > 0$) при всех $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ и $x \in \mathcal{M}$ из (20) следует неравенство

$$\|\mathbf{grad}\, \hat{u}\,(\Phi_t x)\| \geq \frac{1}{2} \|\mathbf{grad}_{\mathcal{M}} u(x)\|. \tag{21}$$

Отсюда

$$\int\limits_H \|\mathbf{grad}\, \hat{u}\|^2 \, d\mu \geq \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dt \left(\frac{d}{dt} \int\limits_{\Phi_t D} \|\mathbf{grad}\, \hat{u}\|^2 \, d\mu \right) =$$

$$= \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left(\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \int\limits_{\Phi_s D} \left(\|\mathbf{grad}\, \hat{u}\|^2 \circ \Phi_t \right) \frac{d\mu_t}{d\mu} d\mu \right) dt \geq [\text{в силу (7) и (21)}] \geq$$

$$\geq \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dt \int\limits_{\mathcal{M}} \frac{1}{4} e^{-C|t|} \|\mathbf{grad}_{\mathcal{M}} u\|^2 d\sigma = \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{4} e^{-C|t|} dt \int\limits_{\mathcal{M}} \|\mathbf{grad}_{\mathcal{M}} u\|^2 d\sigma.$$

Поэтому существует константа $K > 0$ такая, что для всех $u \in C_b^1(\mathcal{M})$ имеет место оценка

$$|||\, \mathbf{grad}\, \hat{u}\, ||| \geq K |||\, \mathbf{grad}_{\mathcal{M}} u\, |||,$$

откуда и следует необходимый результат.

Шаг 5. Для каждого фиксированного $x \in H$ однопараметрическое операторное семейство $\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \Phi_t x \right\}$ удовлетворяет уравнению $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Phi_t x \right) = \mathbf{N}'(\Phi_t x) \frac{\partial}{\partial x} \Phi_t x$ и начальному условию $\frac{\partial}{\partial x} \Phi_t x \Big|_{t=0} = \mathrm{I}$. Тем самым $X(t) = \frac{\partial}{\partial x} \Phi_t x$ является решением задачи Коши

$$\frac{d}{dt} X(t) = A(t) X(t),$$

$$X(0) = \mathrm{I},$$

где $A(t) = \mathbf{N}'(\Phi_t x)$.

Согласно условию, наложенному на поле $\mathbf{N}$, $\sup\limits_H \|\mathbf{N}'(\cdot)\| < \infty$, поэтому, в силу оценки $\|X(t)\| \leq \exp \left(\int_0^t \|A(\tau)\| \, d\tau \right)$ (см. [18]), делаем вывод о существовании $\delta > 0$, для которого при всех $t \in (-\delta, \delta)$ и $x \in H$ справедлива оценка

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} \Phi_t x \right\| \leq 2.$$

Теорема 1 доказана.

Во второй части работы в области риманова многообразия $\mathcal{M}$ класса C^2 с конечной борелевской мерой σ, имеющей свойство полноты носителя, будет рассмотрен пример задачи Дирихле. При этом будет доказано, что условие замыкаемости оператора $\mathbf{grad} = \mathbf{grad}_{\mathcal{M}}$ позволяет реализовать при исследовании поставленной задачи классическую технику.

Литература

1. *Gross L.* Potential theory on Hilbert space // J. Funct. Anal. – 1967. – **1**. – P. 123 – 181.
2. *Далецкий Ю. Л.* Бесконечномерные эллиптические операторы и связанные с ними параболические уравнения // Успехи мат. наук. – 1967. – **22**, № 4. – С. 3 – 54.
3. *Леви П.* Конкретные проблемы функционального анализа. – М.: Наука, 1967. – 512 с.
4. *Немировский А. С., Шилов Г. Е.* Об аксиоматическом описании оператора Лапласа для функций на гильбертовом пространстве // Функцион. анализ и его прил. – 1969. – **3**, № 3. – С. 79 – 85.
5. *Богданский Ю. В.* Задача Коши для параболических уравнений с существенно бесконечномерными эллиптическими операторами // Укр. мат. журн. – 1977. – **29**, № 6. – С. 781 – 784.
6. *Accardi L., Smolianov O.G.* On Laplacians and traces // Conf. Semin. Univ. Bari. – 1993. – **250**. – P. 1 – 25.
7. *Accardi L., Barhoumi A., Ouerdiane H.* A quantum approach to Laplace operators // Infinite Dimens. Anal. Quant. Probab. Relat. Top. – 2006. – **9**. – P. 215 – 248.
8. *Accardi L., Ji U. C., Saito K.* Exotic Laplacians and associated stohastic processes // Infinite Dimens. Anal. Quant. Probab. Relat. Top. – 2009. – **12**. – P. 1 – 19.
9. *Богданский Ю. В.* Лапласиан по мере на гильбертовом пространстве и задача Дирихле для уравнения Пуассона в L_2-версии // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 9. – С. 1169 – 1178.
10. *Богданский Ю. В., Санжаревский Я. Ю.* Задача Дирихле с лапласианом по мере на гильбертовом пространстве // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 6. – С. 733 – 739.
11. *Богданский Ю. В.* Граничный оператор следа в области гильбертова пространства и характеристическое свойство его ядра // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 11. – С. 1450 – 1460.
12. *Богданский Ю. В., Санжаревский Я. Ю.* Лапласиан по мере и эргодическая теорема // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 9. – С. 1172 – 1180.
13. *Aubin T.* Nonlinear analisys on manifolds. Monge – Ampère equations. – New York: Springer-Verlag, 1982. – 204 p.
14. *Strichartz R. S.* Analysis of the Laplacian on the complete Riemannian manifold // J. Funct. Anal. – 1983. – **52**. – P. 48 – 79.
15. *Далецкий Ю. Л., Белопольская Я. И.* Стохастические уравнения и и дифференциальная геометрия. – Киев: Вища шк., 1989. – 296 с.
16. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. – Л.: Изд-во Ленингр. гос. ун-та, 1980. – 264 с.
17. *Богданский Ю. В.* Банаховы многообразия с ограниченной структурой и формула Гаусса – Остроградского // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 10. – С. 1299 – 1313.
18. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 534 с.

Получено 15.12.15