УДК 519.21

**І. К. Мацак** (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

# АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ЗНАЧЕНЬ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН. ДИСКРЕТНИЙ ВИПАДОК

We study the exact asymptotics of almost surely extreme values of discrete random variables.

Исследуется асимптотика почти наверное экстремальных значений дискретных случайных величин.

**1. Вступ.** Розглянемо послідовність $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ незалежних однаково розподілених випадкових величин (н. о. р. в. в.) з функцією розподілу (ф. р.)$F(t) = \mathbf{P}(\xi < t)$. Нехай

$$z_n = \max_{1 \le i \le n} \xi_i.$$

Починаючи з класичної роботи [1] асимптотичну поведінку $z_n$ досліджували досить широко (див., наприклад, [2 – 8]). Так, ще в [1] було знайдено необхідні і достатні умови для асимптотичної стійкості за ймовірністю:

$$\exists (\alpha_n) \quad z_n - \alpha_n \xrightarrow{P} 0, \quad n \to \infty. \tag{1}$$

Нехай $\xi$ — дискретна в. в. з розподілом $(k, p_k),\ k \ge 1$. Далі у статті скрізь вважаємо, що

$$\mathbf{P}(\xi = k) = p_k > 0, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1,$$

$$R(k) = -\ln\big(1 - F(k)\big) = -\ln\left(\sum_{i \ge k} p_i\right), \qquad r(k) = R(k) - R(k-1).$$

Для дискретних в. в. C. W. Anderson [9] знайшов цікаве уточнення (1): для того щоб існувала послідовність цілих чисел $(k_n)$, для якої

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}\Big(\{z_n = k_n\} \bigcup \{z_n = k_n + 1\}\Big) = 1, \tag{2}$$

необхідною і достатньою є умова

$$r(k) \to \infty, \quad k \to \infty. \tag{3}$$

Якщо поставити питання про асимптотику $z_n$ майже напевно (м. н.), то окрім статті [10] автору невідомі роботи, в яких розглядається дискретний випадок. У статті [10] доведено таку теорему.

**Теорема A.** *Нехай $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ — послідовність дискретних н. о. р. в. в. з розподілом $(k, p_k)$, $k \ge 1$, визначена вище функція $r(k)$ монотонно зростає і*

$$\sum_{k \ge 1} r(k+1) \exp(-r(k)) < \infty. \tag{4}$$

*Тоді*

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k\right)=1, \tag{5}$$

*де*

$$A_n=\{z_n=a_n-1\}\bigcup\{z_n=a_n\}\bigcup\{z_n=a_n+1\}$$

$$a_n=\max\left(k\colon\sum_{i\geq k}p_i\geq\frac{1}{n}\right).$$

У цій теоремі залишається незрозумілим наскільки умова (4) є близькою до необхідної для виконання рівності (5).

Зазначимо, що геометричний і пуассонівський розподіли не задовольняють умову (4). Але якщо асимптотична поведінка $z_n$ для геометричного розподілу є відомою [10], то аналогічне питання для пуассонівського розподілу залишалося відкритим.

Інше природне питання виникає із результату [9]: чи не можна в рівності (5) замінити події$A_n$ на $\tilde{A}_n=\{z_n=k_n\}\bigcup\{z_n=k_n+1\}$ ?

У даній роботі ми спробуємо знайти відповіді на ці питання.

**2. Основні результати.**

**Теорема 1.** *Нехай* $\xi,\xi_1,\xi_2,\ldots$ — *послідовність дискретних н. о. р. в. в. з розподілом* $(k,p_k)$, $k\geq1,\ r(k)$ — *монотонна функція і виконується умова* (3). *Рівність*

$$\mathbf{P}(z_n>a_n+1\quad \textit{н. ч.})=0 \tag{6}$$

*має місце тоді і тільки тоді, коли*

$$\sum_{k\geq1}\exp(-r(k))<\infty. \tag{7}$$

*Більше того, якщо* (7) *виконується, то*

$$\mathbf{P}(z_n=a_n+1\quad \textit{н. ч.})=1, \tag{8}$$

*де н. ч. означає нескінченно часто.*

**Теорема 2.** *Нехай* $\xi,\xi_1,\xi_2,\ldots$ — *послідовність дискретних н. о. р. в. в. з розподілом* $(k,p_k)$, $k\geq1,\ r(k)$ — *монотонна функція і виконується умова* (3). *Рівність*

$$\mathbf{P}(z_n<a_n-1\quad \textit{н. ч.})=0 \tag{9}$$

*має місце тоді і тільки тоді, коли*

$$\sum_{k\geq1}\exp(-e^{r(k)})<\infty. \tag{10}$$

*Більш того, якщо* (10) *виконується, то*

$$\mathbf{P}(z_n=a_n-1\quad \textit{н. ч.})=1. \tag{11}$$

Наведені теореми дозволяють дещо послабити умову (4) теореми А.

***Наслідок* 1.** *Якщо в умовах теореми* 1 *виконується нерівність* (7), *то справджуються співвідношення* (5), (8), (11).

***Зауваження* 1.** Здається правдоподібним, що в умовах наслідку 1

$$\mathbf{P}(z_n = a_n \quad \text{н. ч.}) = 1.$$

Далі ми встановимо навіть сильніше твердження, хоча і при більш жорстких умовах.

Із наслідку 1 випливає, що в рівності (5) не можна замінити події $A_n$ на $A_n^{'} = \{z_n = a_n\} \bigcup \{z_n = a_n - 1\}$ чи $A_n^{''} = \{z_n = a_n\} \bigcup \{z_n = a_n + 1\}$. Проте деякий аналог результату із [9], який виконується м. н., все ж можна довести.

Зафіксуємо деяке $\alpha, 0 < \alpha < 1/2$, та розглянемо такі підмножини натуральних чисел:

$$J_\alpha = \big\{ n \geq 1 \, \exists k \geq 1 \colon R(k) + \alpha r(k+1) \leq \ln n < R(k) + (1-\alpha) r(k+1) \big\},$$

$$J_\alpha^- = \big\{ n \geq 1 \, \exists k \geq 1 \colon R(k) \leq \ln n < R(k) + \alpha r(k+1) \big\}.$$

Покладемо

$$\kappa_n = \begin{cases} a_n - 1 & \text{при} \quad n \in J_\alpha^-, \\ a_n & \text{— в протилежному випадку.} \end{cases}$$

**Теорема 3.** *Нехай* $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ *— послідовність дискретних н. о. р. в. в. з розподілом* $(k, p_k)$, $k \geq 1$, $r(k)$ *— монотонна функція і виконується умова* (4). *Тоді справджуються рівності*

$$\mathbf{P}\Big( \exists n_\alpha \, \forall n > n_\alpha \colon \{z_n = \kappa_n\} \bigcup \{z_n = \kappa_n + 1\} \Big) = 1, \tag{12}$$

$$\mathbf{P}\big( \exists n_\alpha \, \forall n > n_\alpha, n \in J_\alpha \colon z_n = a_n \big) = 1. \tag{13}$$

Із наведених вище теорем зрозуміло, що асимптотична поведінка $z_n$ у дискретному випадку при умовах типу (7) істотно відрізняється від неперервного випадку (див., наприклад, [4, 8]).

Якщо ж $R(k)$ зростає повільніше, ніж лінійна функція, то ситуація змінюється. Так, у праці [10] показано, що асимптотики $z_n$ для геометричного і відповідного експоненціального розподілів еквівалентні. Наступна теорема поширює цей результат на деякий клас дискретних в. в., для яких $r(k)$ змінюється регулярно.

**Теорема 4.** *Нехай* $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ *— послідовність дискретних н. о. р. в. в. з розподілом* $(k, p_k)$, $k \geq 1$, $R(t)$ *— диференційовна функція і*

$$R^{'}(t) = \tilde{r}(t) = t^b L(t), \quad -1 < b \leq 0,$$

*де* $L(t)$ *— повільно змінна функція при* $t \to \infty$, *причому* $|L(t)| \leq C$ *при* $b = 0$.

*Тоді м. н.*

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{\tilde{r}(a_n)(z_n - a_n)}{\ln \ln n} = 1, \tag{14}$$

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{\tilde{r}(a_n)(z_n - a_n)}{\ln \ln \ln n} = -1, \tag{15}$$

*де* $a_n$ *визначено в теоремі* A.

**3. Доведення основних результатів.** Спочатку наведемо кілька важливих допоміжних тверджень.

**Лема 1.** *Нехай* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *— послідовність н. о. р. в. в. з ф. р.* $F(t)$, $(u_n)$ *— неспадна послідовність дійсних чисел. Тоді ймовірність*

$$\mathbf{P}\left(z_n \geq u_n \quad \textit{н. ч.}\right)$$

*дорівнює нулю або одиниці в залежності від того, збігається чи розбігається ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\big(1 - F(u_n)\big). \tag{16}$$

Лема 1 фактично зводиться до леми Бореля – Кантеллі (див. [5, с. 190]).

**Лема 2.** *Нехай* $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ *— послідовність н. о. р. в. в.,* $(u_n)$ *— неспадна послідовність дійсних чисел така, що при* $n \to \infty$

$$\mathbf{P}(\xi > u_n) \to 0, \qquad n\mathbf{P}(\xi > u_n) \to \infty.$$

*Тоді ймовірність*

$$\mathbf{P}\big(z_n \leq u_n \quad \textit{н. ч.}\big)$$

*дорівнює нулю або одиниці в залежності від того, збігається чи розбігається ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}(\xi > u_n)\exp\big(-n\mathbf{P}(\xi > u_n)\big). \tag{17}$$

*Окрім того, якщо* $\mathbf{P}(\xi > u_n) \to c > 0$, *то* $\mathbf{P}\big(z_n \leq u_n \quad \textit{н. ч.}\big) = 0$, *а якщо*

$$\liminf_{n\to\infty} n\mathbf{P}(\xi > u_n) < \infty,$$

*то*

$$\mathbf{P}\big(z_n \leq u_n \quad \textit{н. ч.}\big) = 1.$$

Це твердження встановлено в роботах [6, 7] (див. також [5, с.190, 191]).

**Лема 3** [11]**.** *Нехай* $H(x)$ *правильно змінюється при* $x \to \infty$, $c_n \to \infty$, $d_n \to \infty$, $c_n/d_n \to$ $\to 1$, *при* $n \to \infty$.

*Тоді*

$$\frac{H(c_n)}{H(d_n)} \to 1.$$

Зауважимо, що в [11] доведено більш загальний результат, ніж наведений вище.

***Доведення теореми* 1.** Нехай $m$ — фіксоване ціле число, $m \geq 1$. Із означення $a_n$ випливає імплікація

$$\{a_n = k\} \Leftrightarrow \{\exp(R(k)) \leq n < \exp(R(k+1))\}.$$

Позначимо

$$I_k = \big\{n \geq 1 \colon\ \exp(R(k)) \leq n < \exp(R(k+1))\big\} \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Тоді, враховуючи умову (3), маємо

$$\sum_{n\geq 1}\mathbf{P}(\xi\geq a_n+m)=\sum_{k\geq 1}\mathbf{P}(\xi\geq k+m)\sum_{n\in I_k}1=$$
$$=\sum_{k\geq 1}\mathbf{P}(\xi\geq k+m)\exp(R(k+1))(1+o(1))=$$
$$=\sum_{k\geq 1}\exp(-R(k+m)+R(k+1))(1+o(1)). \tag{18}$$

Тут і далі вважаємо, що $\sum_{n\in I_k} f(n)=0$ при $I_k=\varnothing$.

Очевидно, що при $m=1$ ряд (18) розбігається, а отже, за лемою 1

$$\mathbf{P}(z_n\geq a_n+1 \quad \text{н. ч.})=1. \tag{19}$$

Нехай виконується умова (7). Виберемо $m=2$. Тоді ряд (18) можна записати так:

$$\sum_{k\geq 1}\exp(-r(k+2))(1+o(1)). \tag{20}$$

Зрозуміло, що збіжність останнього ряду еквівалентна умові (7). Знову застосувавши лему 1, одержимо

$$\mathbf{P}(z_n\geq a_n+2 \quad \text{н. ч.})=0. \tag{21}$$

Оскільки величини $z_n$ та $a_n$ набувають цілих значень, то рівності (19), (21) в сукупності еквівалентні (6), (8).

Якщо ж умова (7) не виконується, то ряд (20), а з ним і (18) розбігаються. За лемою 1 це приводить до співвідношення

$$\mathbf{P}(z_n\geq a_n+2 \quad \text{н. ч.})=1,$$

яке суперечить рівності (6).

Теорему 1 доведено.

***Доведення теореми* 2.** Міркування тут подібні наведеним вище, але замість леми 1 будемо використовувати лему 2. Покладемо

$$d_k=\mathbf{P}(\xi>k-2)=\exp(-R(k-1)),\qquad s_k=\sum_{n\in I_k}\exp(-nd_k),$$

де множини $I_k$ визначено в доведенні теореми 1. Оцінимо ряд (17) при $u_n=a_n-2$ :

$$\sum_{n\geq 1}\mathbf{P}(\xi>a_n-2)\exp(-n\mathbf{P}(\xi>a_n-2))=$$
$$=\sum_{k\geq 1}\mathbf{P}(\xi>k-2)\sum_{n\in I_k}\exp(-n\mathbf{P}(\xi>k-2))=\sum_{k\geq 1}d_ks_k. \tag{22}$$

Відомо, що якщо $f(t)$ — незростаюча функція, то

$$\sum_{k=m+1}^{n+1}f(k)\leq\int\limits_m^{n+1}f(t)dt\leq\sum_{k=m}^{n}f(k). \tag{23}$$

Нехай виконується умова (10). Тоді із (23) елементарними обчисленнями одержимо оцінку

$$s_k \le \int\limits_{\exp(R(k))-1}^{\exp(R(k+1))} \exp(-d_k t)dt \le \frac{1}{d_k}\exp(-e^{r(k)})(1+o(1)). \tag{24}$$

Оцінки (22), (24) та умова (10) показують, що ряд (17) збігається при $u_n = a_n - 2$.

Інші умови леми 2 також виконуються. Дійсно, при $n \in I_k,\ a_n = k,\ k \to \infty$

$$n\mathbf{P}(\xi > a_n - 2) = n\exp(-R(k-1)) \ge \exp(R(k))\exp(-R(k-1)) = \exp(r(k)) \to \infty.$$

Отже, за лемою 2

$$\mathbf{P}(z_n \le a_n - 2 \quad \text{н. ч.}) = 0, \tag{25}$$

що еквівалентно (9).

На наступному кроці покажемо, що

$$\mathbf{P}(z_n \le a_n - 1 \quad \text{н. ч.}) = 1. \tag{26}$$

Для цього задамо $n \in I_k$ рівністю $n = \big[\exp(R(k))\big] + 1$. Тоді при $k \to \infty$

$$n\mathbf{P}(\xi > a_n - 1) = \big([\exp(R(k))] + 1\big)\exp(-R(k)) \to 1.$$

Ще раз застосовуючи лему 2, отримуємо (26).

Рівності (25), (26) в сукупності еквівалентні рівностям (9), (11).

Нехай умова (10) не виконується. Використовуючи праву нерівність у (23), отримуємо оцінку знизу

$$s_k \ge \int\limits_{\exp(R(k))+1}^{\exp(R(k+1)-1)} \exp(-d_k t)dt = \frac{1}{d_k}\exp(-e^{r(k)})(1+o(1)).$$

Таким чином, ряд (22) буде розбігатися. Згідно з лемою 2 це й означає, що

$$\mathbf{P}(z_n \le a_n - 2 \quad \text{н. ч.}) = 1,$$

що суперечить (9).

Теорему 2 доведено.

***Доведення теореми* 3.** Для дискретної в. в. $\xi$ з розподілом $(k, p_k),\ k \ge 1,$ побудуємо неперервну в. в. $\xi^c$, „близьку” в деякому сенсі до $\xi$. Подібні конструкції відомі (див., наприклад, [10]).

Покладемо

$$R^c(t) = R(k) + (t-k)r(k+1) \quad \text{при} \quad t \in [k, k+1), \quad k \ge 1,$$
$$r^c(t) = r(k+1) \quad \text{при} \quad t \in [k, k+1), \quad k \ge 1.$$

Задамо функцію розподілу

$$\begin{gathered} F^c(t) = 1 - \exp(-R^c(t)), \quad t \ge 1, \\ F^c(1) = 0, \end{gathered} \tag{27}$$

і нехай $\xi^c$ — в. в. з функцією розподілу $F^c(t)$, $\xi^d = [\xi^c]$. Тоді для будь-якого $k \geq 1$

$$\mathbf{P}(\xi^d = k) = F^c(k+1) - F^c(k) = \exp(-R(k)) - \exp(-R(k+1)) = p_k,$$

тобто в. в. $\xi^d$ однаково розподілена з $\xi$. Таким чином, не обмежуючи загальності, можна вважати, що $\xi_i \equiv \xi_i^d$, $\xi_i^d$ — незалежні копії $\xi^d$.

Відомо [10], що в умовах теореми 3

$$z_n^c - a_n^c \to 0 \quad \text{м. н.,} \tag{28}$$

де $z_n^c$ побудовано по н. о. р. в. в. з функцією розподілу $F^c(t)$,

$$a_n^c = \inf(y\colon F^c(y) \geq 1 - 1/n),$$

причому

$$a_n^c = k + \frac{\ln n - R(k)}{r(k+1)} \quad \text{при} \quad \ln n \in [R(k), R(k+1)) \tag{29}$$

і

$$[a_n^c] = \max(k\colon \ln n \geq R(k)) = \max\left(k\colon \sum_{i\geq k} p_i \geq \frac{1}{n}\right) = a_n. \tag{30}$$

Якщо $n \in J_\alpha$, $\ln n \in [R(k), R(k+1))$, то

$$\alpha \leq \frac{\ln n - R(k)}{r(k+1)} \leq 1 - \alpha,$$

а отже,

$$k + \alpha \leq a_n^c \leq k + 1 - \alpha. \tag{31}$$

Із співвідношень (28), (30) та (31) отримуємо

$$\exists n_\alpha \, \forall n > n_\alpha, n \in J_\alpha\colon z_n = [z_n^c] = [a_n^c] = a_n \quad \text{м. н.,}$$

тобто (13) доведено.

При встановленні рівності (12) скористаємось подібними міркуваннями. Дійсно, неважко помітити, що при $n \in J_\alpha^-$, $\ln n \in [R(k), R(k+1))$

$$k \leq a_n^c < k + \alpha, \quad [a_n^c] = a_n = k,$$

а отже,

$$\exists n_\alpha \, \forall n > n_\alpha\colon z_n = [z_n^c] = a_n \quad \text{або} \quad = a_n - 1 \quad \text{м. н.}$$

З іншого боку, при $n \not\subseteq J_\alpha^-$, $\ln n \in [R(k), R(k+1))$

$$k + \alpha \leq a_n^c < k + 1, \quad [a_n^c] = a_n = k,$$

звідки

$$\exists n_\alpha \, \forall n > n_\alpha\colon z_n = [z_n^c] = a_n \quad \text{або} \quad = a_n + 1 \quad \text{м. н.}$$

Таким чином, рівність (12) встановлено.

Теорему 3 доведено.

***Доведення теореми* 4.** В умовах теореми розглянемо неперервну в. в. $\tilde{\xi}$ з ф. р.

$$\tilde{F}(t) = 1 - \exp(-R(t)), \qquad t \geq 1, \quad \tilde{F}(1) = 0.$$

Оскільки для будь-якого цілого $k$

$$\{\tilde{\xi} < k\} = \big\{[\tilde{\xi}] < k\big\},$$

то

$$\mathbf{P}\big([\tilde{\xi}] < k\big) = 1 - \exp(-R(k)) = \mathbf{P}(\xi < k). \tag{32}$$

Покладемо

$$\tilde{a}_n = \inf(y\colon \tilde{F}(y) \geq 1 - 1/n)$$

і

$$\tilde{z}_n = \max_{1 \leq i \leq n} \tilde{\xi}_i,$$

де $\tilde{\xi}_i$ — незалежні копії $\tilde{\xi}$.

Згідно з результатами роботи [8], якщо в умовах теореми 4 інтеграл

$$\int\limits_1^\infty \frac{d\tilde{F}(y)}{1 - \tilde{F}(zy)} < \infty \quad \forall z \in (0, 1) \tag{33}$$

є обмеженим, то виконується наступний закон повторного логарифму для схеми максимуму: м. н.

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\tilde{r}(\tilde{a}_n)(\tilde{z}_n - \tilde{a}_n)}{\ln\ln n} = 1, \tag{34}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\tilde{r}(\tilde{a}_n)(\tilde{z}_n - \tilde{a}_n)}{\ln\ln\ln n} = -1. \tag{35}$$

Припустимо, що оцінка (34) справджується. З означення $a_n$ та $\tilde{a}_n$ безпосередньо випливає рівність

$$\tilde{a}_n = a_n + \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 1. \tag{36}$$

Крім того, в умовах теореми 4

$$|\tilde{r}(t)| \leq C \quad \forall t \geq 1. \tag{37}$$

Збираючи разом співвідношення (32), (33)–(37) та застосовуючи лему 3, приходимо до рівностей (14), (15).

Залишилося перевірити нерівність (33). Маємо

$$\int\limits_1^\infty \frac{d\tilde{F}(y)}{1 - \tilde{F}(zy)} = \int\limits_1^\infty \tilde{r}(t)\exp(-(R(t) - R(zt))dt =$$

$$= \int\limits_1^\infty \tilde{r}(t)\exp(-t(1-z)r(\theta t))dt, \tag{38}$$

де $z \leq \theta \leq 1$.

Оскільки

$$\tilde{r}(\theta t) = (\theta t)^b L(\theta t), \quad -1 < b \leq 0,$$

і має місце оцінка (37), то інтеграл (38) є обмеженим.

Теорему 4 доведено.

**4. Приклади.** Розглянемо приклади застосувань отриманих результатів до деяких розподілів. Далі скрізь будемо припускати, що $(\xi_n)$ — послідовність незалежних копій в. в. $\xi$.

***Приклад* 1.** Розглянемо $\gamma$ — нормальну в. в. з ф. р. $\Phi(t)$,

$$\Phi(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \varphi(s)ds, \quad \varphi(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right),$$

і нехай

$$\xi = \begin{cases} [\gamma] & \text{при} \quad \gamma \geq 1, \\ 1 & \text{при} \quad \gamma < 1. \end{cases}$$

Для такої в. в. при великих $k$

$$R(k) = \frac{k^2}{2} + \ln k + \ln\sqrt{2\pi} + o(1),$$
$$r(k) = k - \frac{1}{2} + o(1)$$

(див. [10]). Неважко перевірити, що функція $r(k)$ задовольняє умови теорем $1-3$. Тому для в. в. $\xi$ виконуються рівності (6), (8), (9), (11)–(13) з $a_n = \left[\sqrt{2\ln n}\right]$.

***Приклад* 2** (пуассонівський розподіл)**.** Нехай

$$\mathbf{P}(\xi = k) = p_k = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad \lambda \geq 0.$$

Відомо [12, с. 38], що для пуассонівського розподілу

$$\frac{1}{p_k}\sum_{i>k} p_i \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Тому, використавши формулу Стірлінга

$$n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+1/2} \exp(-n),$$

неважко отримати рівності

$$R(k) = -\lambda + \frac{1}{2}\ln 2\pi - k(\ln\lambda + 1) + \left(k + \frac{1}{2}\right)\ln k + o(1),$$
$$r(k) = \ln k + O(1).$$

Зрозуміло, що умова (10) виконується. Отже, рівності (9), (11) для розподілу Пуассона є правильними. Але ні умова (7), ні тим більше умова (4) не виконуються.

Для аналізу цього важливого випадку буде корисним наступне допоміжне твердження.

**Лема 4.** *Нехай $\xi$ — дискретна в. в. з розподілом $(k, p_k),\ k \geq 1,\ r(k)$ — монотонна функція і виконується умова* (3). *Якщо ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \exp(-jr(k)) \tag{39}$$

*збігається при $j = m$ і розбігається при $j = m - 1$, то*

$$\mathbf{P}(z_n \geq a_n + m + 1 \quad \textit{н. ч.}) = 0,$$

$$\mathbf{P}(z_n \geq a_n + m \quad \textit{н. ч.}) = 1.$$

Фактично, щоб довести лему 4, слід повторити міркування, використані при доведенні теореми 1.

Для розподілу Пуассона із наведених вище оцінок зрозуміло, що ряд (39) збігається при $j = m = 2$ і розбігається при $j = m = 1$. Згідно з лемою 4 отримуємо

$$\mathbf{P}(z_n > a_n + 2 \quad \text{н. ч.}) = 0,$$

$$\mathbf{P}(z_n = a_n + 2 \quad \text{н. ч.}) = 1.$$

Таким чином, у випадку розподілу Пуассона маємо

$$\mathbf{P}\left(\exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \colon \{z_n = a_n - 1\} \bigcup \{z_n = a_n\} \bigcup \{z_n = a_n + 1\} \bigcup \{z_n = a_n + 2\}\right) = 1,$$

тоді як рівність (5) не справджується.

Як відомо, $a_n$ можна задати рівністю

$$a_n = k \quad \text{при} \quad \ln n \in [R(k), R(k+1)).$$

Якщо скористатись оцінкою $R(k)$, наведеною вище, можна одержати співвідношення

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n \ln\ln n}{\ln n} = 1.$$

На жаль, елементарна точна оцінка величини $a_n$ для розподілу Пуассона автору невідома.

***Приклад* 3.** Нехай

$$R(k) = C(k-1)^{\beta}, \qquad 0 < \beta \leq 1, \quad C > 0, \quad k \geq 1.$$

Тоді

$$\tilde{r}(k) = C\beta(k-1)^{\beta-1},$$

$$a_n = \left[1 + \left(\frac{\ln n}{C}\right)^{1/\beta}\right],$$

$$\tilde{r}(a_n) \sim C^{1/\beta}\beta(\ln n)^{1-1/\beta},$$

і згідно з теоремою 4

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{z_n C^{1/\beta}\beta(\ln n)^{1-1/\beta} - \beta\ln n}{\ln\ln n} = 1,$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{z_n C^{1/\beta}\beta(\ln n)^{1-1/\beta} - \beta\ln n}{\ln\ln\ln n} = -1 \quad \text{м. н.}$$

***Приклад* 4** (геометричний розподіл). Якщо у прикладі 3 покласти $\beta = 1$, $C = \ln \dfrac{1}{1-q}$, $0 < q < 1$, то отримаємо геометричний розподіл:

$$\mathbf{P}(\xi = k) = p_k = q(1-q)^{k-1}, \quad k \geq 1,$$

$$R(k) = -\ln \sum_{i \geq k} q(1-q)^{k-1} = (k-1) \ln \frac{1}{1-q},$$

$$r(k) = \tilde{r}(k) = \ln \frac{1}{1-q},$$

$$a_n = \left[ 1 + \left( \ln \frac{1}{1-q} \right)^{-1} \ln n \right].$$

Отже,

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{z_n \ln \dfrac{1}{1-q} - \ln n}{\ln \ln n} = 1,$$

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{z_n \ln \dfrac{1}{1-q} - \ln n}{\ln \ln \ln n} = -1 \quad \text{м. н.}$$

***Приклад* 5.** Розглянемо одноканальну систему масового обслуговування $M/M/1$ (необмежена черга, пуассонівський потік заявок з параметром $\lambda$, експоненціальний час обслуговування з параметром $\mu$, $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ — навантаження системи масового обслуговування, $0 < \rho < 1$). Позначимо через $\xi_i$ максимальну довжину черги на $i$-му періоді зайнятості. Відомо [9], що $\xi_i$ має розподіл

$$F(n) = \mathbf{P}(\xi_i < n) = \frac{1 - \rho^{n-1}}{1 - \rho^n}.$$

З даної рівності неважко отримати

$$R(k) = (k-1) \ln \frac{1}{\rho} + \ln \frac{1}{1-\rho} + \ln(1 - \rho^k),$$

$$r(k) = \tilde{r}(k) = \ln \frac{1}{\rho} + o(1),$$

$$a_n = 1 + \left[ \frac{\ln n - \ln \dfrac{1}{1-\rho} + o(1)}{\ln \dfrac{1}{\rho}} \right] = \frac{\ln n}{\ln \dfrac{1}{\rho}} + O(1).$$

Нехай$z_n = \max_{1 \leq i \leq n} \xi_i$ — максимальна довжина черги протягом $n$ періодів зайнятості.

Оскільки умови теореми 4 виконуються, то м. н.

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{z_n \ln \dfrac{1}{\rho} - \ln n}{\ln \ln n} = 1,$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{z_n \ln \dfrac{1}{\rho} - \ln n}{\ln\ln\ln n} = -1.$$

З дещо інших позицій останній приклад досліджувався у роботі [9].

## Література

1. *Gnedenko B. V.* Sur la distribution limit du terme maximum d‘une serie aleatoire // Ann. Math. – 1943. – **44**, № 3. – P. 423 – 453.
2. *Barndorff-Nielsen O.* On the limit behaviour of extreme order statistics // Ann. Math. Statist. – 1963. – **34**, № 3. – P. 992 – 1002.
3. *Pickands J.* An iterated logarithm law for the maximum in a stationary Gaussian sequence // Z. Wahrscheinlich-keitstheor. und verw. Geb. – 1969. – **12**, № 3. – S. 344 – 355.
4. *de Haan L., Hordijk A.* The rate of growth of sample maxima // Ann. Math. Statist. – 1972. – **43**. – P. 1185 – 1196.
5. *Галамбош Я.* Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. – М.: Наука, 1984. – 304 с.
6. *Klass M. J.* The minimal growth rate of partial maxima // Ann. Probab. – 1984. – **12**. – P. 380 – 389.
7. *Klass M. J.* The Robbins – Siegmund criterion for partial maxima // Ann. Probab. – 1985. – **13**. – P. 1369 – 1370.
8. *Акбаш К. С., Мацак І. К.* Одне уточнення закону повторного логарифму для схеми максимуму // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 8. – С. 1132 – 1137.
9. *Anderson C. W.* Extrem value theory for a class of discrete distribution with application to some stochastic processes // J. Appl. Probab. – 1970. – **7**. – P. 99 – 113.
10. *Мацак І. К.* Про лічильний процес у схемі максимуму // Теорія ймовірностей і мат. статистика. – 2014. – Вип. 91. – С. 109 – 122.
11. *Булдигін В. В., Кльосов О. І., Штайнебах Й. Г.* Про деякі властивості асимптотично квазіобернених функцій та їх застосування // Теорія ймовірностей і мат. статистика. – 2004. – Вип. 70. – С. 9 – 25.
12. *Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х.* Экстремумы случайных последовательностей и процессов. – М.: Мир, 1989. – 392 с.

Одержано 05.08.15,
після доопрацювання — 27.04.16