УДК 517.956

В. М. Кирилич, Т. І. Фірман (Львів. нац. ун-т ім. І. Франка)

ЗАДАЧА БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ ДЛЯ ЗЛІЧЕННОЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ НАПІВЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

We derive sufficient conditions for the solvability of the problem without initial conditions for a countable semilinear hyperbolic system of first-order equations and establish conditions for the classical solvability of the initial-boundary value problem for countable hyperbolic systems of semilinear equations of the first-order in a semistrip.

Приведены достаточные условия разрешимости задачи без начальных условий для счетной гиперболической системы полулинейных уравнений первого порядка. Получены условия классической разрешимости смешанной задачи для счетной гиперболической системы полулинейных уравнений первого порядка в полуполосе.

1. Вступ. Основи дослідження зліченних систем звичайних диференціальних рівнянь закладено в роботах [1 – 3]. Аналіз, основні результати та огляд літературних джерел теорії зліченних систем звичайних диференціальних рівнянь (диференціальних рівнянь у просторі $\mathfrak{M}$ обмежених числових послідовностей) детально описано в монографії [4]. Задачі для систем такого вигляду виникають у багатьох математичних моделях процесів природознавства і техніки [5 – 8].

Оскільки системи одновимірних гіперболічних рівнянь першого порядку вздовж своїх характеристик стають системами звичайних диференціальних рівнянь [9], то дослідження зліченних рівнянь з частинними похідними природно проводити, насамперед, для рівнянь гіперболічного типу. Різноманітні підходи щодо коректної розв’язності задач для зліченних гіперболічних систем рівнянь першого порядку та їх застосувань розглядались, наприклад, у роботах [7, 10 – 15].

У цій статті досліджено задачу без початкових умов для напівлінійної гіперболічної системи зліченних рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними.

Задачі без початкових умов, зазвичай, вивчались для параболічних рівнянь [16] (див. наведену там бібліографію). Подібні задачі для гіперболічних систем скінченної кількості рівнянь першого порядку розглядалися в [17 – 19].

2. Формулювання задачі. Нехай у смузі $G = \{(x,t)\colon 0 < x < l, -\infty < t < \infty\}$ задано зліченну гіперболічну систему напівлінійних рівнянь

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x,t)\frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i(x,t,u_1,u_2,\ldots), \quad i \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

з невідомими функціями $u_i(x,t),\ i \in \mathbb{N}$.

Будемо вважати, що функція $\lambda(x,t) = (\lambda_1(x,t), \lambda_2(x,t), \ldots)$, $\lambda\colon \overline{G} \to \mathfrak{M}$ задовольняє умову Ліпшиця за змінною x в $\overline{G}$, якщо $\lambda_i \in \mathrm{Lip}_x(\overline{G})$ для всіх $i \in \mathbb{N}$.

Через C^∞ позначимо простір, елементом якого є зчисленна послідовність неперервних функцій, обмежених деякою сталою. Норму в цьому просторі, наприклад, для вектора $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), \ldots)$ задамо у вигляді

$$\|u\|_0 = \sup_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ (x,t)\in\overline{G}}} \big\{|u_i(x,t)|\big\}.$$

Для забезпечення існування та єдиності розв'язку $\xi = \varphi_i(\tau; x, t)$ задачі Коші

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \lambda_i(\xi, \tau), \quad i \in \mathbb{N},$$

з початковою умовою

$$\xi|_{\tau=t} = x$$

вимагатимемо, щоб функції $\lambda \colon \overline{G} \to \mathfrak{M}$ були з класу $\lambda \in C^{\infty}(\overline{G}) \cap \mathrm{Lip}_x(\overline{G})$.

Нехай $I_0 = \{i | \lambda_i(0,t) > 0\}$, а $I_l = \{i | \lambda_i(l,t) < 0\}$. Множини I_0 та I_l можуть бути порожніми, можуть складатися з скінченної або зліченної кількості елементів, однак будемо вимагати, щоб $I_0 \cap I_l = \varnothing$ та $I_0 \cup I_l = \mathbb{N}$.

Для системи (1) задамо крайові умови

$$u_i(0,t) = h_i(t), \quad i \in I_0, \qquad u_i(l,t) = h_i(t), \quad i \in I_l, \quad -\infty < t < \infty. \tag{2}$$

Задачу (1), (2) будемо розглядати у просторі C^{∞}.

3. Мішана задача для зліченної гіперболічної системи напівлінійних диференціальних рівнянь у півсмузі. Поряд з (1), (2) розглянемо відповідну задачу в області $G_T = \big\{(x,t) \colon 0 < x < l,\, T < t < \infty\big\}$ для довільного фіксованого $T \in \mathbb{R}$ з початковими умовами

$$u_i(x,T) = u_i^T(x), \qquad 0 \le x \le l, \quad i \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

такими, що задовольняють умови погодження нульового порядку

$$u_i^T(0) = h_i(T), \quad i \in I_0, \qquad u_i^T(l) = h_i(T), \quad i \in I_l. \tag{4}$$

Для задачі (1)–(3) через $\chi_i(x,t)$ $(T \le \chi_i(x,t) \le t)$ позначимо найменше значення τ таке, що $(\varphi_i(\tau; x,t), \tau) \in \overline{G}_T$, $\tau \in [\chi_i(x,t), t]$. Тоді якщо $\chi_i(x,t) > T$, то $\varphi_i(\chi_i(x,t); x,t)$ дорівнює 0 або l, тобто $\chi_i(x,t)$ — ордината точки перетину характеристики $\varphi_i(\tau; x,t)$ з межею півсмуги $\overline{G}_T$ у напрямку спадання τ.

Означення 1. *Функція $f \colon \overline{G} \times \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ задовольняє умову Коші–Ліпшиця за змінними $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ з деякою неперервною функцією $\alpha \colon \overline{G} \to \mathbb{R}_+$, якщо для будь-якого $i \in \mathbb{N}$ та довільних послідовностей $(u_1', u_2', \ldots, u_n', \ldots)$ і $(u_1'', u_2'', \ldots, u_n'', \ldots)$ виконується нерівність*

$$|f_i(x,t,u_1', u_2', \ldots, u_n', \ldots) - f_i(x,t,u_1'', u_2'', \ldots, u_n'', \ldots)| \le \alpha(x,t)\Delta u,$$

де $\Delta u = \sup_{i \in \mathbb{N}} \big\{|u_i' - u_i''|\big\}$.

Позначимо через Π^{T_1} прямокутник

$$\Pi^{T_1} = \{(x,t) \colon 0 < x < l, T < t < T + T_1\},$$

де $T_1 > 0$ — як завгодно велике фіксоване число.

4. Існування та єдиність узагальненого розв'язку задачі в півсмузі. Формальним інтегруванням кожного з i-х рівнянь системи (1) вздовж відповідних характеристик $\varphi_i(\tau; x,t)$ одержимо систему інтегро-функціональних рівнянь [9]

$$u_i(x,t) =$$

$$= \omega_i[u](x,t) + \int\limits_{\chi_i(x,t)}^{t} f_i(\varphi_i(\tau;x,t), \tau, u_1(\varphi_i(\tau;x,t),\tau), u_2(\varphi_i(\tau;x,t),\tau), \ldots) d\tau, \quad i \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

де

$$\omega_i[u](x,t) = \begin{cases} u_i^T\big(\varphi_i(T;x,t)\big), & \text{якщо} \quad \chi_i(x,t) = T, \\ h_i\big(\chi_i(x,t)\big), & \text{якщо} \quad \chi_i(x,t) > T, \quad i \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Означення 2. *Неперервну функцію $u \in C^\infty(\overline{G}_T)$, яка задовольняє систему інтегро-функціональних рівнянь* (5), *назвемо узагальненим розв'язком задачі* (1)–(3).

Теорема 1. *Нехай вихідні функції задачі* (1)–(3) *задовольняють такі умови*:

1) $h \in C^\infty\big([T,\infty)\big),\ \lambda \in C^\infty(\overline{G}_T) \cap \mathrm{Lip}_x(\overline{G}_T)$;

2) f *належить* $C^\infty(\overline{G}_T)$ *при фіксованих* $u \in C^\infty$ *і задовольняє умову Коші–Ліпшиця за змінними* $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ *з деякою функцією* $\alpha(x,t) \in C(\overline{G}_T)$.

Тоді для довільного наперед заданого $T \in \mathbb{R}$ *існує єдиний узагальнений розв'язок задачі* (1)–(3) *в* G_T.

Доведення. Позначимо сталі

$$A = \max_{(x,t)\in\overline{\Pi}^{T_1}} \big\{\alpha(x,t)\big\}, \qquad M = \max_{(x,t)\in\overline{\Pi}^{T_1}} \big\{|f_i(x,t,0,0,\ldots)|\big\},$$

а також

$$\Lambda = \sup_{i\in\mathbb{N}} \max_{(x,t)\in\overline{\Pi}^{T_1}} \big\{|\lambda_i(x,t)|\big\}.$$

Спочатку доведемо існування та єдиність розв'язку в прямокутнику Π^{θ_0}, де $\theta_0 > 0$ визначимо пізніше. Нехай $\theta > 0$ таке, що

$$\varphi_i(t;0,\tau) < \varphi_j(t;l,\tau) \quad \text{для всіх} \quad \tau \geq T, \qquad t \in [\tau;\tau+\theta], \quad i \in I_0,\ j \in I_l.$$

Оскільки для характеристик системи виконуються нерівності $\chi_i(x,t) \leq t - \dfrac{1}{\Lambda}x,\ i \in I_0$, та $\chi_j(x,t) \leq t - \dfrac{1}{\Lambda}(l-x),\ j \in I_l$ [9], то $\theta \geq \dfrac{l}{2\Lambda}$.

Введемо оператор $\mathfrak{U}\colon C^\infty \to C^\infty$, який визначено правими частинами співвідношення (5), тобто

$$\mathfrak{U}_i[u](x,t) =$$

$$= \omega_i[u](x,t) + \int\limits_{\chi_i(x,t)}^{t} f_i(\varphi_i(\tau;x,t),\tau,u_1(\varphi_i(\tau;x,t),\tau),u_2(\varphi_i(\tau;x,t),\tau),\ldots)d\tau, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Для доведення існування та єдиності узагальненого розв'язку задачі (1)–(3) в Π^{θ_0} скористаємося теоремою Банаха про нерухому точку стискаючого оператора. Для цього оцінимо різницю $|\mathfrak{U}_i[u^1](x,t) - \mathfrak{U}_i[u^2](x,t)|$. Безпосередньо одержимо

$$|\mathfrak{U}_i[u^1](x,t) - \mathfrak{U}_i[u^2](x,t)| \leq \Bigg| \int\limits_{\chi_i(x,t)}^{t} \big(f_i(\varphi_i(\tau;x,t),\tau,u_1^1(\varphi_i(\tau;x,t),\tau),u_2^1(\varphi_i(\tau;x,t),\tau),\ldots) -$$

$$- f_i(\varphi_i(\tau;x,t),\tau,u_1^2(\varphi_i(\tau;x,t),\tau),u_2^2(\varphi_i(\tau;x,t),\tau),\ldots)\big)d\tau\Bigg| \leq$$

$$\leq A \left| \int\limits_T^t \sup_j \left\{ |u_j^1(\varphi_i(\tau;x,t),\tau) - u_j^2(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)| \right\} d\tau \right| \leq \theta A \|u^1 - u^2\|_0.$$

Отже,

$$\|\mathfrak{U}_i[u^1] - \mathfrak{U}_i[u^2]\|_0 \leq \theta A \|u^1 - u^2\|_0.$$

Зазначимо, що виконання умови 2 теореми 1 забезпечує оцінку

$$\left| f_i(x,t,u_1,u_2,\ldots) \right| \leq A \sup_{i \in \mathbb{N}} \left\{ |u_i(x,t)| \right\} + M,$$

а тому $\mathfrak{U}[u] \in C^\infty$.

Оскільки всі вихідні функції неперервні та простір C^∞ є повним відносно заданої норми, то, вибравши $\theta_0 = \min \left\{ \dfrac{1}{2A}, \theta \right\}$, за теоремою Банаха одержимо існування та єдиність узагальненого розв'язку задачі (1)–(3) у прямокутнику $\overline{\Pi}^{\theta_0}$.

Встановимо апріорну оцінку розв'язку в $\overline{\Pi}^{\theta_0}$. Нехай $U(t) = \sup_i \max_{x,\tau \leq t} \{|u_i(x,\tau)|\}$, тоді

$$|u_i(x,t)| \leq \max_x \left\{ |u_i^T(x)| \right\} + \max_t \left\{ |h_i(t)| \right\} + \int\limits_T^t \left(AU(\tau) + \max_{x,t} \left\{ |f_i(x,t,0,0,\ldots)| \right\} \right) d\tau,$$

або

$$U(t) \leq \Phi e^{A\theta_0}, \qquad T \leq t \leq T + \theta_0,$$

де $\Phi = \sup_i \max_x \left\{ |u_i^T(x)| \right\} + \sup_i \max_t \{|h_i(t)|\} + T_1 \sup_i \max_{x,t} \left\{ |f_i(x,t,0,0,\ldots)| \right\}$.

Прийнявши $u_i^{T+\theta_0}(x) = u_i(x, T+\theta_0)$ за початкову умову у прямокутнику $\Pi^{T_1} \cap \Pi^{2\theta_0} \backslash \overline{\Pi}^{\theta_0}$, одержимо задачу, аналогічну задачі (1)–(3).

З наведених вище оцінок та теореми Банаха випливає існування та єдиність узагальненого розв'язку задачі (1)–(3), для якого справджується оцінка

$$|u_i(x,t)| \leq \max_x \left\{ |u^{T+\theta_0}(x)| \right\} +$$

$$+ \max_t \left\{ |h_i(t)| \right\} + \int\limits_{T+\theta_0}^t \left(AU(\tau) + \max_{x,t} \left\{ |f_i(x,t,0,0,\ldots)| \right\} \right) d\tau \leq \Phi e^{A\theta_0} + \Phi + A \int\limits_{T+\theta_0}^t U(\tau) d\tau.$$

Отже,

$$U(t) \leq \Phi(e^{A\theta_0} + 1) e^{A\theta_0}, \qquad T \leq t \leq T + \theta_0.$$

Таким чином, за $\left[\dfrac{T_1}{\theta_0} \right] + 1$ крок прямокутник Π^{T_1} повністю вичерпаємо прямокутниками вигляду $\Pi^{T_1} \cap \Pi^{(k+1)\theta_0} \backslash \overline{\Pi}^{k\theta_0}$, $k = 1, 2, \ldots$. Оскільки в кожному з таких прямокутників існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1)–(3), то єдиний розв'язок буде існувати в Π^{T_1}.

Припустимо, що в прямокутнику $\Pi^{T_1} \cap \Pi^{k\theta_0} \backslash \overline{\Pi}^{(k-1)\theta_0}$ розв'язок задовольняє нерівність

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} \max_{(x,t)} \left\{ |u_i(x,t)| \right\} \le \Phi \frac{e^{A\theta_0}}{e^{A\theta_0}-1}(e^{kA\theta_0}-1).$$

Тоді в прямокутнику $\Pi^{T_1} \cap \Pi^{(k+1)\theta_0} \backslash \overline{\Pi}^{k\theta_0}$ справджується оцінка

$$\left|u_i(x,t)\right| \le \Phi \frac{e^{A\theta_0}}{e^{A\theta_0}-1}\left(e^{(k+1)A\theta_0}-1\right) + \Phi + \int\limits_{T+k\theta_0}^{t} AU(\tau)d\tau \le$$

$$\le \Phi \frac{e^{(k+1)A\theta_0} - e^{A\theta_0} + e^{A\theta_0} - 1}{e^{A\theta_0}-1} + \int\limits_{T+k\theta_0}^{t} AU(\tau)d\tau \le$$

$$\le \Phi \frac{e^{(k+1)A\theta_0}-1}{e^{A\theta_0}-1} e^{A\theta_0}.$$

Отже, в прямокутнику Π^{T_1} розв'язок буде задовольняти апріорну оцінку

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} \max_{(x,t)\in\overline{\Pi}^{T_1}} \left\{ |u_i(x,t)| \right\} \le \Phi \left(e^{\left(\frac{T_1}{\theta_0}+1\right)A\theta_0} - 1 \right) \frac{e^{A\theta_0}}{e^{A\theta_0}-1} \le C\Phi e^{T_1 A},$$

де $C = \dfrac{e}{e^{\min\left\{\frac{1}{2A}, \frac{l\Lambda}{2}\right\}}}$. Оскільки T_1 є довільним, то одержимо розв'язність задачі (1)–(3) в усій півсмузі G_T.

5. Існування та єдиність класичного розв'язку. Щоб довести існування класичного розв'язку задачі (1)–(3), необхідно показати, що функції $u_i(x,t)$ мають неперервні похідні по x і t. Очевидно, що для цього достатньо показати, що функції $u_i(x,t)$ мають неперервні похідні вздовж відповідних характеристик і по x, оскільки з цього, гладкості характеристик та системи (1) випливає неперервність похідних по t і x в усій півсмузі G_T.

Існування та неперервність похідних $u_i(x,t)$ вздовж відповідних характеристик безпосередньо випливають з системи (1) та неперервності отриманого розв'язку. Щоб довести існування та єдиність неперервних похідних $\dfrac{\partial u_i}{\partial x}$, поряд з (6) розглянемо систему рівнянь

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{U}_i[u](x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\omega_i[u](x,t) +$$

$$+ \int\limits_{\chi_i(x,t)}^{t} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(\varphi_i(\tau;x,t), \tau, u_1(\varphi_i(\tau;x,t),\tau), u_2(\varphi_i(\tau;x,t),\tau), \ldots) \times$$

$$\times u'_{j_x}(\varphi_i(\tau;x,t),\tau) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(\tau;x,t) +$$

$$+ \frac{\partial f_i}{\partial x}\left(\varphi_i(\tau;x,t), \tau, u_1(\varphi_i(\tau;x,t),\tau), u_2(\varphi_i(\tau;x,t),\tau), \ldots\right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(\tau;x,t) d\tau -$$

$$-f_i(\varphi_i(\chi_i(x,t);x,t),\chi_i(x,t),u_1\big(\varphi_i(\chi_i(x,t);x,t),\chi_i(x,t)),u_2(\varphi_i(\chi_i(x,t);x,t),\chi_i(x,t)\big),\ldots)\times$$
$$\times\frac{\partial\chi_i}{\partial x}(x,t), \tag{7}$$

яка отримана формальним диференціюванням системи рівнянь (6) за змінною x, де

$$\frac{\partial}{\partial x}\omega_i[u](x,t)=\begin{cases}\dfrac{du_i^T}{dx}\big(\varphi_i(T;x,t)\big)\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x}(T;x,t), & \text{якщо} \quad \chi_i(x,t)=T,\\[2ex] \dfrac{dh_i}{dt}\left(\chi_i(x,t)\right)\dfrac{\partial\chi_i}{\partial x}(x,t), & \text{якщо} \quad \chi_i(x,t)>T.\end{cases}$$

Теорема 2. *Нехай вихідні функції задачі* (1)–(3) *задовольняють умови теореми* 1 *і, крім того,*

1) $h'\in C^\infty([T,\infty)),\ \lambda^{-1},\lambda'_x\in C^\infty(\overline{G}_T)$;

2) f'_x *належить* $C^\infty(\overline{G}_T)$ *при фіксованих* $u\in C^\infty$ *і задовольняє умову Коші–Ліпшиця з деякою функцією* $\beta(x,t)\in C(\overline{G}_T)$;

3) $\dfrac{\partial f}{\partial u_j}$ *належать* $C^\infty(\overline{G}_T)$ *при фіксованих* $u\in C^\infty$ *і задовольняють умову Коші–Ліпшиця з неперервними функціями* $\gamma_j(x,t)$, *причому* $\sum_{j=1}^{\infty}\gamma_j(x,t)\le\gamma(x,t)$ *та* $\gamma(x,t)\in C(\overline{G}_T)$;

4) $\left|\dfrac{\partial f_i}{\partial u_j}(x,t,0,0,\ldots)\right|\le\varkappa_j(x,t)$ *для всіх* $i\in\mathbb{N}$, *де* $\varkappa_j(x,t)$ — *деякі неперервні функції, причому* $\sum_{j=1}^{\infty}\varkappa_j(x,t)\le\varkappa(x,t)$ *та* $\varkappa(x,t)\in C(\overline{G}_T)$;

5) $$\frac{du_i^T}{dx}(0)=\frac{1}{\lambda_i(0,T)}\left(f_i(0,T,u_1^T(0),u_2^T(0),\ldots)-\frac{dh_i}{dt}(T)\right),\quad i\in I_0,$$
$$\frac{du_i^T}{dx}(l)=\frac{1}{\lambda_i(l,T)}\left(f_i(l,T,u_1^T(l),u_2^T(l),\ldots)-\frac{dh_i}{dt}(T)\right),\quad i\in I_l$$

(*умови погодження першого порядку*).

Тоді для довільного наперед заданого $T\in\mathbb{R}$ *існує єдиний класичний розв'язок задачі* (1)–(3) *в* G_T.

Доведення. Розглянемо оператор $\mathfrak{A}[u]=\left(\mathfrak{U}[u],\dfrac{\partial}{\partial x}\mathfrak{U}[u]\right):C^\infty\to C^\infty$, який визначено співвідношеннями (6), (7).

Введемо норму

$$\|u\|=\max\big\{\sup_i\max_{x,t}\{|u_i(x,t)|\},\sup_i\max_{x,t}\{|u'_{i_x}(x,t)|\}\big\}.$$

Нехай $\|u\|_1=\sup_i\max_{x,t}\big\{|u'_{i_x}(x,t)|\big\}$, а також $\Lambda'=\sup_{i\in\mathbb{N}}\max_{(x,t)\in\overline{\Pi}^{T_1}}\big\{|\lambda'_{i_x}(x,t)|\big\}$, $B=\max_{(x,t)\in\overline{\Pi}^{T_1}}\{\beta(x,t)\}$, $\Gamma=\max_{(x,t)\in\overline{\Pi}^{T_1}}\{\gamma(x,t)\}$ та $N=\max_{(x,t)\in\overline{\Pi}^{T_1}}\big\{|f'_{i_x}(x,t,0,0,\ldots)|\big\}$. З метою уникнення громіздких виразів позначимо також

$$f(\varphi_i(\tau;x,t),\tau,u_1(\varphi_i(\tau;x,t),\tau),u_2(\varphi_i(\tau;x,t),\tau),\ldots)=f[u](\varphi_i(\tau;x,t),\tau).$$

Для доведення існування та єдиності класичного розв'язку задачі (1)–(3) в прямокутнику Π^{θ_1}, де θ_1 визначимо пізніше, оцінимо різницю $\left\|\mathfrak{A}[u^1](x,t) - \mathfrak{A}[u^2](x,t)\right\|$. З попереднього пункту випливає, що

$$\|\mathfrak{U}[u^1] - \mathfrak{U}[u^2]\|_0 \le \theta A\|u^1 - u^2\|_0 \le \theta A\|u^1 - u^2\|.$$

Зазначимо, що справджуються співвідношення [20, с. 92]

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}(\tau;x,t) = e^{-\int_\tau^t \lambda'_{i_x}(\varphi_i(s;x,t),s)ds}$$

та

$$\frac{\partial\chi_i}{\partial x}(x,t) = -\frac{1}{\lambda_i(\tilde{x}_i,\chi_i(x,t))}e^{-\int_{\chi_i(x,t)}^t \lambda'_{i_x}(\varphi_i(s;x,t),s)ds},$$

де $\tilde{x}_i = 0$, якщо $i \in I_0$, та $\tilde{x}_i = l$, якщо $i \in I_l$.

Нехай також $U' = \sup_{i\in\mathbb{N}} \max_{(x,t)\in\overline{\Pi}^{T_1}} \left\{|u'_{i_x}(x,t)|\right\}$. Тепер безпосередньо одержуємо

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{U}[u^1](x,t) - \frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{U}[u^2](x,t)\right| \le$$

$$\le \left|\int\limits_{\chi_i(x,t)}^{t}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\partial f_i}{\partial u_j}[u^1](\varphi_i(\tau;x,t),\tau)u'^1_{j_x}(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}(\tau;x,t) + \right.\right.$$

$$+\frac{\partial f_i}{\partial x}[u^1](\varphi_i(\tau;x,t),\tau)\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}(\tau;x,t) -$$

$$-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\partial f_i}{\partial u_j}[u^2](\varphi_i(\tau;x,t),\tau)u'^2_{j_x}(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}(\tau;x,t) -$$

$$-\frac{\partial f_i}{\partial x}[u^2](\varphi_i(\tau;x,t),\tau)\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}(\tau;x,t) \pm$$

$$\left.\left.\pm\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\partial f_i}{\partial u_j}[u^1](\varphi_i(\tau;x,t),\tau)u'^2_{j_x}(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}(\tau;x,t)\right)d\tau\right| \le$$

$$\le e^{T_1\Lambda'}B\theta\|u^1 - u^2\|_0 + e^{T_1\Lambda'}A\theta\|u^1 - u^2\|_1 + e^{T_1\Lambda'}U'\Gamma\theta\|u^1 - u^2\|_0 \le$$

$$\le \theta e^{T_1\Lambda'}\big(A + U'\Gamma + B\big)\|u^1 - u^2\|.$$

Отже, маємо оцінку

$$\left\|\mathfrak{A}[u^1](x,t) - \mathfrak{A}[u^2](x,t)\right\| \le \theta e^{T_1\Lambda'}\big(A + U'\Gamma + B\big)\|u^1 - u^2\|.$$

З вигляду оператора (7) та умов 2–4 теореми 2, як і у попередньому пункті, випливає, що $\dfrac{\partial}{\partial x}\mathfrak{U}[u]$ належить C^∞.

Вибравши $\theta_1 = \min\left\{\theta, \dfrac{1}{2e^{T_1\Lambda'}\big(A + U'\Gamma + B\big)}\right\}$, за теоремою Банаха про нерухому точку стискаючого оператора одержимо існування та єдиність розв'язку в Π^{θ_1}. Згідно з аналогічними до попереднього пункту міркуваннями отримаємо існування та єдиність класичного розв'язку задачі (1)–(3) у півсмузі G_T.

Теорему 2 доведено.

Оскільки доведено існування класичного розв'язку, то похідна u'_x задовольняє (7) і, як і у попередньому пункті, в Π^{T_1} методом послідовних наближень можна одержати апріорну оцінку для похідної u'_x :

$$\sup_{i\in\mathbb{N}}\max_{x,t,u}\left\{|u'_{i_x}(x,t)|\right\}\le \widetilde{C}\Psi e^{T_1(A+\Lambda')},$$

де

$$\Psi=\sup_i\max_x\left\{\left|\frac{du_i^T}{dx}(x)\right|\right\}+\sup_i\max_{x,t}\left\{|\lambda_i^{-1}(x,t)|\right\}\sup_i\max_{x,t,u}\left\{|f_i(x,t,u_1,u_2,\ldots)|\right\}+$$
$$+\sup_i\max_{x,t}\{|\lambda_i^{-1}(x,t)|\}\sup_i\max_t\left\{|h'_{i_t}(t)|\right\}+T_1\sup_i\max_{x,t,u}\left\{\left|\frac{\partial f_i}{\partial x}(x,t,u_1,u_2,\ldots)\right|\right\},$$

а $\widetilde{C}$ — додатна стала.

6. Існування та єдиність розв'язку задачі без початкових умов. Скажемо, що вихідні функції системи (1) задовольняють умову ($\mathbf{H_1}$), якщо для всіх $T^*\in\mathbb{R}$ та $\varepsilon>0$ існує таке $\delta>0$, що при

$$\sup_{i\in\mathbb{N}}\max_{(x,t)\in\overline{\Pi}^{T^*-T}}\left\{|f_i(x,t,0,0,\ldots)|\right\}\le\delta,$$
$$\sup_{i\in\mathbb{N}}\max_{T\le t\le T^*}\left\{|h_i(t)|\right\}\le\delta,\qquad \sup_{i\in\mathbb{N}}\max_{0\le x\le l}\left\{|u_i^T(x)|\right\}\le\delta \tag{8}$$

для розв'язку задачі (1)–(3) в $\overline{\Pi}^{T^*-T}$ виконується нерівність

$$\sup_{i\in\mathbb{N}}\max_{x,t}\left\{|u_i(x,t)|\right\}<\varepsilon.$$

Будемо вважати, що вихідні функції системи (1) задовольняють умову ($\mathbf{H_2}$), якщо для всіх $T^*\in\mathbb{R}$ та $\varepsilon>0$ існує таке $T<T^*$, що при

$$f_i(x,t,0,0,\ldots)\equiv 0,\qquad h_i(t)\equiv 0,\quad i\in\mathbb{N}, \tag{9}$$
$$\sup_{i\in\mathbb{N}}\max_{0\le x\le l}\left\{|u_i^T(x)|\right\}<1$$

для розв'язку задачі (1)–(3) в $\overline{\Pi}^{T^*-T}$ виконується нерівність

$$\sup_{i\in\mathbb{N}}\max_{0\le x\le l}\left\{|u_i(x,T^*)|\right\}<\varepsilon.$$

Сформулюємо у вигляді леми достатню ознаку виконання умов ($\mathbf{H_1}$) та ($\mathbf{H_2}$).

Лема 1. *Нехай для деяких $b>a>0$ в області G виконуються нерівності*

$$f_i(x,t,u_1,u_2,\ldots)-f_i(x,t,u_1,u_2,\ldots,u_{i-1},0,u_{i+1},\ldots)\le -bu_i,$$
$$\big|f_i(x,t,u'_1,u'_2,\ldots,u'_{i-1},u_i,u'_{i+1},\ldots)-$$
$$-f_i(x,t,u''_1,u''_2,\ldots,u''_{i-1},u_i,u''_{i+1},\ldots)\big|\le a\sup_{j\ne i}\left\{|u'_j-u''_j|\right\}$$

для довільних $u,u',u''\in C^\infty$ та $i\in\mathbb{N}$.

Тоді система (1) *задовольняє умови* ($\mathbf{H_1}$) *та* ($\mathbf{H_2}$).

Доведення проведемо від супротивного. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і виберемо $0 < \delta < \varepsilon$. Нехай виконуються нерівності (8), але в $\overline{\Pi}^{T^*-T}$ існують $i_0 \in \mathbb{N}$ та точка (x_0, t_0) такі, що

$$M := |u_{i_0}(x_0, t_0)| \geq \varepsilon. \tag{10}$$

Без обмеження загальності можна вважати, що $i_0 \in I_0$ та $u_{i_0}(x_0, t_0) > 0$. Тоді з нерівностей (8) випливає, що $t_0 > T$ і $x_0 > 0$. З рівняння (5) при $i = i_0$, $x = x_0$ та $t = t_0$ можна оцінити похідну функції $u_i(\varphi_i(\tau; x, t), \tau)$ вздовж напрямку характеристики:

$$f_{i_0}(x_0, t_0, u_1(x_0, t_0), u_2(x_0, t_0), \ldots) = f_{i_0}(x_0, t_0, u_1(x_0, t_0), u_2(x_0, t_0), \ldots)\pm$$

$$\pm f_{i_0}(x_0, t_0, u_1(x_0, t_0), u_2(x_0, t_0), \ldots, u_{i-1}(x_0, t_0), 0, u_{i+1}(x_0, t_0), \ldots) \pm f_{i_0}(x_0, t_0, 0, 0, \ldots) \leq$$

$$\leq -bM + a\varepsilon + \delta \leq (a - b)\varepsilon + \delta.$$

Отже, якщо вибрати $\delta < (b-a)\varepsilon$, то похідна буде від'ємною. Звідси одержимо суперечність з (10). Отже, виконується умова (**H₁**).

В системі (1) виконаємо заміну невідомих функцій $u_i(x, t) = e^{-\mu t} v_i(x, t)$, $0 < \mu < b - a$, $i \in \mathbb{N}$. Для функцій $v_i(x, t)$, $i \in \mathbb{N}$, одержимо систему рівнянь

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \lambda_i(x, t)\frac{\partial v_i}{\partial x} = e^{\mu t} f_i(x, t, e^{-\mu t}v_1, e^{-\mu t}v_2, \ldots) + \mu v_i, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{11}$$

Для системи (11) виконуються умови леми 1, а тому система (11) задовольняє умову ($\mathbf{H_1}$). Виберемо для заданого $\varepsilon > 0$ значення $\delta > 0$. Якщо для деяких $T^* \in \mathbb{R}$ та $T < T^*$ виконуються умови (9), то одержимо оцінки

$$|v_i^T(x)| < e^{\mu T} = \frac{e^{\mu T}}{\delta}\delta, \qquad 0 \leq x \leq l, \quad i \in \mathbb{N},$$

$$|v_i(x, t)| < \frac{e^{\mu T}}{\delta}\varepsilon, \qquad (x, t) \in \overline{\Pi}^{T^*-T}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Тоді

$$|u_i(x, T^*)| < e^{-\mu T^*}|v_i(x, T^*)| < e^{-\mu T^*}\frac{e^{\mu T}}{\delta}\varepsilon = \frac{e^{\mu(T-T^*)}}{\delta}\varepsilon, \qquad 0 \leq x \leq l, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Отже, при $T < T^* + \dfrac{\ln\delta}{\mu}$ умова ($\mathbf{H_2}$) виконується.

Лему 1 доведено.

Для оцінювання похідної класичного розв'язку задачі (1)–(3) сформулюємо та доведемо таку лему.

Лема 2. *Якщо існує класичний розв'язок задачі* (1)–(3) *у півсмузі* G_T, *то похідна* $\dfrac{\partial u}{\partial x} \equiv v$ *є розв'язком задачі*

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \lambda_i(x, t)\frac{\partial v_i}{\partial x} =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\partial f_i}{\partial u_j}(x, t, u_1, u_2, \ldots)v_j - \lambda'_{i_x}(x, t)v_i + \frac{\partial f_i}{\partial x}(x, t, u_1, u_2, \ldots), \quad i \in \mathbb{N}, \tag{12}$$

$$v_i(\tilde{x}_i, t) = u'_{i_x}(\tilde{x}_i, t), \qquad v_i(x, T) = u'_{i_x}(x, T), \quad i \in \mathbb{N},$$

яка отримана формальним диференціюванням системи рівнянь (1) *за змінною* x.

Доведення. Необхідно показати, що в G_T справджується рівність

$$u'_{i_x}(x,t) = \int\limits_{\chi_i(x,t)}^{t} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial f_i}{\partial u_j}[u](\xi,\tau) u'_{j_\xi}(\xi,\tau) - \right.$$

$$\left. - \lambda'_{i_\xi}(\xi,\tau) u'_{i_\xi}(\xi,\tau) + \frac{\partial f_i}{\partial \xi}[u](\xi,\tau) \right) \Bigg|_{\xi=\varphi_i(\tau;x,t)} d\tau + \omega'_i[u'](x,t), \tag{13}$$

де

$$\omega'_i[u'](x,t) = \begin{cases} u'_{i_x}(x,T), & \text{якщо} \quad \chi_i(x,t) = T, \\ u'_{i_x}\big(\varphi_i(\chi_i(x,t);x,t), \chi_i(x,t)\big), & \text{якщо} \quad \chi_i(x,t) > T. \end{cases}$$

Зафіксуємо довільні x, t та визначимо відображення $(\xi,\tau) \to (\zeta,\varsigma)$ за правилом

$$\{\zeta = \varphi_i(t;\xi,\tau),\, \varsigma = \tau\} \Leftrightarrow \{\xi = \varphi_i(\varsigma;\zeta,t),\, \tau = \varsigma\}.$$

Таким чином, справджуються рівності

$$\frac{\partial}{\partial\varsigma} = \frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial\varsigma} + \frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial\varsigma} = \lambda_i(\xi,\tau)\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial\varsigma},$$

$$\frac{\partial}{\partial\zeta} = \frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial\zeta}.$$

Отже, підінтегральний вираз (13) можна записати у вигляді

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial f_i}{\partial u_j}[u](\xi,\tau) u'_{j_\xi}(\xi,\tau) + \frac{\partial f_i}{\partial \xi}[u](\xi,\tau) - \lambda'_{i_\xi}(\xi,\tau) u'_{i_\xi}(\xi,\tau) =$$

$$= \big(u'_{i_\tau}(\xi,\tau) + \lambda_i(\xi,\tau) u'_{i_\xi}(\xi,\tau)\big)'_\xi - \lambda'_{i_\xi}(\xi,\tau) u'_{i_\xi}(\xi,\tau) =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{\partial u_i}{\partial\varsigma} - \lambda'_{i_\xi}(\xi,\tau)\frac{\partial u_i}{\partial\zeta} \right) \Big/ \left(\frac{\partial\xi}{\partial\zeta}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial\varsigma}\frac{\partial u_i}{\partial\zeta} - \lambda'_{i_\xi}(\xi,\tau)\frac{\partial u_i}{\partial\zeta} \right) \left(\frac{\partial\xi}{\partial\zeta}\right)^{-1}.$$

Враховуючи, що

$$\frac{\partial\xi}{\partial\zeta}(\tau;x,t) = e^{-\int_\varsigma^t \lambda'_{i_\xi}(\varphi_i(s;\zeta,t),s)ds},$$

насамкінець одержуємо

$$\left(\frac{\partial}{\partial\varsigma}\frac{\partial u_i}{\partial\zeta} - \lambda'_{i_\xi}(\xi,\tau)\frac{\partial u_i}{\partial\zeta} \right) \left(\frac{\partial\xi}{\partial\zeta}\right)^{-1} = \frac{\partial}{\partial\varsigma}\left(\frac{\partial u_i}{\partial\zeta} e^{-\int_t^\varsigma \lambda'_{i_\xi}(\varphi_i(s;\zeta,t),s)ds} \right).$$

Отже, при $\zeta = x$ рівність (13) набирає вигляду

$$u'_{i_x}(x,t) = \left(\frac{\partial u_i}{\partial\zeta} e^{-\int_t^\varsigma \lambda'_{i_\xi}(\varphi_i(s;x,t),s)ds} \right) \Bigg|_{\varsigma=\chi_i(x,t)}^{\varsigma=t} + \omega'_i[u'](x,t) =$$

$$= \frac{\partial u_i}{\partial\xi}(\varphi_i(\varsigma;x,t),\varsigma) \Bigg|_{\varsigma=\chi_i(x,t)}^{\varsigma=t} + \omega'_i[u'](x,t),$$

що і потрібно було довести.

Нехай для деякого $T^* \in \mathbb{R}$ $G^{T^*} = \{(x,t)\colon 0 < x < l,\ -\infty < t < T^*\}$.

Повернемось до розгляду задачі (1), (2). Має місце така теорема.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми* 2 *та в деякій області* G^{T^*} *такі умови*:

1) $\lambda,\ \lambda_x,\ \lambda^{-1},\ f,\ f'_x, h, h' \in C^\infty\Big(\overline{G}^{T^*}\Big)$;

2) *функції* $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \varkappa,\ \mu,\ \nu$ *обмежені при* $t \le 0$;

3) *системи* (1) *та* (12) *задовольняють умову* $(\mathbf{H_1})$;

4) $\sup_{x,t}\big\{\alpha(x,t)\big\} + \sup_{i,x,t}\{|\lambda'_{i_x}(x,t)|\} \le \dfrac{1}{l}\inf_{i,x,t}\big\{|\lambda_i(x,t)|\big\}$.

Тоді задача (1), (2) *має обмежений узагальнений розв'язок в* G^{T^*}.

Доведення. Існування розв'язку встановимо за допомогою канторівського діагонального процесу. Позначимо через $u_i^k,\ i,k \in \mathbb{N}$, розв'язок задачі (1) – (3) в області G_{-k} з початковими умовами

$$u_i^{-k}(x) = \begin{cases} h_i(-k) + \dfrac{x(l-x)\big(-h'_i(-k) + f_i(0,-k,h_1(-k),h_2(-k),\ldots)\big)}{l\lambda_i(0,-k)}, & i \in I_0, \\[2ex] h_i(-k) + \dfrac{x(l-x)\big(-h'_i(-k) + f_i(l,-k,h_1(-k),h_2(-k),\ldots)\big)}{l\lambda_i(l,-k)}, & i \in I_l. \end{cases}$$

При $T^* > -k$ з умов $(\mathbf{H_1})$ та 4 теореми 3 випливає, що функції u_i^k, кожна з яких є звуженням розв'язку задачі (1) – (3) на $G^{T^*} \cap G_{-k}$, обмежені в сукупності. З леми 2 та виконання умови $(\mathbf{H_1})$ для системи рівнянь (12) одержимо рівномірну обмеженість похідних розв'язку за змінною x, а тому з рівняння (1) і по t.

Таким чином, для кожного $k \in \mathbb{N}$ одержимо зліченну рівномірно обмежену послідовність функцій $\{u_i^n\}_{n=k}^\infty$, кожна з яких звужена на $G^{T^*} \cap G_{-k}$. З рівномірної обмеженості похідних розв'язку буде випливати одностайна неперервність. За теоремою Асколі – Арцела на кожній із множин $G^{T^*} \cap G_{-k}$ можна вибрати збіжні підпослідовності. Тому на $G^{T^*} \cap G_{-1}$ з послідовності $\{u_1^k\}$ можна вибрати збіжну підпослідовність $\{u_1^{\alpha_k}\}$. Однак послідовність $\{u_2^{\alpha_k}\}$ також рівномірно обмежена, тому з неї можна вибрати збіжну підпослідовність $\{u_2^{\beta_k}\}$. Продовживши аналогічні міркування, одержимо

$$\begin{gathered} u_1^{\alpha_1}(x,t),\ u_1^{\alpha_2}(x,t),\ u_1^{\alpha_3}(x,t), \ldots, u_1^{\alpha_k}(x,t),\ \ldots, \\ u_2^{\beta_1}(x,t),\ u_2^{\beta_2}(x,t),\ u_2^{\beta_3}(x,t), \ldots, u_2^{\beta_k}(x,t),\ \ldots, \\ u_3^{\gamma_1}(x,t),\ u_3^{\gamma_2}(x,t),\ u_3^{\gamma_3}(x,t), \ldots, u_3^{\gamma_k}(x,t),\ \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . \end{gathered}$$

Виділимо діагональну послідовність і запишемо рядками

$$\begin{gathered} u_1^{\alpha_1}(x,t),\ u_1^{\beta_2}(x,t),\ u_1^{\gamma_3}(x,t), \ldots, \\ u_2^{\alpha_1}(x,t),\ u_2^{\beta_2}(x,t),\ u_2^{\gamma_3}(x,t), \ldots, \\ u_3^{\alpha_1}(x,t),\ u_3^{\beta_2}(x,t),\ u_3^{\gamma_3}(x,t), \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . \end{gathered}$$

Кожна з одержаних послідовностей збігається, як підпослідовність збіжної послідовності, до якої додано скінченне число елементів. Провівши аналогічні міркування, одержимо послідовність вектор-функцій $\{u^{k_m}\}_{m=1}^{\infty}$, рівномірно збіжну в кожній з областей $G^{T^*} \cap G_{-k}$. Граничні функції будуть розв'язком задачі (1), (2) в G^{T^*}, оскільки при переході в (5) до границі при $k \to \infty$ початкова умова вироджується. Згідно із результатами попередніх пунктів розв'язок можна продовжити на всю смугу G.

Теорему 3 доведено.

Теорема 4. *Нехай в деякій області в* G^{T^*} *система* (1) *задовольняє умову* (**H₂**).

Тоді задача (1), (2) *не може мати більше одного обмеженого узагальненого розв'язку в* G^{T^*}.

Доведення. Встановимо єдиність розв'язку задачі (1), (2). Нехай T^* є фіксованим, u^1 та u^2 — два різні розв'язки, а $u = u^1 - u^2$. Тоді u в області G_{T^*-k} є розв'язком задачі (1)–(3) з $h_i(t) \equiv 0,\ f_i(x,t,0,0,\ldots) \equiv 0\ \forall i \in \mathbb{N},\ T = T^* - k,\ u^T(x) = u(x, T^* - k)$.

З умови ($\mathbf{H_2}$) випливає, що $u(x,T^*) \to 0$ при $k \to \infty$. Отже, $u(x,T^*) \equiv 0$, тобто і $u(x,t) \equiv 0$.

Наслідок. *Нехай в деякій області в* G^{T^*} *виконуються умови теорем* 3 *та* 4. *Тоді задача* (1), (2) *має єдиний обмежений узагальнений розв'язок в* G^{T^*}.

Література

1. *Тихонов А. Н.* О бесконечных системах дифференциальных уравнений // Мат. сб. – 1934. – № 41. – С. 551 – 560.
2. *Персидский К. П.* Об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений // Изв. АН КазССР. Математика и механика. – 1948. – Вып. 2. – С. 3 – 34.
3. *Жаутыков О. А.* О счетной системе дифференциальных уравнений, содержащей переменные параметры // Мат. сб. – 1959. – **49(91)**, № 3. – С. 317 – 330.
4. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* Счетные системы дифференциальных уравнений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1993. – 308 с.
5. *Мучник В. Л.* Об одной счетной системе интегральных уравнений в теории массового обслуживания // Дифференциальные и интегральные уравнения. – 1980. – Вып. 7. – С. 60 – 73.
6. *Оселедец В. И., Хмелев Д. В.* Глобальная устойчивость систем нелинейных дифференциальных уравнений и неоднородные счетные цепи Маркова // Проблемы передачи информации. – 2000. – **36**, вып. 1. – С. 60 – 76.
7. *Филимонов М. Ю.* К вопросу обоснования метода Фурье для нелинейных гиперболических уравнений с малым параметром // Тр. XXXIII Регионал. молод. конф. „Проблемы теоретической и прикладной математики”. – Екатеринбург, 2002. – С. 178 – 182.
8. *Недокіс В. А.* Зліченноточкові крайові задачі для диференціальних рівнянь у просторі обмежених числових послідовностей: Автореф. дис. . . . канд. фіз.-мат. наук. – Київ, 2006. – 25 с.
9. *Аболиня В. Э., Мышкис А. Д.* Смешанная задача для почти линейной гиперболической системы на плоскости // Мат. сб. – 1960. – **50**, вып. 4. – С. 423 – 442.
10. *Жаутыков О. А.* О построении решений задачи Коши для бесконечных систем линейных уравнений в частных производных // Изв. АН КазССР. Математика и механика. – 1959. – Вып. 8(12). – С. 3 – 17.
11. *Хома Г. П., Яцюк В. Т.* Вкорочення зчисленної системи диференціальних рівнянь в частинних похідних // Укр. мат. журн. – 1971. – **23**, № 3. – С. 417 – 420.
12. *Камбулов В. Ф., Колесов А. Ю.* Об одном модельном гиперболическом уравнении, возникающем в радиофизике // Мат. моделирование. – 1996. – **8**, № 1. – С. 93 – 102.
13. *Berzhanov A. B., Kurmangaliev E. K.* Solution of a countable system of quasilinear partial differential equations multiperiodic in a part of variables // Ukr. Math. J. – 2009. – **61**, № 2. – P. 280 – 288.
14. *Бекбауева А. У., Кенжебаев К. К., Сартабанов Ж. А.* Многопериодические решения квазилинейных гиперболических систем дифференциальных уравнений в частных производных // Мат. журн. – 2010. – **10**, № 1(35). – С. 42 – 46.
15. *Фірман Т. І.* Укорочення зліченної гіперболічної системи квазілінійних диференціальних рівнянь // Буков. мат. журн. – 2014. – **2**, № 1. – С. 125 – 129.

16. *Bokalo M., Lorenzi A.* Linear evolution first-order problems without initial conditions // Milan J. Math. – 2009. – **77**. – P. 437 – 494.
17. *Кирилич В. М., Мышкис А. Д.* Краевая задача без начальных условий для линейной одномерной системы уравнений гиперболического типа // Дифференц. уравнения. – 1992. – **28**, № 3. – С. 463 – 469.
18. *Lavrenyuk S. P., Zareba L.* Nonlocal problem for the nonlinear hyperbolic system of the first order without initial conditions // Mat. Stud. – 2000. – **14**, № 2. – P. 150 – 158.
19. *Kmit I., Recke L., Tkachenko V.* Robustness of exponential dichotomies of boundary-value problems for general first-order hyperbolic systems // Ukr. Math. J. – 2013. – **65**, № 2. – P. 236 – 251.
20. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1984. – 296 с.

Одержано 16.12.14,
після доопрацювання — 10.06.16