УДК 517.5

Р. А. Ласурия (Абхаз. гос. ун-т, Сухум)

ГРУППЫ ОТКЛОНЕНИЙ РЯДОВ ФУРЬЕ В ОБОБЩЕННЫХ ГЕЛЬДЕРОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

We study the rate of convergence of the values of analogs of the functionals of strong approximation of Fourier series in generalized L-Hölder spaces.

Встановлено оцінки величин, що є аналогами функціоналів сильної сумовності рядів Фур'є в узагальнених L-гельдерових просторах.

1. Необходимые определения, известные результаты и постановка задачи. Пусть $L :=$ $:= L(0, 2\pi)$ – пространство суммируемых по Лебегу на $[0, 2\pi]$ и 2π-периодических функций $f = f(x)$ с нормой

$$\|f\|_1 := \int\limits_0^{2\pi} |f(x)|\, dx.$$

Обозначим через $H_{1,\omega^*} = H_{1,\omega^*}(0, 2\pi)$ пространство функций $f \in L$, удовлетворяющих условию

$$\|f(\cdot + x) - f(\cdot + y)\|_1 \le K\omega^*(|x - y|) \ \forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad K = K(f),$$

с обобщенной L-гельдеровой нормой

$$\|f\|_{1,\omega^*} := \|f\|_1 + \sup_{\substack{-\infty < x,y < +\infty \\ x \ne y}} \Delta^{1,\omega^*} f(x, y), \tag{1}$$

где

$$\Delta^{1,\omega^*} f(x, y) := \frac{\|f(\cdot + x) - f(\cdot + y)\|_1}{\omega^*(|x - y|)},$$

$\omega^*(t)$ — некоторая неубывающая и положительная при $t > 0$ функция.

Пусть, далее, $C := C(0, 2\pi)$ — пространство непрерывных на $[0, 2\pi]$ и 2π-периодических функций f с нормой

$$\|f\|_C := \max_x |f(x)|,$$

$H_{\omega^*} = H_{\omega^*}(0, 2\pi)$ — пространство функций $f \in C$, удовлетворяющих условию

$$|f(x) - f(y)| \le K\omega^*(|x - y|) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad K = K(f).$$

Полагая $\Delta_h f(x) = f(x + h) - f(x)$, нормы в пространствах H_{1,ω^*} и H_{ω^*} можно определить в виде

$$\|f\|_{1,\omega^*} = \|f\|_1 + \sup_{h>0} \frac{\|\Delta_h f\|_1}{\omega^*(h)},$$

$$\|f\|_{\omega^*} = \|f\|_C + \sup_{h>0} \frac{\|\Delta_h f\|_C}{\omega^*(h)}.$$

Пространства H_{1,ω^*}, H_{ω^*} являются банаховыми пространствами относительно указанных норм (см., например, [7]).

Пусть $\omega(t)$ — некоторая неубывающая и положительная при $t > 0$ функция. Если существуют постоянные $c > 0,\ 0 \leq r \leq 1$ такие, что

$$(\omega(t))^r \leq c\omega^*(t),$$

то $H_{1,\omega} \subset H_{1,\omega^*}$. Аналогично $H_\omega \subset H_{\omega^*}$. В частности, полагая $\omega^*(t) = t^\gamma,\ \omega(t) = t^\alpha$, $0 \leq \gamma < \alpha \leq 1$, в качестве множества $H_{1,\omega}$ получаем множество

$$H_{1,\alpha} := \{f \in L : \|f(\cdot + x) - f(\cdot + y)\|_1 \leq K|x-y|^\alpha \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}, \ \ K = K(f)\}$$

в пространстве $H_{1,\gamma}$ с нормой

$$\|f\|_{1,\gamma} := \|f\|_1 + \sup_{x \neq y} \frac{\|f(\cdot + x) - f(\cdot + y)\|_1}{|x-y|^\gamma}. \qquad (1')$$

При $\gamma = 0$ полагаем

$$\|f\|_{1,\gamma} := \|f\|_1.$$

Аналогично определяются пространства $H_\alpha,\ 0 \leq \alpha \leq 1$.

Пусть

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

— ряд Фурье функции $f \in L$, $S_n(f)$ — частичные суммы порядка n ряда Фурье $S[f]$, $\rho_n(f) = \rho_n(f;x) := f(x) - S_n(f;x)$, где $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Большое количество работ посвящено вопросам приближения функций в гельдеровых пространствах (см., например, [1 – 23]). Первой работой в этом направлении была, по-видимому, работа З. Пресдорфа [1] относительно средних Фейера.

Теорема А. *Пусть $0 \leq \gamma < \alpha \leq 1$. Тогда для любой функции $f \in H_\alpha$ имеют место соотношения*

$$\left\| f - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(f) \right\|_\gamma = \left\| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \rho_k(f) \right\|_\gamma = \begin{cases} O\left((n+1)^{\gamma-\alpha}\right), & \alpha < 1, \\ O\left((n+1)^{\gamma-1} (\ln(n+1))^{1-\gamma}\right), & \alpha = 1, \end{cases}$$

где $n \in \mathbb{N}$.

Затем появились работы Л. Лейндлера [2], Р. Мохапатры, П. Чандры [3] и др.

В работе автора [4] (см. также [5, 6]) было получено, в частности, следующее уточнение теоремы А.

Теорема B. *Пусть* $0 \leq \gamma < \alpha \leq 1$. *Тогда для любой функции* $f \in H_\alpha$ *справедливы соотношения*

$$\left\| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \rho_k(f) \right\|_{\gamma} = \begin{cases} O\left((n+1)^{\gamma-\alpha}\right), & \alpha-\gamma<1, \\ O\left(\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}\right), & \alpha-\gamma=1\,(\alpha=1,\ \gamma=0), \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Сопоставляя соотношения из теорем A и B, замечаем, что в случае $\alpha = 1,\ \gamma > 0$ множитель $(\ln(n+1))^{1-\gamma}$ в теореме A может быть опущен.

В работе автора [5] установлено аналогичное утверждение (см. также [7, 8]).

Теорема C. *Пусть* $0 \leq \gamma < \alpha \leq 1$. *Тогда для любой функции* $f \in H_{1,\alpha}$ *справедливы соотношения*

$$\left\| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \rho_k(f) \right\|_{1,\gamma} = \begin{cases} O\left((n+1)^{\gamma-\alpha}\right), & \alpha-\gamma<1, \\ O\left(\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}\right), & \alpha-\gamma=1, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Вопросы приближения в гельдеровых пространствах конкретными методами, а также матричными методами суммирования рядов Фурье исследовались, например, в работах [2 – 5, 9 – 20].

В статье Л. Лейндлера, А. Меира, В. Тотика [19] была установлена теорема, сводящая приближение линейными методами в обобщенной гельдеровой норме к приближению теми же методами в равномерной норме. Однако эта теорема, например для средних Фейера, не позволяет получить уточненный вариант (при $\alpha = 1,\ \gamma > 0$, теорема B) теоремы А. З. Пресдорфа. Подобной идее была посвящена статья С. А. Теляковского [20].

Сильная аппроксимация в обобщенных гельдеровых пространствах изучалась, например, в работах [21 – 23]. В частности, в работе автора [22] было установлено следующее утверждение.

Теорема D. *Пусть последовательность функций* $\alpha = (\alpha_n(v))$ *такова, что при каждом фиксированном* $v \in V \subset \mathbb{R}$ *числа* $\alpha_k(v)$ *неотрицательны и не возрастают по индексу* k. *Если* $0 \leq \beta < \eta \leq 1$, *то для любой функции* $f \in H_\omega \subset H_{\omega^*}$, *для всех* $q \geq 1,\ n \in \mathbb{N},\ v \in V$ *имеет место соотношение*

$$\left\| \left(\sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k(v) \left|\rho_k(f)\right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{\omega^*} = O(1) \sup_{\substack{-\infty<x,y<+\infty \\ x\neq y}} \frac{(\omega(|x-y|))^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(|x-y|)} \times$$

$$\times \left\{ n\alpha_n(v)\left(\omega(1/n)\right)^{q(1-\beta/\eta)} + \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k(v)\left(\omega(1/k)\right)^{q(1-\beta/\eta)} \right\}^{\frac{1}{q}}, \tag{2}$$

где $O(1)$ *– величина, равномерно ограниченная по* $n \in \mathbb{N},\ v \in V$ *и зависящая, вообще говоря, от* q *и* $f \in H_\omega$.

В некоторых важных частных случаях, например для классических сильных средних $\left(\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left|\rho_k(f)\right|^q\right)^{1/q}$, оценка (2) для $H_\alpha \subset H_\gamma$, где $\eta = \alpha = 1/q > \gamma > 0,\ \beta = \gamma$, точнее соответствующей оценки из работы [23] на множитель $O\left(\ln n\right)^{1/q-\gamma}$. Введем в рассмотрение величины

$$h_v^{(n)}\left(f\right)=h_v^{(n)}\left(f;x;\alpha\right):=\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k\left(v\right)\rho_k\left(f;x\right),\qquad n\in\mathbb{N}_0, \tag{3}$$

где последовательность $\alpha=\left(\alpha_n\left(v\right)\right)$ имеет прежний смысл.

Мера сильной аппроксимации в пространстве H_{ω^*} характеризуется величиной, содержащейся в левой части соотношения (2). Аналогом этой величины в пространстве H_{1,ω^*} разумно считать величину $\left\|h_v^{(n)}\left(f\right)\right\|_{1,\omega^*}$ (см. также [24, с. 395]) в том смысле, что справедливо порядковое соотношение (см., например, [26])

$$\sup_{\|f\|_1=1}\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left|S_k\left(f\right)\right|\right\|_1\asymp\ln\left(n+1\right),\qquad n\in\mathbb{N},$$

тогда как в равномерной норме, как известно, данная величина ограничена.

В настоящей работе рассматриваются оценки скорости сходимости величин (3) для функций $f\in H_{1,\omega}$ по норме пространства H_{1,ω^*}, определяемой равенством (1). При этом мы устанавливаем аналог теоремы D в пространстве H_{1,ω^*}.

В частных случаях, когда величины (3) переходят в линейные средние рядов Фурье, последние содержат в себе как матричные (прямоугольные и треугольные), так и непрерывные методы суммирования рядов. При этом оценки величин (3) существенно отличаются от соответствующих известных оценок для линейных средних рядов Фурье в равномерной гельдеровой метрике.

2. Вспомогательное утверждение. Положим

$$H_{v,1}^{(n)}\left(f;x,y\right):=\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\alpha_k\left(v\right)\left[\rho_k\left(f;\tau+x\right)-\rho_k\left(f;\tau+y\right)\right]\right\|_1.$$

В дальнейшем нам понадобится следующее вспомогательное утверждение, которое не лишено и самостоятельного интереса.

Лемма. *Пусть $0\le\beta<\eta\le1$ и $\alpha=\left(\alpha_n\left(v\right)\right)$, $n\in\mathbb{N}_0$, — последовательность неотрицательных функций, невозрастающая по $n\in\mathbb{N}_0$ при каждом фиксированном $v\in V\subset\mathbb{R}$. Тогда для любой функции $f\in H_{1,\omega}$ имеет место соотношение*

$$H_{v,1}^{(n)}\left(f;x,y\right)=O\left(1\right)\alpha_n\left(v\right)\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\beta/\eta}\left(\omega\left(1/(n+1)\right)\right)^{1-\beta/\eta},\qquad v\in V,\quad n\in\mathbb{N}_0, \tag{4}$$

где $O\left(1\right)$ — величина, равномерно ограниченная по n, x, y, v и зависящая, вообще говоря, от f.

Доказательство. Полагая

$$\varphi_x\left(t\right):=f\left(x+t\right)+f\left(x-t\right)-2f\left(x\right),$$

$$D_n\left(t\right):=\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t}{2\sin\dfrac{t}{2}},$$

имеем

$$\rho_n(f;x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \varphi_x(t)\, D_n(t)\, dt.$$

В принятых обозначениях получаем

$$H_{v,1}^{(n)}(f;x,y) = \left\| \frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n} \alpha_k(v)\, \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \left[\varphi_{\tau+x}(t) - \varphi_{\tau+y}(t)\right] D_k(t)\, dt \right\|_1 \le$$

$$\le \left\| \frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n} \alpha_k(v)\, \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{n+1}} \left[\varphi_{\tau+x}(t) - \varphi_{\tau+y}(t)\right] D_k(t)\, dt \right\|_1 +$$

$$+\left\| \frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n} \alpha_k(v)\, \frac{2}{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi} \left[\varphi_{\tau+x}(t) - \varphi_{\tau+y}(t)\right] D_k(t)\, dt \right\|_1 := I_1 + I_2. \tag{5}$$

Принимая во внимание неравенства

$$\left\|\varphi_{\tau+x}(t) - \varphi_{\tau+y}(t)\right\|_1 \le 4K\omega\left(|x-y|\right), \tag{6}$$

$$|D_k(t)| \le k+1, \qquad n \le k \le 2n,$$

а также известное неравенство Минковского

$$\left\| \int\limits_a^b f(\cdot, y)\, dy \right\|_1 \le \int\limits_a^b \|f(\cdot, y)\|_1 dy, \tag{7}$$

находим

$$I_1 \le \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n} \alpha_k(v) \int\limits_0^{\frac{\pi}{n+1}} \left\|\varphi_{\tau+x}(t) - \varphi_{\tau+y}(t)\right\|_1 |D_k(t)|\, dt =$$

$$= O(1)\sum_{k=n}^{2n} \alpha_k(v) \int\limits_0^{\frac{\pi}{n+1}} \omega\left(|x-y|\right) dt = O(1)\, \alpha_n(v)\, \omega\left(|x-y|\right). \tag{8}$$

Далее используем следующее представление ядра $D_k(t)$: $D_k(t) = \dfrac{\sin kt}{2\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}} + \dfrac{1}{2}\cos kt$. С учетом этого равенства получаем

$$I_2 \le \left\| \frac{1}{n+1}\,\frac{2}{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi} \frac{\varphi_{\tau+x}(t) - \varphi_{\tau+y}(t)}{2\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}} \sum_{k=n}^{2n} \alpha_k(v) \sin kt dt \right\|_1 +$$

$$+\left\|\frac{1}{n+1}\,\frac{2}{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}\frac{\left[\varphi_{\tau+x}\left(t\right)-\varphi_{\tau+y}\left(t\right)\right]}{2}\sum_{k=n}^{2n}\alpha_k\left(v\right)\cos ktdt\right\|_1 := I_3+I_4. \qquad (9)$$

Вследствие неравенства

$$2\operatorname{tg}\frac{t}{2}\geq t, \qquad 0\leq t\leq\pi,$$

преобразования Абеля

$$\left|\sum_{k=n}^{2n}\alpha_k\left(v\right)\begin{Bmatrix}\sin kt\\ \cos kt\end{Bmatrix}\right|<2\pi\alpha_n(v)t^{-1}$$

и соотношений (6), (7) находим

$$I_3\leq\frac{2}{\pi\left(n+1\right)}\int\limits_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}\frac{\left\|\varphi_{\tau+x}\left(t\right)-\varphi_{\tau+y}\left(t\right)\right\|_1}{t^2}2\pi\alpha_n\left(v\right)dt=$$

$$=O\left(1\right)\frac{\alpha_n\left(v\right)}{n+1}\omega\left(\left|x-y\right|\right)\int\limits_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}t^{-2}dt=O\left(1\right)\alpha_n\left(v\right)\omega\left(\left|x-y\right|\right). \qquad (10)$$

Аналогично

$$I_4=O\left(1\right)\alpha_n\left(v\right)\omega\left(\left|x-y\right|\right). \qquad (11)$$

Следовательно, в силу соотношений (5), (8) – (11) получаем

$$H_{v,1}^{(n)}\left(f;x,y\right)=O\left(1\right)\alpha_n\left(v\right)\omega\left(\left|x-y\right|\right). \qquad (12)$$

С другой стороны,

$$H_{v,1}^{(n)}\left(f;x,y\right)\leq\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\alpha_k\left(v\right)\left[\rho_k\left(f;\tau+x\right)-\rho_k\left(f;\tau+y\right)\right]\right\|_1\leq$$

$$\leq\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\alpha_k\left(v\right)\rho_k\left(f;\tau+x\right)\right\|_p+\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\alpha_k\left(v\right)\rho_k\left(f;\tau+y\right)\right\|_1. \qquad (13)$$

Далее воспользуемся известным неравенством [25, с. 44]

$$\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\alpha_k\left(v\right)\rho_k\left(f;\tau+x\right)\right\|_1\leq K\alpha_n\left(v\right)E_n(f)_1, \qquad (14)$$

где $E_n\left(f\right)_1$ — наилучшее приближение тригонометрическими полиномами порядка не выше n в пространстве L.

На основании (13), (14) находим

$$H_{v,1}^{(n)}\left(f;x,y\right)=O\left(1\right)\alpha_n\left(v\right)E_n(f)_1. \qquad (15)$$

В силу неравенства Джексона (см., например, [26, с. 8])

$$E_n(f)_1 \leq K\omega\bigg(f; \frac{1}{n+1}\bigg)_1,$$

где $\omega(f;\ )_1$ — модуль непрерывности в L функции f, принимая во внимание, что $f \in H_{1,\omega}$, из (15) заключаем, что

$$H_{v,1}^{(n)}(f;x,y) = O(1)\,\alpha_n(v)\,\omega\bigg(f;\frac{1}{n+1}\bigg)_1 = O(1)\,\alpha_n(v)\,\omega\left(\frac{1}{n+1}\right). \tag{16}$$

Следовательно, объединяя соотношения (12) и (16), окончательно получаем

$$H_{v,1}^{(n)}(f;x,y) = \Big(H_{v,1}^{(n)}(f;x,y)\Big)^{\beta/\eta}\Big(H_{v,1}^{(n)}(f;x,y)\Big)^{1-\beta/\eta} =$$

$$= O(1)\,\alpha_n(v)\,\omega^{\beta/\eta}(|x-y|)\,\omega^{1-\beta/\eta}\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

3. Основные результаты и следствия. Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $0 \leq \beta < \eta \leq 1$ *и* $\alpha = (\alpha_n(v))$, $n \in \mathbb{N}_0$, — *последовательность неотрицательных функций, невозрастающая по* $n \in \mathbb{N}_0$ *при каждом фиксированном* $v \in V \subset \subset \mathbb{R}$. *Тогда для любой функции* $f \in H_{1,\omega} \subset H_{1,\omega^*}$ *имеет место соотношение*

$$\left\|h_v^{(n)}(f)\right\|_{1,\omega^*} = O(1) \sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty\\ x\neq y}} \frac{(\omega(|x-y|))^{\beta/\eta}}{\omega^*(|x-y|)}\times$$

$$\times\left\{(n+1)\,\alpha_n(v)\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta} + \sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k(v)\left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta}\right\}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{17}$$

где $O(1)$ — *величина, равномерно ограниченная по* $n \in \mathbb{N}_0$, α *и зависящая, вообще говоря, от* $f \in H_{1,\omega}$.

Замечание. Величина

$$\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty\\ x\neq y}} \frac{(\omega(|x-y|))^{\beta/\eta}}{\omega^*(|x-y|)}$$

при фиксированных $\omega^*(\ )$ и $\omega(\ )$ зависит от выбора параметров β и η. В частности, полагая $\omega(t) = t^{\alpha}$, $\omega^*(t) = t^{\gamma}$, $0 \leq \gamma < \alpha \leq 1$, $\beta = \gamma$, $\eta = \alpha$, имеем

$$\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty\\ x\neq y}} \frac{(\omega(|x-y|))^{\beta/\eta}}{\omega^*(|x-y|)} = 1.$$

Доказательство теоремы. Требуется оценить величину

$$\left\|h_v^{(n)}(f)\right\|_{1,\omega^*} = \left\|h_v^{(n)}(f)\right\|_1 + \sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty\\ x\neq y}} \frac{\left\|h_v^{(n)}(f;\tau+x) - h_v^{(n)}(f;\tau+y)\right\|_1}{\omega^*(|x-y|)}. \tag{18}$$

Пусть $f \in H_{1,\omega}$ и $0 \le \beta < \eta \le 1$. Тогда в силу приведенной выше леммы

$$\left\| h_v^{(n)}(f;\tau+x) - h_v^{(n)}(f;\tau+y) \right\|_1 = \left\| \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k(v) \left[\rho_k(f;\tau+x) - \rho_k(f;\tau+y)\right] \right\|_1 =$$

$$= \left\| \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k=2^\nu n}^{2^{\nu+1}n} \alpha_k(v) \left[\rho_k(f;\tau+x) - \rho_k(f;\tau+y)\right] \right\|_1 \le$$

$$\le \sum_{\nu=0}^{\infty} (2^\nu n+1) \left\| \frac{1}{2^\nu n+1} \sum_{k=2^\nu n}^{2^{\nu+1}n} \alpha_k(v) \left[\rho_k(f;\tau+x) - \rho_k(f;\tau+y)\right] \right\|_1 =$$

$$= O(1) \left(\omega(|x-y|)\right)^{\beta/\eta} \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{2^\nu n}(v) (2^\nu n+1) \left(\omega\left(\frac{1}{2^\nu n+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta} \right\} =$$

$$= O(1) \left(\omega(|x-y|)\right)^{\beta/\eta} \left\{ (n+1)\alpha_n(v) \left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta} + \right.$$

$$\left. +2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{2^\nu n}(v) \left(2^{\nu-1} n+1\right) \left(\omega\left(\frac{1}{2^\nu n+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta} \right\} =$$

$$= O(1) \left(\omega(|x-y|)\right)^{\beta/\eta} \times$$

$$\times \left\{ (n+1)\alpha_n(v) \left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta} + \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k(v) \left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta} \right\}. \tag{19}$$

Таким образом,

$$\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty \\ x\ne y}} \frac{\left\| h_v^{(n)}(f;\tau+x) - h_v^{(n)}(f;\tau+y) \right\|_1}{\omega^*(|x-y|)} =$$

$$= O(1) \sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty \\ x\ne y}} \frac{\left(\omega(|x-y|)\right)^{\beta/\eta}}{\omega^*(|x-y|)} \times$$

$$\times \left\{ (n+1)\alpha_n(v) \left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta} + \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k(v) \left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta} \right\}, \quad v \in V. \tag{20}$$

Аналогично, с учетом неравенств (14), (15) и неравенства Джексона имеем

$$\left\| h_v^{(n)}(f) \right\|_1 = O(1) \left\{ (n+1)\alpha_n(v)\, \omega\left(\frac{1}{n+1}\right) + \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k(v)\, \omega\left(\frac{1}{k+1}\right) \right\}. \tag{21}$$

Следовательно, объединяя соотношения (18)–(21), приходим к требуемому соотношению.

Приведем некоторые утверждения и оценки, вытекающие из доказанной теоремы. В частности, полагая в соотношении (17) $n=0$, получаем такое следствие.

***Следствие* 1.** *Пусть* $0 \le \beta < \eta \le 1$ *и* $\alpha = (\alpha_n(v))$, $n \in \mathbb{N}_0$, — *последовательность неотрицательных функций, невозрастающая по* $n \in \mathbb{N}_0$ *при каждом фиксированном* $v \in V \subset \subset \mathbb{R}$. *Тогда для любой функции* $f \in H_{1,\omega} \subset H_{1,\omega^*}$ *имеет место соотношение*

$$\left\| h_v^{(0)}(f) \right\|_{1,\omega^*} = O(1) \sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty \\ x\neq y}} \frac{(\omega(|x-y|))^{\beta/\eta}}{\omega^*(|x-y|)} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(v) \left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta} \right\}. \tag{22}$$

Последовательность функций $\alpha = (\alpha_n(v))$, $n \in \mathbb{N}_0$, $v \in V$, может определять некоторый α-метод суммирования рядов, причем как непрерывный метод, так и матричный. Полагая, например, $\alpha_k(v) = (1-v)v^k$, $0<v<1$, из (22) для метода Абеля находим

$$\left\| (1-v)\sum_{k=0}^{\infty} v^k \rho_k(f) \right\|_{1,\omega^*} = O(1) \sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty \\ x\neq y}} \frac{(\omega(|x-y|))^{\beta/\eta}}{\omega^*(|x-y|)} \times$$

$$\times \left\{ (1-v)\sum_{k=0}^{\infty} v^k \left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta} \right\}.$$

Если положить $\alpha_k(v) = \alpha_k^{(n)} = \dfrac{1}{n+1}$, $0 \le k \le n$, $\alpha_k^{(n)} = 0$, $k > n$, то для метода Фейера из (22) получим (см. также [5, 7, 8])

$$\left\| \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \rho_k(f) \right\|_{1,\omega^*} = O(1) \sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty \\ x\neq y}} \frac{(\omega(|x-y|))^{\beta/\eta}}{\omega^*(|x-y|)} \left\{ \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta} \right\}.$$

Возвращаясь к пространствам $H_{1,\gamma}$, $H_{1,\alpha}$ и полагая $\omega^*(t) = t^\gamma$, $\omega(t) = t^\alpha$, $\eta = \alpha$, $\beta = \gamma$, $0 \le \gamma < \alpha \le 1$, из последнего соотношения получаем соотношение из теоремы C.

Приведем одно утверждение, содержащее оценку снизу.

Теорема 2. *Пусть величина* $\omega(\cdot)$ *является модулем непрерывности и удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=1}^{n} \omega\left(\frac{1}{k}\right) \le Bn\omega\left(\frac{1}{n}\right), \qquad B := \mathrm{const} > 0, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{23}$$

$\omega^*(\cdot)$ — *положительная и возрастающая на* $(0,\infty)$ *функция. Пусть, далее,* $\alpha = (\alpha_k(v))$ — *последовательность неотрицательных функций такая, что*

$$\alpha_k(v) = 0,\ k \ge n+1, \qquad v \in V,$$

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k(v) = 1, \qquad v \in V.$$

Тогда существует функция $f_0 \in H_{1,\omega}$, *для которой*

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} \alpha_k(v)\rho_k(f_0) \right\|_{1,\omega^*} \ge K \inf_{h>0} \frac{(\omega(h))^{\beta/\eta}}{\omega^*(h)} \left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta},$$

где $0 \le \beta < \eta \le 1$, K — *некоторая положительная постоянная.*

Доказательство опирается на следующее утверждение, установленное В. В. Жуком [11]: Пусть функция $\varphi(t) > 0$ при $t > 0$, φ возрастает на $(0,\infty)$, линейный оператор $U : L \to T^{(n)}$ такой, что

$$U(f(+t);x) = U(f;x+t) \quad \forall f \in L, \qquad x,t \in \mathbb{R}.$$

Тогда для любой функции $f \in L$

$$E_n(f)_1 \le \varphi\left(\frac{\pi}{n+1}\right) B_1 \sup_{0<t<\infty} \frac{\|\Delta_t(f - U(f))\|_1}{\varphi(t)}, \qquad B_1 := \text{const} > 0,$$

где $T^{(n)}$ — множество тригонометрических полиномов порядка не выше n.

Согласно условиям теоремы, функция $\omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$ определяет положительную монотонно убывающую к нулю последовательность чисел. Тогда в силу аналога известной теоремы С. Н. Бернштейна [27, с. 9] существует такая функция $f_0 \in L$, что

$$E_n(f_0)_1 = \omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right).$$

Применяя приведенную выше теорему для функции f_0, находим

$$\sup_{h>0} \frac{\left\|\Delta_h\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k(v)\,\rho_k(f_0)\right)\right\|_1}{\omega^*(h)} =$$

$$= \sup_{h>0} \frac{\left\|\Delta_h\left(f_0 - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k(v)\,S_k(f_0)\right)\right\|_1}{\omega^*(h)} \ge$$

$$\ge K_1 \frac{E_n(f_0)_1}{\omega^*\left(\frac{\pi}{n+1}\right)} = K_1 \frac{\left(\omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)^{\beta/\eta}}{\omega^*\left(\frac{\pi}{n+1}\right)} \left(\omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta} \ge$$

$$\ge K_1 \inf_{h>0} \frac{(\omega(h))^{\beta/\eta}}{\omega^*(h)} \left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta}.$$

Покажем теперь, что $f_0 \in H_{1,\omega}$. Действительно, на основании неравенства С. Б. Стечкина, А. Ф. Тимана и М. Ф. Тимана (см., например, [27, с. 8]) с учетом условия (23) находим

$$\omega\left(f_0; \frac{1}{k+1}\right)_1 \le \frac{A}{k+1} \sum_{i=0}^{k} E_i(f_0)_1 \le \frac{A_1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} \omega\left(\frac{1}{i+1}\right) \le A_2 \omega\left(\frac{1}{k+1}\right).$$

В результате этого заключаем, что $f_0 \in H_{1,\omega}$.

Теорема 2 доказана.

Из теорем 1 и 2 следует неулучшаемость теоремы С для случая $0 \le \gamma < \alpha < 1$. Если же $\eta = \alpha = 1$ и $\beta = \gamma > 0$, то мы можем утверждать, что существует такая функция f_0, что

$$\omega(f_0;h)_1 = O\left(h \ln \frac{1}{h}\right), \qquad h > 0, \tag{24}$$

для которой

$$\left\| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \rho_k \left(f_0 \right) \right\|_{1,\gamma} \geq K(n+1)^{\gamma-1}, \qquad K > 0. \tag{25}$$

Действительно, для этого положим $\omega\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right) = \dfrac{\pi}{n+1}$ $(\alpha = 1)$. Тогда, согласно аналогу теоремы С. Н. Бернштейна, найдется функция f_0 такая, что $E_n(f_0)_1 = \dfrac{\pi}{n+1}$. Это, как известно, влечет за собой условие (24). Далее, рассуждая, как и при доказательстве теоремы 2, получаем оценку (25).

Литература

1. *Prössdorf S.* Zur Konvergens der Fourierreihen Hölderstetiger // Math. Nachr. – 1975. – **69**. – S. 7 – 14.
2. *Leindler L.* Generalizations of Prössdorf's theorems // Stud. math. hung. – 1979. – **14**. – P. 431 – 439.
3. *Mohapatra R., Chandra P.* Degree of approximation of functions in the Hölder metric // Acta math. hung. – 1983. – **41**, № 1-2. – P. 67 – 74.
4. *Ласурия Р. А.* О приближении периодических функций линейными средними сумм Фурье в обобщенной гельдеровой метрике // Докл. АМАН. – 2000. – **5**, № 1. – С. 24 – 39.
5. *Ласурия Р. А.* Приближение функций в обобщенной гельдеровой метрике. – Сухум: Абхаз. гос. ун-т, 2001. – 65 с.
6. *Ласурия Р. А.* О приближении функций, заданных на всей действительной оси, операторами типа Фейера в обобщенной гельдеровой метрике // Мат. заметки. – 2007. – **181**, № 4. – С. 547 – 552.
7. *Draganov B. R.* Simultaneous approximation of functions by Fejer-type operators in a generalized Hölder norm // E. J. Approxim. – 2008. – **14**. – P. 439 – 449.
8. *Mohapatra R. N., Szal B.* Degree of convergence of an Integral Operator // arXiv: 1205. 5870 V 1 [math. CA] 26 may (2012). – P. 1 – 21.
9. *Chandra P.* Degree of approximation of functions in the Hölder metric by Borel's means // J. Math. Anal. and Appl. – 1990. – **149**. – P. 236 – 246.
10. *Das G., Ghosh T., Ray B. K.* Degree of approximation of functions by their Fourier series in the generalized Hölder metric // Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.). – 1996. – **106**. – P. 139 – 153.
11. *Жук В. В.* Приближение периодических функций в метрике типа Гельдера суммами Фурье и средними Рисса // Зап. науч. сем. ПОМИ. – 2007. – **350**. – С. 70 – 88.
12. *Leindler L.* A relaxed estimate of the degree of approximation by Fourier series in generalized Hölder metric // Anal. Math. – 2009. – **35**. – P. 51 – 60.
13. *Landon B. A.* Degree of approximation of Hölder continuons functions: Dissert. . . . D-r Phil. in Math. – Orlando, USA, 2008.
14. *Lenski W., Szal B.* On the approximation of functions by matrix means in the generalized Hölder metric // Banach Center Publ. – 2008. – **79**. – P. 119 – 129.
15. *Nath A.* Degree of approximation by matrix mean in a generalized Hölder metric // J. Orissa Math. Soc. – 2011. – **30**, № 2. – P. 81 – 92.
16. *Das G., Ray B. K., Sadangi P.* Approximation by the K^λ means of Forier series and conjugate series in the Hölder metric // J. Orissa Math. Soc. – 2011. – **30**, № 2. – P. 49 – 66.
17. *Singh T.* Degree of approximation of functions in the generalized Hölder metric // Indian J. Pure and Appl. Math. – 1992. – **40**, № 3-4. – P. 261 – 271.
18. *Singh U., Sonker S.* Degree of approximation of function $f \in H_p^{(\omega)}$ class in generalized Hölder metric by matrix means // Math. Modelling and Sci. Comput. – 2012. – **283**. – P. 1 – 10.
19. *Leindler L., Meir A., Totik V.* On approximations in Lipschitz norms // Acta math. hung. – 1985. – **45**, № 3-4. – P. 441 – 443.
20. *Теляковский С. А.* О скорости приближения функций в липшицевых нормах // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2010. – **16**, № 4. – С. 297 – 299.

21. *Gorenska M., Lesniewicz M., Rempulska L.* Strong approximation of functions in Hölder spaces // Acta Sci. Math. (Szeged). – 1993. – **58**. – P. 233 – 241.
22. *Ласурия Р. А.* Оценки группы уклонений в обобщенной гельдеровой метрике // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 9. – С. 1210 – 1217.
23. *Szal B.* On the rate of strong summability by matrix means in the generalized Hölder metric // J. Inequal. Pure and Appl. Math. – 2008. – **9**, № 1. – P. 1 – 27.
24. *Степанец А. И.* Методы теории приближений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. 1. – 427 с.
25. *Пачулиа Н. Л.* О сильной суммируемости рядов Фурье // Вопросы суммирования простых и кратных рядов Фурье. – Киев, 1987. – С. 9 – 50. – (Препринт/ АН УССР. Ин-т математики; 87.40).
26. *Родин В. А.* BMO-сильные средние рядов Фурье // Функцион. анализ и его прил. – 1989. – **23**, вып. 2. – С. 73 – 74.
27. *Тиман М. Ф.* Аппроксимация и свойства периодических функций. – Киев: Наук. думка, 2009. – 376 с.

Получено 20.08.15