УДК 511.3

А. В. Лелеченко (Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова)

ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНІ ТА ІНФІНІТАРНІ ДІЛЬНИКИ

We study several problems in the field of modified divisors; more precisely, from the theory of exponential and infinitary divisors. We analyze the behavior of modified divisors, sum-of-divisors, and totient functions. Our main results are connected with the asymptotic behavior of mean values and explicit estimates of the extremal orders.

Статья посвящена некоторым вопросам из области модифицированных делителей, а именно теории экспоненциальных и инфинитарных делителей. Изучается поведение аналогов функции делителей, функции суммы делителей и функции Эйлера. Получены новые асимптотические оценки этих функций в среднем и явные оценки их экстремальных значений.

1. Вступ. Будемо казати, що m є *експоненціальним дільником* (або *e-дільником*) числа n (позначається $m \mid^{(e)} n$), якщо $m \mid n$ та для кожного простого $p \mid n$ маємо $a \mid b$, де $p^a \,||\, m$, $p^b \,||\, n$. Це означення, введене Суббарао [18], приводить до *функції e-дільників* $\tau^{(e)}(n) = \sum_{m \mid^{(e)} n} 1$ (послідовність A049419 в OEIS [20]) та *функції суми e-дільників* $\sigma^{(e)}(n) = \sum_{m \mid^{(e)} n} m$ (послідовність A051377). Ці функції вивчалися багатьма авторами, зокрема Ву та Петерманном [17, 25].

Розглянемо множину арифметичних функцій $\mathcal{A}$, множину мультиплікативних простонезалежних функцій $\mathcal{M}_{PI}$ та такий оператор $E\colon \mathcal{A} \to \mathcal{M}_{PI}$, що $(Ef)(p^a) = f(a)$. Можна перевірити, що $\tau^{(e)} = E\tau$, але $\sigma^{(e)} \ne E\sigma$. Пункт 2 присвячено функції $E\sigma$, яка, на відміну від $\sigma^{(e)}$, раніше не розглядалася.

З іншого боку, кілька авторів, включаючи Тота [22, 24] та Петерманна [16], вивчали експоненціальний аналог функції Ейлера, побудований як $\phi^{(e)} = Ef$. Однак функція $\phi^{(e)}$ не має багатьох важливих ознак, притаманних ϕ: вона простонезалежна та $\phi^{(e)} \ll n^{\varepsilon}$. У пункті 3 ми побудуємо більш природну модифікацію функції Ейлера.

Нехай m є *унітарним дільником* n (позначається $m \mid^{*} n$), якщо $m \mid n$ та $\gcd(m, n/m) = 1$. Визначимо *біунітарні дільники:* нехай $m \mid^{**} n$, якщо $m \mid n$ та найбільший спільний унітарний дільник m та n/m дорівнює 1. Визначимо *триунітарні дільники:* нехай $m \mid^{***} n$, якщо $m \mid n$ та найбільший спільний біунітарний дільник m та n/m дорівнює 1, і т. д. Коен [1] показав, що цей процес збігається до множини так званих *інфінітарних дільників* (або ∞-дільників): $m \mid^{\infty} n$, якщо $m \mid n$ та для кожного $p \mid n$, $p^a \,||\, m$, $p^b \,||\, n$ двійковий запис a має нулі в усіх позиціях, в яких їх має b. Це одразу дає нам функцію ∞-дільників τ^{∞} (послідовність A037445) та функцію суми ∞-дільників σ^{∞} (послідовність A049417).

Нещодавно Мінкулете та Тот [15] означили та вивчили експоненціальний аналог унітарних дільників. Введемо e-∞-дільники: нехай $m \mid^{(e)\infty} n$, якщо $m \mid n$ та для кожного $p \mid n$, $p^a \,||\, m$, $p^b \,||\, n$ маємо $a \mid^{\infty} b$. В пункті 4 ми покращуємо оцінку для $\sum_{n \le x} \tau^{\infty}(n)$ Коена та Хагіса [2] та коротко розглядаємо $\tau^{(e)\infty}$. Пункт 5 присвячено e-∞-досконалим числам: $\sigma^{(e)\infty}(n) = 2n$.

Літерою p позначають просте число. Запис $p^a \,||\, n$ означає, що $p^a \mid n$, але $p^{a+1} \nmid n$.

Ми позначаємо згортку Діріхле через $f \star g$: $(f \star g)(n) = \sum_{d \mid n} f(d) g(n/d)$.

В асимптотичних співвідношеннях символи $\sim$, $\asymp$, символи Ландау O та o, символи Виноградова $\ll$ та $\gg$ використовуються в їх звичайному значенні. Всі асимптотичні співвідношення записані для аргументу (зазвичай x), що прямує до нескінченності.

Літера γ позначає константу Ейлера – Маскероні. Скрізь $\varepsilon > 0$ є довільно малим числом, яке може бути різним навіть у рамках одного й того ж рівняння.

Як завжди, $\zeta(s)$ — дзета-функція Рімана. Дійсна та уявна компоненти комплексного s позначаються через $\sigma := \Re s$ та $t := \Im s$, тобто $s = \sigma + it$.

Ми скорочуємо $\operatorname{llog} := \log \circ \log$, $\operatorname{lllog} := \log \circ \log \circ \log x$, де $\log x$ позначає натуральний логарифм.

Нехай τ — функція дільників, $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$. Позначимо

$$\tau(a_1, \ldots, a_k; n) = \sum_{d_1^{a_1} \cdots d_k^{a_k} = n} 1$$

та $\tau_k = \tau(\underbrace{1, \ldots, 1}_{k \text{ разів}}; \cdot)$. Тоді $\tau \equiv \tau_2 \equiv \tau(1, 1; \cdot)$.

Далі, позначимо через $\Delta(a_1, \ldots, a_k; x)$ залишковий член в асимптотичній оцінці для $\sum_{n \le x} \tau(a_1, \ldots, a_k; n)$. Щодо форми головного члена див. [11]. Для стислості будемо писати $\Delta_k(x) = \Delta(\underbrace{1, \ldots, 1}_{k \text{ разів}}; x)$.

Нарешті, $\theta(a_1, \ldots, a_k)$ позначає таке дійсне число, що $\Delta(a_1, \ldots, a_k; x) \ll x^{\theta(a_1, \ldots, a_k) + \varepsilon}$, а θ_k є скороченням для $\theta(\underbrace{1, \ldots, 1}_{k \text{ разів}})$.

2. Значення $E\sigma$.

Теорема 1. *Має місце така оцінка максимального порядку функції $E\sigma$:*

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{\log E\sigma(n) \operatorname{llog} n}{\log n} = \frac{\log 3}{2}. \tag{1}$$

Доведення. Теорема Сур'янараяни та Сіти Рами Чандри Рао [19] показує, що

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{\log E\sigma(n) \operatorname{llog} n}{\log n} = \sup_{n \ge 1} \frac{\log \sigma(n)}{n}.$$

Розіб'ємо супремум на дві частини: для малих n маємо

$$\max_{n \le 6} \bigl(\log \sigma(n)\bigr)/n = \bigl(\log \sigma(2)\bigr)/2 = (\log 3)/2,$$

а для $n > 6$ застосуємо оцінку Івіча [7]

$$\sigma(n) < 2{,}59\, n \operatorname{llog} n, \tag{2}$$

щоб отримати

$$\frac{\log\sigma(n)}{n} < \frac{\log 2{,}59 + \log n + \mathrm{lllog}\, n}{n} := f(n),$$

де f — спадна функція при $n > 6$ та $f(7) < (\log 3)/2$. Таким чином,

$$\sup_{n\ge 1} \frac{\log\sigma(n)}{n} = \frac{\log 3}{2}.$$

Теорему 1 доведено.

Рівняння (1) показує, що $E\sigma(n) \ll n^{\varepsilon}$.

Теорема 2. *Для суматорної функції від $E\sigma$ виконується асимптотична оцінка*

$$\sum_{n\le x} E\sigma(n) = C_1 x + (C_2 \log x + C_3)x^{1/2} + C_4 x^{1/3} + E(x), \tag{3}$$

де $C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4$ — обчислювані константи та $x^{1/5} \ll E(x) \ll x^{1153/3613+\varepsilon}$.

Доведення. Нехай $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} E\sigma(n) n^{-s}$. Використовуючи (2), маємо

$$F(s) = \prod_p \sum_{a=0}^{\infty} E\sigma(p^a)p^{-as} = \prod_p \left(1 + \sum_{a=1}^{\infty} \sigma(a)p^{-as}\right) =$$

$$= \prod_p \left(1 + p^{-s} + 3p^{-2s} + 4p^{-3s} + 7p^{-4s} + O(p^{\varepsilon-5s})\right) =$$

$$= \prod_p \frac{1 + O(p^{\varepsilon-5s})}{(1-p^{-s})(1-p^{-2s})^2(1-p^{-3s})},$$

отже,

$$F(s) = \zeta(s)\zeta^2(2s)\zeta(3s)H(s), \tag{4}$$

де ряд $H(s)$ збігається абсолютно при $\sigma > 1/5$.

Рівняння (4) показує, що $E\sigma = \tau(1,2,2,3;\cdot) \star h$, де $\sum_{n\le x} |h(n)| \ll x^{1/5+\varepsilon}$. Використовуючи результат Кретцеля [12] (теорема 3) разом с результатом Хакслі [6] щодо експонентної пари $k = 32/205 + \varepsilon,\ l = k + 1/2$, отримуємо $\sum_{n\le x} \tau(1,2,2,3;n) = B_1 x + (B_2 \log x + B_3)x^{1/2} + B_4 x^{1/3} + O(x^{1153/3613+\varepsilon})$ для деяких обчислюваних констант $B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4$. Тепер стандартний метод згортки посвідчує (3) та верхню оцінку $E(x)$. Оцінка $E(x)$ знизу випливає з теореми Кюхлейтнера й Новака [14].

Теорему 2 доведено.

Теорема 3. *Для квадрата $E\sigma$ виконується асимптотична оцінка*

$$\sum_{n\le x} (E\sigma(n))^2 = Dx + P_7(\log x)x^{1/2} + E(x),$$

де D — обчислювана константа, а P_7 — поліномом з $\deg P = 7$ і $x^{4/17} \ll E(x) \ll x^{8/19+\varepsilon}$.

Доведення. Маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty}(E\sigma(n))^2 n^{-s} = \prod_p \left(1 + \sum_{a=1}^{\infty}(\sigma(a))^2 p^{-as}\right) = \prod_p \left(1 + p^{-s} + 9p^{-2s} + O(p^{\varepsilon-3s})\right) =$$

$$= \prod_p \frac{1 + O(p^{\varepsilon-3s})}{(1-p^{-s})(1-p^{-2s})^8} = \zeta(s)\zeta^8(2s)G(s),$$

де ряд $G(s)$ збігається абсолютно при $\sigma > 1/3$.

Ω-оцінка залишкового члена $E(x)$ випливає знову з [14]. Щоб отримати $E(x) \ll x^{8/19}$, використаємо теорему 6.8 з [11], яка дає $\theta(1,2,2,2,2,2,2,2,2) \le 1/(1+2-\theta_8) \le 8/19$. Тут ми скористалися оцінкою Хіз-Брауна $\theta_8 \le 5/8$ [21, с. 325].

3. Значення $\mathfrak{f}^{(e)}$. Для звичайної функції Мебіуса μ, тотожної функції id та одиничної функції $\mathbf{1}$ маємо

$$\tau = \mathbf{1} \star \mathbf{1}, \qquad \mathrm{id} = \mathbf{1} \star \mu, \qquad \sigma = \mathbf{1} \star \mathrm{id}\,.$$

Суббарао [18] увів таку експоненціальну згортку $\odot$, що для мультиплікативних f та g їхня згортка $f \odot g$ також є мультиплікативною функцією і

$$(f \odot g)(p^a) = \sum_{d|a} f(p^d) g(p^{a/d}). \tag{5}$$

Для функції $\mu^{(e)} = E\mu$ та вказаних у пункті 1 функцій $\tau^{(e)}$ і $\sigma^{(e)}$ маємо

$$\tau^{(e)} = \mathbf{1} \odot \mathbf{1}, \qquad \mathrm{id} = \mathbf{1} \odot \mu^{(e)}, \qquad \sigma^{(e)} = \mathbf{1} \odot \mathrm{id}\,.$$

Це приводить нас до природного означення $\mathfrak{f}^{(e)} = \mu^{(e)} \odot \mathrm{id}$ (пор. зі звичайним $\phi = \mu \star \mathrm{id}$). Тоді згідно з означенням (5)

$$\mathfrak{f}^{(e)}(p^a) = \sum_{d|a} \mu(a/d) p^d.$$

Наведемо кілька перших значень $\mathfrak{f}^{(e)}$ на степенях простих чисел:

a	1	2	3	4	5
$\mathfrak{f}^{(e)}(p^a)$	p	p^2-p	p^3-p	p^4-p^2	p^5-p

Зазначимо, що $\mathfrak{f}^{(e)}(n)/n$ залежить лише від квадратноповної частини n. Вочевидь

$$\limsup_{n\to\infty} \mathfrak{f}^{(e)}(n)/n = 1.$$

Тому, використовуючи формулу Мертенса, можна отримати (пор. з теоремою 328 [5])

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\mathfrak{f}^{(e)}(n)\,\mathrm{llog}\, n}{n} = e^{-\gamma}.$$

Доведемо явний результат щодо максимального порядку $\mathfrak{f}^{(e)}$.

Теорема 4. *Для будь-якого $n > 44100$*

$$\frac{\mathfrak{f}^{(e)}(n)\,\mathrm{llog}\, n}{n} \ge Ce^{-\gamma}, \qquad C = 0{,}993957. \tag{6}$$

Доведення. Позначимо для стислості $f(n) = \mathfrak{f}^{(e)}(n) \operatorname{llog} n / n$.

Нехай функція $s(n)$ підраховує прості числа, квадрати яких є дільниками n: $s(n) = \sum_{p^2 \mid n} 1$. Нехай p_k позначає k-е просте: $p_1 = 2$, $p_2 = 3$ і т. д. Можна перевірити, що $f(n) \le f\left(\prod_{p \le p_{s(n)}} p^2\right)$.

Ми покажемо, що нерівність (6) має місце для будь-якого $n = \prod_{p \le x} p^2$, де $x \ge 11$. На таких числах маємо

$$f(n) = \prod_{p \le x} (1 - p^{-1}) \log \left(2 \sum_{p \le x} \log p \right),$$

і наша задача полягає в оцінюванні правої частини знизу. Дусарт [3] довів, що для $x \ge x_0 = 10\,544\,111$

$$\sum_{p \le x} p^{-1} \le \operatorname{llog} x + B + \frac{1}{10 \log^2 x} + \frac{4}{15 \log^3 x}, \tag{7}$$

$$\sum_{p \le x} \log p \ge x \left(1 - \frac{0{,}006788}{\log x} \right). \tag{8}$$

Тепер, оскільки $\exp(-y - y^2/2 - cy^3) \le 1 - y$ для $0 \le y \le 1/2$ і $c = 8 \log 2 - 5$,

$$\prod_{p \le x} (1 - p^{-1}) \ge \prod_{p \le x} \exp(-p^{-1} - p^{-2}/2 - cp^{-3}) \ge$$

$$\ge \left(\prod_{p} \exp(-p^{-2}/2 - cp^{-3}) \right) \prod_{p \le x} \exp(-p^{-1}) =: C_1 \prod_{p \le x} \exp(-p^{-1}),$$

де $C_1 = 0{,}725132$. З (7) для $x \ge x_0$ випливає

$$\prod_{p \le x} \exp(-p^{-1}) = \exp\left(-\sum_{p \le x} p^{-1} \right) \ge \log^{-1} x \exp\left(-B - \frac{1}{10 \log^2 x} - \frac{4}{15 \log^3 x} \right) \ge$$

$$\ge \log^{-1} x \exp\left(-B - \frac{1}{10 \log^2 x_0} - \frac{4}{15 \log^3 x_0} \right) =: C_2 \log^{-1} x,$$

де $C_2 = 0{,}769606$. Згідно з (8) для $x \ge x_0$

$$\log \left(2 \sum_{p \le x} \log p \right) \ge \log \left(2x \left(1 - \frac{0{,}006788}{\log x} \right) \right) \ge \log x.$$

Отже, за умов $x \ge x_0$, $n = \prod_{p \le x} p^2$ маємо

$$f(n) \ge C_1 C_2 = 0{,}993957 e^{-\gamma}. \tag{9}$$

Обчислення показують, що насправді (9) має місце для $p_5 = 11 \le x < x_0$ і $n = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7)^2 = 44100$ є найбільшим винятком форми $\prod_{p \le x} p^2$.

Для завершення доведення достатньо показати, що теорема виконується для кожного $n > > 44100$ з $s(n) \le 4$. По-перше, можна перевірити, що єдиними квадратноповними k, для яких $f(k) \ge Ce^{-\gamma}$ і $s(k) \le 4$, є 4, 8, 9, 36, 900, 44100. По-друге, нехай $n = kl$, де $k > 1$ позначає квадратноповну частину, а l — квадратновільну частину, $\gcd(k,l) = 1$. Тоді

$$f(n) = \frac{\mathfrak{f}^{(e)}(k) \operatorname{llog} k}{k} \frac{\mathfrak{f}^{(e)}(l)}{l} \frac{\operatorname{llog} kl}{\operatorname{llog} k} \ge \frac{2 \operatorname{llog} 4}{4} \frac{\operatorname{llog} 4l}{\operatorname{llog} 4} = \frac{\operatorname{llog} 4l}{2}.$$

Ця нерівність показує, що якщо $f(n) \le Ce^{-\gamma}$, то $\operatorname{llog} 4l \le 2Ce^{-\gamma}$, тобто $l \le 5$.

Таким чином, повний список підозрілих чисел має вигляд

$$\bigl\{kl \mid k \in (4, 8, 9, 36, 900, 44100), l \in \{1, 2, 3, 5\}, \gcd(k,l) = 1\bigr\}$$

і всі вони менші або дорівнюють 44100.

Теорема 5. *Має місце така оцінка суматорної функції від* $\mathfrak{f}^{(e)}$:

$$\sum_{n \le x} \mathfrak{f}^{(e)}(n) = Cx^2 + O(x \log^{5/3} x),$$

де C *— обчислювана константа.*

Доведення. Нехай s — таке комплексне число, що $\sigma > 4/5$. Для $a \ge 4$ маємо $\mathfrak{f}^{(e)}(p^a) = = p^a + O(p^{a/2})$ і $\sum_{a=4}^{\infty} p^{a/2-4a/5} = \sum_{a=4}^{\infty} p^{-3a/10} \ll p^{-12/10} \ll p^{-1}$. Звідси

$$\mathfrak{F}(p) := \sum_{a=0}^{\infty} \mathfrak{f}^{(e)}(p^a) p^{-as} = 1 + p^{1-s} + (p^{2-2s} - p^{1-2s}) + (p^{3-3s} - p^{1-3s}) + \sum_{a=4}^{\infty} p^{a-as} + O(p^{-1}).$$

Тоді

$$(1 - p^{1-s})\mathfrak{F}(p) = 1 - p^{1-2s} + p^{2-3s} - p^{1-3s} + p^{2-4s} + O(p^{-1}) = 1 - p^{1-2s} + p^{2-3s} + O(p^{-1})$$

і

$$\frac{(1 - p^{1-s})(1 - p^{2-3s})}{1 - p^{1-2s}} \mathfrak{F}(p) = 1 + O(p^{-1}).$$

Перемножаючи по p, отримуємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{f}^{(e)}(n) n^{-s} = \prod_p \mathfrak{F}(p) = \frac{\zeta(s-1)\zeta(3s-2)}{\zeta(2s-1)} G(s),$$

де $G(s)$ збігається абсолютно при $\sigma > 4/5$. Це означає, що $\mathfrak{f}^{(e)} = z \star g$, де

$$z(n) = \sum_{n_1 n_2^2 n_3^3 = n} n_1 \mu(n_2) n_2 n_3^2$$

і $\sum_{n \le x} |g(n)| \ll x^{4/5+\varepsilon}$.

Згідно з теоремою 1 [17] маємо $\sum_{n_1 n_3^3 \le y} n_1 n_3^2 = y^2 \zeta(4)/2 + O(y \log^{2/3} y)$, тож

$$\sum_{n \le x} z(n) = \sum_{n_2 \le x^{1/2}} \mu(n_2) n_2 \left(\frac{\zeta(4)}{2} \frac{x^2}{n_2^4} + O\left(\frac{x}{n_2^2} \log^{2/3} x \right) \right) = \frac{\zeta(4)}{2\zeta(3)} x^2 + O(x \log^{5/3} x).$$

Стандартний метод згортки завершує доведення теореми 5.

4. Значення $\boldsymbol{\tau^\infty}$ та $\boldsymbol{\tau^{(e)\infty}}$. Зазначимо, що $\tau^\infty(p) = \tau^\infty(p^2) = \tau^\infty(p^4) = 2$, $\tau^\infty(p^3) = \tau^\infty(p^5) = 4$ і взагалі

$$\tau^\infty(p^a) = 2^{u(a)}, \tag{10}$$

де $u(a)$ дорівнює числу одиниць у двійковому записі a. Таким чином, $\tau^\infty(p^a) \le a+1$ і $\tau^\infty(n) \ll n^\varepsilon$.

Теорема 6. *Для суматорної функції від τ^∞ маємо*

$$\sum_{n \le x} \tau^\infty(n) = (D_1 \log x + D_2)x + E(x),$$

де D_1, D_2 — обчислювані константи. У безумовному випадку

$$E(x) \ll x^{1/2} \exp(-A \log^{3/5} x \operatorname{llog}^{-1/5} x), \qquad A > 0,$$

а за умови чинності гіпотези Рімана $E(x) \ll x^{5/11+\varepsilon}$.

Доведення. Перетворимо ряд Діріхле для τ^∞ на добуток дзета-функцій:

$$\sum_{n=1}^\infty \tau^\infty(n) n^{-s} = \prod_p \sum_{a=0}^\infty \tau^\infty(p^a) p^{-as} = \prod_p \bigl(1 + 2p^{-s} + 2p^{-2s} + 4p^{-3s} + O(p^{\varepsilon-4s})\bigr) =$$

$$= \prod_p \frac{\bigl(1 + O(p^{\varepsilon-4s})\bigr)(1 - p^{-2s})}{(1 - p^{-s})^2 (1 - p^{-3s})^2} = \frac{\zeta^2(s)\zeta^2(3s)}{\zeta(2s)} G(s),$$

де ряд $G(s)$ збігається абсолютно при $\sigma > 1/4$.

З теореми 6.8 [11] разом з оцінкою $\theta_2 < 131/416 + \varepsilon$ з [6] випливає

$$\sum_{n \le x} \tau(1,1,3,3;n) = (C_1 \log x + C_2) + (C_3 \log x + C_4) x^{1/3} + O(x^{547/1664+\varepsilon}).$$

Твердження теореми тепер можна отримати як наслідок теореми Івіча з [8] (теорема 2). На жаль, член $(C_3 \log x + C_4) x^{1/3}$ буде поглинений залишковим членом.

Теорему 6 доведено.

Теорема 7. *Для квадрата τ^∞ виконується оцінка*

$$\sum_{n \le x} \bigl(\tau^\infty(n)\bigr)^2 = P_3(\log x) x + O(x^{1/2} \log^9 x), \tag{11}$$

де P_3 — поліном, $\deg P_3 = 3$.

Доведення. Маємо $\bigl(\tau^\infty(p)\bigr)^2 = \bigl(\tau^\infty(p^2)\bigr)^2 = 4$, тому

$$F(s) := \sum_{n=1}^\infty \bigl(\tau^\infty(n)\bigr)^2 n^{-s} = \frac{\zeta^4(s)}{\zeta^6(2s)} H(s),$$

де ряд $H(s)$ абсолютно збігається при $\sigma > 1/3$.

Згідно з формулою Перрона при $c := 1 + 1/\log x$, $\log T \asymp \log x$ маємо

$$\sum_{n\le x}\bigl(\tau^{\infty}(n)\bigr)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-iT}^{c+iT} F(s)x^s s^{-1}ds + O(x^{1+\varepsilon}T^{-1}).$$

Зрушуючи контур до $[1/2-iT, 1/2+iT]$, отримуємо

$$\sum_{n\le x}\bigl(\tau^{\infty}(n)\bigr)^2 = \operatorname*{res}_{s=1} F(s)\ \ x^s\ \ s^{-1} + O(I_0 + I_- + I_+ + x^{1+\varepsilon}T^{-1}),$$

де

$$I_0 := \int\limits_{1/2-iT}^{1/2+iT} F(s)x^s s^{-1}ds, \qquad I_{\pm} := \int\limits_{1/2\pm iT}^{c\pm iT} F(s)x^s s^{-1}ds.$$

Функція $F(s)x^s s^{-1}$ має полюс четвертого порядку в $s=1$, отже, $\operatorname{res}_{s=1} F(s)x^s s^{-1}$ має вигляд $P_3(\log x)x$. Оцінимо залишковий член.

Виберемо $T = x^{3/4}$. По-перше,

$$I_+ \ll T^{-1}\int\limits_{1/2}^{c} \frac{\zeta^4(\sigma+iT)}{\zeta^6(2\sigma+2iT)}x^{\sigma}\,d\sigma.$$

Використовуючи класичні оцінки $\zeta(\sigma+iT) \ll T^{(1-\sigma)/3}$ для $\sigma\in[1/2,1)$ та $\zeta(\sigma+iT)\ll T^{\varepsilon}$ для $s\ne\sigma\ge 1$, отримуємо $I_+ \ll x^{1/4+\varepsilon}$. Те саме має місце і для I_-.

По-друге, враховуючи оцінки $\zeta^{-1}(1+it)\ll \log^{2/3} t$ та $\int_1^T \zeta(1/2+it)^2 t^{-1}dt \ll \log^5 T$ (див. [9] або [21]), маємо

$$I_0 \ll x^{1/2}\int\limits_{1}^{T}\frac{\zeta^4(1/2+it)}{\zeta^6(1+2it)}\frac{dt}{t} \ll x^{1/2}\log^9 T. \tag{12}$$

Теорему 7 доведено.

Нещодавно Джіа й Санкаранараянан [10] довели, що

$$\int\limits_{1}^{T}\frac{\zeta^4(1/2+it)}{\zeta^k(1+2it)}dt \ll T\log^4 T.$$

Отже, підсумовуючи інтеграли за інтервалами $[2^n, 2^{n+1}]$ для $n = 0,\ldots,\lfloor\log_2 T\rfloor$, одержуємо

$$\int\limits_{1}^{T}\frac{\zeta^4(1/2+it)}{\zeta^k(1+2it)}\frac{dt}{t} \ll \log^5 T.$$

Таким чином, замість (12) отримуємо $I_0 \ll x^{1/2}\log^5 x$, що дає кращу оцінку залишкового члена в (11).

Функція $E\tau^{\infty}$ має ряд Діріхле $\zeta(s)\zeta(2s)\zeta^{-1}(4s)H(s)$, де $H(s)$ збігається абсолютно за умови $\sigma > 1/5$. Функція $E\tau^{\infty}$ дуже схожа на функцію $t^{(e)}$, що вивчалася Тотом [23] та Петерманном [16]. Останній отримав залишковий член $O(x^{1/4})$ в асимптотичній оцінці $\sum_{n\le x} t^{(e)}$; такий же результат має місце і для $E\tau^{\infty}$.

Ряд Діріхле для $\bigl(E\tau^{\infty}(n)\bigr)^2$ дуже схожий на ряд для $\bigl(\tau^{(e)}(n)\bigr)^2$: обидва вони дорівнюють $\zeta(s)\zeta^3(2s)H(s)$, де $H(s)$ збігається абсолютно при $\sigma > 1/3$. Кретцель [13] довів, що асимптотичний розклад $\sum_{n\le x}\bigl(\tau^{(e)}(n)\bigr)^2$ має залишковий член $O(x^{10/31})$; те ж саме виконується і для $\bigl(E\tau^{\infty}(n)\bigr)^2$.

5. Е-∞-досконалі числа. Нехай $\sigma^{(e)\infty}$ — *функція суми е-∞-дільників,* означення яких було наведене в пункті 1. Будемо казати, що число n є е-∞-досконалим, якщо $\sigma^{(e)\infty}(n) = 2n$. Оскільки $\sigma^{(e)\infty}(n)/n$ залежить лише від квадратноповної частини n, далі розглядатимемо лише квадратноповні n. Наступні числа є е-∞-досконалими:

$$36, 2700, 1800, 4769\,856, 357\,739\,200, 238\,492\,800, 54\,531\,590\,400,$$

$$1307\,484\,087\,615\,221\,689\,700\,651\,798\,824\,550\,400\,000.$$

Всі вони є також е-досконалими, тобто $\sigma^{(e)}(n) = 2n$. Нам невідомо, чи існують е-∞-досконалі, але не е-досконалі числа.

Рівняння (10) приводить до того, що $\tau^{\infty}(n)$ є парним для $n \ne 1$. Тому при $p > 2$ та $a > 1$ значення $\sigma^{(e)\infty}(p^a)$ є сумою парної кількості непарних доданків і тому є парним числом. Таким чином, якщо n непарне і $\sigma^{(e)\infty}(n) = 2n$, то $n = p^a$, $p > 2$. Але, мабуть, $\sigma^{(e)\infty}(p^a) \le \sigma(p^a) < < 2p^a$. Як висновок, всі е-$\infty$-досконалі числа є парними.

Чи існують е-∞-досконалі числа, які не діляться на 3? Для е-досконалих чисел Фабриковські й Суббарао [4] отримали, що якщо $\sigma^{(e)}(n) = 2n$ та $3 \nmid n$, то $n > 10^{664}$. Ми покажемо, що у випадку е-∞-досконалих чисел можна отримати навіть кращу оцінку.

Лема 1. *Мають місце такі явні верхні оцінки функції* $\sigma^{(e)\infty}$:

$$\frac{\sigma^{(e)\infty}(p^a)}{p^a} \le 1 + 2p^{-a/2} \quad \text{для} \quad a \ge 6, \tag{13}$$

$$\frac{\sigma^{(e)\infty}(p^a)}{p^a} \le 1 + \ p^{-2} \quad \text{для} \quad a \ge 3. \tag{14}$$

Доведення. Для $a \ge 6$ усі невласні дільники a менші або дорівнюють $a/2$, тому

$$\sigma^{(e)\infty}(p^a) \le p^a + \sum_{b=1}^{a/2} p^b \le p^a + p(p^{a/2}-1)/(p-1) \le p^a + 2p^{a/2}.$$

Звідси випливає (13). Нерівність (14) можна безпосередньо перевірити для $a = 3, 4, 5,$ і вона є наслідком (13) при $a \ge 6$.

Лема 2. *Нехай* $b(t) := \max_{\tau \ge t} \sigma^{(e)\infty}(2^\tau)2^{-\tau}$ *— допоміжна функція. Тоді*

$$b(t) \le \begin{cases} 3/2, & t \le 2, \\ 5/4, & t = 3, \\ 39/32, & 3 < t \le 6, \\ 1 + 2^{1-t/2}, & t > 6. \end{cases} \tag{15}$$

Доведення випливає з (13) та безпосередніх обчислень: $\sigma^{(e)\infty}(2^3) = 10$, $\sigma^{(e)\infty}(2^6) = 78$.

Теорема 8. *Якщо n є e-∞-досконалим і $3 \nmid n$, то $n > 1{,}35 \cdot 10^{816}$.*

Доведення. Насправді ми встановимо нижню оцінку таких квадратноповних n, що для $u/v = \sigma^{(e)\infty}(n)/n$, $\gcd(u,v) = 1$, маємо

$$3 \nmid u, \quad 3 \nmid v, \tag{16}$$

$$2 \mid u, \quad 4 \nmid u, \quad 2 \nmid v, \tag{17}$$

$$u/v \geq 2. \tag{18}$$

Якщо ці умови не виконуються, то n або не є e-∞-досконалим, або $3 \mid n$.

Нехай

$$n = 2^t \prod_{p \in P} p^2 \prod_{q \in Q} q^{a_q}, \qquad t \geq 1, \qquad a_q \geq 3,$$

де множини P та Q складаються з простих чисел, які більші або дорівнюють 5, і $P \cap Q = \varnothing$. Тоді

$$\frac{u}{v} = \frac{\sigma^{(e)\infty}(n)}{n} = \frac{\sigma^{(e)\infty}(2^t)}{2^t} \prod_{p \in P} \frac{p+1}{p} \prod_{q \in Q} \frac{\sigma^{(e)\infty}(q^{a_q})}{q^{a_q}}.$$

З (16) випливає, що всі $p \in P$ мають вигляд $p = 6k + 1$. Розіб'ємо P на три множини:

$$P_8 = \{p \in P \mid p + 1 \equiv 0 \pmod 8\}, \quad P_4 = \{p \in P \mid p + 1 \equiv 4 \pmod 8\}, \quad P_2 = P \setminus P_4 \setminus P_8.$$

Позначимо $t_2 = |P_2|$, $t_4 = |P_4|$, $t_8 = |P_8|$. Тоді умова (17) приводить до того, що $t \geq t_2 + 2t_4 + 3t_8 + |Q| + 1$. Тепер використаємо (18), щоб отримати

$$2 \leq \frac{u}{v} \leq b(t_2 + 2t_4 + 3t_8 + |Q| + 1) \prod_{p \in P} (1 + p^{-1}) \prod_{p \in Q} (1 + q^{-2}) =$$

$$= b(t_2 + 2t_4 + 3t_8 + |Q| + 1) \prod_{p \in P} \frac{1 + p^{-1}}{1 + p^{-2}} \prod_{q \in P \cup Q} (1 + q^{-2}).$$

Але

$$\prod_{q \in P \cup Q} (1 + q^{-2}) \leq \frac{\prod_q (1 + q^{-2})}{(1 + 2^{-2})(1 + 3^{-2})} = \frac{\zeta(2)/\zeta(4)}{25/18} = \frac{54}{5\pi^2}, \tag{19}$$

отже, маємо

$$\frac{10\pi^2}{54} \leq b(t_2 + 2t_4 + 3t_8 + 1) \prod_{p \in P} \frac{1 + p^{-1}}{1 + p^{-2}}.$$

Позначимо $f(p) = (1 + p^{-1})/(1 + p^{-2})$. Оскільки f є спадною, то оцінимо

$$\prod_{p \in P} f(p) = \prod_{\substack{j \in \{2,4,8\} \\ p \in P_j}} f(p) \leq \prod_{k=1}^{t_2} f(p_{2,k}) \prod_{k=1}^{t_4} f(p_{4,k}) \prod_{k=1}^{t_8} f(p_{8,k}),$$

де p_2 — послідовність таких послідовних простих чисел, що $p_{2,k} \equiv 1 \pmod 6$ і $p_{2,k} + 1 \not\equiv 0 \pmod 4$; p_4 — послідовність таких послідовних простих чисел, що $p_{4,k} \equiv 1 \pmod 6$, але $p_{4,k} + 1 \equiv 4 \pmod 8$, і, нарешті, p_8 є такою, що $p_{8,k} \equiv 1 \pmod 6$, $p_{8,k} + 1 \equiv 0 \pmod 8$.

Тепер умови (16) – (18) можна записати у вигляді

$$n \geq \min_{t_2,t_4,t_8} \left\{ 2^{t_2+2t_4+3t_8+1} \prod_{j\in\{2,4,8\}} \prod_{k=1}^{t_j} p_{j,k}^2 \;\middle|\; \frac{10\pi^2}{54} \leq b(t_2+2t_4+3t_8+1) \prod_{j\in\{2,4,8\}} \prod_{k=1}^{t_j} \frac{1+p_{j,k}^{-1}}{1+p_{j,k}^{-2}} \right\}.$$

Ця екстремальна задача може бути розв’язана чисельно з використанням (15):

$$t_2 = 70, \quad t_4 = 32, \quad t_8 = 31, \quad n > 8{,}49 \cdot 10^{801}.$$

Ми можемо використати множники n, що знаходяться у $\prod_{q\in Q} q^{a_q}$, щоб додатково покращити отриману оцінку. Припустимо, що хоча б одне з простих 5, 11, 17, 23 (всі вигляду $6k-1$) не входить в Q. Тоді замість (19) отримаємо

$$\prod_{q\in P\cup Q} (1+q^{-2}) \leq \frac{54}{5\pi^2(1+23^{-2})}.$$

Із вищевказаних аргументів також випливає, що у цьому випадку $n > 3 \cdot 10^{823}$. З іншого боку, якщо 5, 11, 17 та 23 одночасно містяться в Q, то маємо $n > (8{,}49 \cdot 10^{801}) \cdot (5 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 23)^3 \cdot 2^4 > > 1{,}35 \cdot 10^{816}$.

Теорему 8 доведено.

Література

1. *Cohen G. L.* On an integer’s infinitary divisors // Math. Comput. – 1990. – **54**, № 189. – P. 395 – 411.
2. *Cohen G. L., Hagis Jr. P.* Arithmetic functions associated with the infinitary divisors of an integer // Int. J. Math. and Math. Sci. – 1993. – **16**, № 2. – P. 373 – 383.
3. *Dusart P.* Inegalites explicites pour $\psi(X)$, $\theta(X)$, $\pi(X)$ et les nombres premiers // C. R. Math. Acad. Sci., Soc. Roy. Can. – 1999. – **21**, № 2. – P. 53 – 59.
4. *Fabrykowski J., Subbarao M. V.* On e-perfect numbers not divisible by 3 // Nieuw arch. wisk. – 1986. – **4**. – P. 165 – 173.
5. *Hardy G. H., Wright E. M.* An introduction to the theory of numbers. – New York: Oxford Univ. Press, 2008. – xxi+635 p.
6. *Huxley M. N.* Exponential sums and the Riemann zeta function V // Proc. London Math. Soc. – 2005. – **90**, № 1. – P. 1 – 41.
7. *Ivić A.* Two inequalities for the sum of divisors functions // Zb. Rad., Prir.-Mat. Fak., Univ. Novom Sadu. – 1977. – **7**. – P. 17 – 22.
8. *Ivić A.* A convolution theorem with applications to some divisor functions // Publ. Inst. Math. Nouv. Ser. – 1978. – **24**, № 38. – P. 67 – 78.
9. *Ivić A.* The Riemann zeta-function: theory and applications. – Mineola; New York: Dover Publ., 2003. – 562 p.
10. *Jia C., Sankaranarayanan A.* The mean square of divisor function. – 2014. – URL: http://arxiv.org/pdf/1311.4041v2.
11. *Krätzel E.* Lattice points. – Dordrecht: Kluwer, 1988. – 436 p.
12. *Krätzel E.* Estimates in the general divisor problem // Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg. – 1992. – **62**, № 1. – P. 191 – 206.
13. *Krätzel E.* New estimates in the four-dimensional divisor problem with applications // Acta Math. hung. – 2010. – **126**, № 3. – P. 258 – 278.
14. *Kühleitner M., Nowak W. G.* An omega theorem for a class of arithmetic functions // Math. Nachr. – 1994. – **165**, № 1. – P. 79 – 98.
15. *Minculete N., Tóth L.* Exponential unitary divisors // Ann. Univ. sci. budapest. Sec. comput. – 2011. – **35**. – P. 205 – 216.

16. *Pétermann Y.-F. S.* Arithmetical functions involving exponential divisors: Note on two papers by L. Tóth // Ann. Univ. sci. budapest. Sec. comput. – 2010. – **32**. – P. 143 – 149.
17. *Pétermann Y.-F. S., Wu J.* On the sum of exponential divisors of an integer // Acta Math. hung. – 1997. – **77**, № 1-2. – P. 159 – 175.
18. *Subbarao M. V.* On some arithmetic convolutions // Theory of Arithmetical Functions: Proc. Conf. Western Mich. Univ., April 29 – May 1, 1971. – Berlin: Springer-Verlag, 1972. – P. 247 – 271.
19. *Suryanarayana D., Sita Rama Chandra Rao R.* On the true maximum order of a class of arithmetic functions // Math. J. Okayama Univ. – 1975. – **17**. – P. 95 – 101.
20. *The on-line* encyclopedia of integer sequences / Ed. by N. J. A. Sloane. – URL: http://oeis.org.
21. *Titchmarsh E. C.* The theory of the Riemann zeta-function. – New York: Oxford Univ. Press, 1986. – 418 p.
22. *Tóth L.* On certain arithmetic functions involving exponential divisors // Ann. Univ. sci. budapest. Sec. comput. – 2004. – **24**. – P. 285 – 294.
23. *Tóth L.* On certain arithmetic functions involving exponential divisors II // Ann. Univ. sci. budapest. Sec. comput. – 2007. – **27**. – P. 155 – 166.
24. *Tóth L.* An order result for the exponential divisor function // Publ. Math. Debrecen. – 2007. – **71,** № 1-2. – P. 165 – 171.
25. *Wu J.* Probleme de diviseurs exponentiels et entiers exponentiellement sans facteur carre // J. Theor. Nombres Bordx. – 1995. – **7**, № 1. – P. 133 – 141.

Одержано 14.06.14,
після доопрацювання — 04.12.15