УДК 517. 968

Т. К. Юлдашев (Сиб. гос. аэрокосм. ун-т, Россия)

НЕЛОКАЛЬНАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА БУССИНЕСКА С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ

We consider the problem of one-valued solvability of the mixed-value problem for a nonlinear Boussinesq type fourth-order integrodifferential equation with degenerate kernel and integral conditions. The method of degenerate kernel is developed for the case of nonlinear Boussinesq type fourth-order partial integrodifferential equation. The Fourier method of separation of variables is employed. After redenoting, the integrodifferential equation is reduced to a system of countable system of algebraic equations with nonlinear and complex right-hand side. As a result of the solution of this system of countable systems of algebraic equations and substitution of the obtained solution in the previous formula, we get a countable system of nonlinear integral equations (CSNIE). To prove the theorem on one-valued solvability of the CSNIE, we use the method of successive approximations. Further, we establish the convergence of the Fourier series to the required function of the mixed-value problem. Our results can be regarded as a subsequent development of the theory of partial integrodifferential equations with degenerate kernel.

Розглянуто питання однозначної розв'язності мішаної задачі для нелінійного інтегро-диференціального рівняння типу Буссінеска четвертого порядку з виродженим ядром та інтегральними умовами. Метод виродженого ядра розвинено для випадку нелінійного інтегро-диференціального рівняння типу Буссінеска четвертого порядку. Використано метод Фур'є відокремлення змінних. Після позначення інтегро-диференціальне рівняння зведено до системи лічильних систем алгебраїчних рівнянь (СЛСАР) з нелінійною правою частиною. Після розв'язання цієї СЛСАР і підстановки отриманого розв'язку в попередню формулу одержано лічильну систему нелінійних інтегральних рівнянь (ЛСНІР). Для доведення теореми про однозначну розв'язність ЛСНІР використано метод послідовних наближень. Крім того, показано збіжність ряду Фур'є до шуканої функції нелокальної мішаної задачі.

1. Введение. Математическое моделирование многих процессов, происходящих в реальном мире, часто приводит к изучению смешанных задач для уравнений математической физики. Представляют большой интерес с точки зрения физических приложений дифференциальные уравнения в частных производных высоких порядков. Многие задачи газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек сводятся к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков [1 – 3]. Изучению различных краевых задач для уравнений в частных производных разного порядка посвящено большое количество работ (см., например, [4 – 12]). Дифференциальные уравнения в частных производных типа Буссинеска имеют много приложений в математической физике (см., например, [13]). Метод вырожденного ядра для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных рассматривался в работах [14 – 16].

В случаях, когда граница области протекания физического процесса недоступна для измерений, в качестве дополнительной информации, достаточной для однозначной разрешимости задачи, могут использоваться условия в интегральной форме. Задачи с интегральными условиями рассмотрены во многих работах (см., например, [17 – 19]).

Изучение счетных систем нелинейных дифференциальных уравнений начинается с известной работы А. Н. Тихонова [20]. Начиная с конца 40-х годов К. П. Персидский обращается к систематическому исследованию бесконечномерных дифференциальных систем. Он получил фундаментальные результаты по общей теории счетных и бесконечных (произвольной мощности) систем дифференциальных уравнений, по теории устойчивости решений счетных систем

© Т. К. ЮЛДАШЕВ, 2016

дифференциальных уравнений, по счетным системам уравнений в частных производных, по дифференциальным уравнениям в банаховых пространствах и устойчивости их решений (см., например, [21 – 23]). О. А. Жаутыков обосновал применимость метода операционного исчисления для нахождения точного и приближенного решений бесконечных систем дифференциальных уравнений. Его результаты позволили исследовать задачи теории колебаний систем с бесконечным числом степеней свободы и решить многие проблемы бесконечных систем обыкновенных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. Не менее важные результаты он получил при исследовании устойчивости бесконечных систем на основе изучения интегральных многообразий. Им обобщен принцип сведения Ляпунова и обосновано использование преобразования Лапласа для построения решений счетных систем [24]. В монографии [25] К. Г. Валеев и О. А. Жаутыков доказали ряд теорем о существовании и единственности решений для линейных и нелинейных бесконечных систем дифференциальных уравнений, о непрерывной зависимости решений от параметра и о продолжимости решений. Кроме того, всесторонне исследовали качественные вопросы бесконечных систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Монография [26] А. М. Самойленко и Ю. В. Теплинского также посвящена исследованию однозначной разрешимости счетных систем дифференциальных уравнений и их инвариантных торов. В. Л. Мучник исследовал специальные однородные интегральные уравнения второго рода в пространстве счетно-аддитивных функций множества [27].

В работе [28] Г. И. Чандиров изучал смешанную задачу для гиперболического уравнения

$$\frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial x^2} = f(t,x,U(t,x)).$$

Решение этой задачи он искал в виде ряда Фурье. В результате была получена счетная система нелинейных интегральных уравнений (ССНИУ). Для изучения разрешимости ССНИУ он рассматривал множество

$$\big\{u(t) = \big(u_n(t)\big) | u_n(t) \in C[0;T], n = 1,2,3,\ldots\big\},$$

где операции сложения двух элементов и умножение элемента на скаляр определяются покоординатно. При этом норма имеет вид

$$\big\|u(t)\big\|_{B_2(T)} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \max_{t\in[0;T]} \big|u_n(t)\big|^2}.$$

Г. И. Чандиров доказал, что это множество является банаховым пространством, и обозначал его через $B_2(T)$.

В настоящей работе предлагается методика изучения смешанной задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения типа Буссинеска четвертого порядка с вырожденным ядром и интегральными условиями. При этом используется указанная выше норма в пространстве $B_2(T)$.

2. Постановка задачи. Итак, в области Ω рассматривается уравнение вида

$$\frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^4 U(t,x)}{\partial t^2 \partial x^2} - \mu \int\limits_0^T K(t,s) \frac{\partial^2 U(s,x)}{\partial x^2} ds =$$

$$= \eta(t) \int\limits_0^T U(\theta, x) d\theta + f\left(x, \int\limits_0^T \int\limits_0^l H(\theta, y) U(\theta, y) dy d\theta\right) \tag{1}$$

с интегральными условиями

$$U(0,x) + \int\limits_0^T \Theta_1(t) U(t,x) dt = \varphi_1(x), \qquad x \in \Omega_l, \tag{2}$$

$$U_t(0,x) + \int\limits_0^T \Theta_2(t) U(t,x) dt = \varphi_2(x), \qquad x \in \Omega_l, \tag{3}$$

и граничными условиями Бенара

$$U(t,x)\Big|_{x=0} = U(t,x)\Big|_{x=l} = 0, \tag{4}$$

где

$$\eta(t) \in C(\Omega_T), \quad f(x,\gamma) \in C(\Omega_l \times R), \quad K(t,s) = \sum_{i=1}^m a_i(t) b_i(s),$$

$$a_i(t), b_i(s) \in C(\Omega_T), \quad \Theta_k(t) \in C^2(\Omega_T), \quad \varphi_k(x) \in C^3(\Omega_l),$$

$$\varphi_k(0) = \varphi_k(l) = 0, \quad k = 1, 2, \quad \int\limits_0^T \int\limits_0^l |H(t,x)| dx dt < \infty,$$

$$\Omega \equiv \Omega_T \times \Omega_l, \quad \Omega_T \equiv [0,T], \quad \Omega_l \equiv [0,l], \quad 0 < T < \infty, \quad 0 < l < \infty,$$

μ — действительный спектральный параметр. Здесь предполагается, что функции $a_i(t)$ и $b_i(s)$ являются линейно независимыми.

Под решением смешанной задачи (1)–(4) понимаем функцию $U(t,x) \in C^{2,2}(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (1) и условиям (2)–(4).

3. Счетная система нелинейных интегральных уравнений. Решение данной задачи ищем в виде ряда Фурье

$$U(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \vartheta_n(x), \tag{5}$$

где $\vartheta_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{l}} \sin \lambda_n x,\ \lambda_n = \dfrac{n\pi}{l},\ n = 1, 2, \ldots$.

По предположению

$$f(x,\gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\gamma) \vartheta_n(x), \tag{6}$$

где

$$f_n(\gamma) = \int\limits_0^l f\left(y,\gamma\right)\vartheta_n(y)dy, \qquad \gamma = \int\limits_0^T \int\limits_0^l H(s,z)\sum_{k=1}^{\infty} u_k(s)\vartheta_k(z)dzds.$$

Кроме того, учтем, что

$$\vartheta_n''(x) = -\lambda_n^2 \vartheta_n(x). \tag{7}$$

Подставляя ряды (5) и (6) в уравнение (1), с учетом (7) получаем следующую счетную систему интегро-дифференциальных уравнений:

$$u_n''(t) + \mu\tau_n \int\limits_0^T \sum_{i=1}^m a_i(t)b_i(s)u_n(s)ds =$$

$$= \frac{1}{1+\lambda_n^2}\eta(t)\int\limits_0^T u_n(\theta)d\theta + \frac{1}{1+\lambda_n^2} f_n(\gamma), \tag{8}$$

где

$$\tau_n = \frac{\lambda_n^2}{1+\lambda_n^2}, \qquad u_n(t) = \int\limits_0^l U(t,y)\vartheta_n(y)dy.$$

С помощью обозначения

$$c_{in} = \int\limits_0^T b_i(s)u_n(s)ds \tag{9}$$

уравнение (8) примет вид

$$u_n''(t) = -\mu\tau_n \sum_{i=1}^m a_i(t)c_{in} + \frac{\eta(t)}{1+\lambda_n^2}\int\limits_0^T u_n(\theta)d\theta + \frac{1}{1+\lambda_n^2} f_n(\gamma). \tag{10}$$

Условия (2) и (3) для уравнения (10) запишем в виде

$$u_n(0) + \int\limits_0^T \Theta_1(t)u_n(t)dt = \varphi_{1n}, \tag{11}$$

$$u_n'(0) + \int\limits_0^T \Theta_2(t)u_n(t)dt = \varphi_{2n}, \tag{12}$$

где

$$\varphi_{kn} = \int\limits_0^l \varphi_k(y)\vartheta_n(y)dy, \qquad k = 1, 2.$$

Правую часть (10) обозначим через $F_n(t)$. Тогда, интегрируя дважды по t, из (10) получаем

$$u_n(t) = C_{2n} + C_{1n}t + \int\limits_0^t (t-s)F_n(s)ds, \tag{13}$$

где C_{1n}, C_{2n} — пока неизвестные постоянные, для определения которых из интегральных условий (11) и (12) получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} &C_{1n}\alpha_3 + C_{2n}\alpha_1 = g_1, \\ &C_{1n}\alpha_2 + C_{2n}\alpha_4 = g_2. \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь

$$\alpha_1 = 1 + \int\limits_0^T \Theta_1(t)dt, \quad \alpha_2 = 1 + \int\limits_0^T \Theta_2(t)tdt, \quad \alpha_3 = \int\limits_0^T \Theta_1(t)tdt, \quad \alpha_4 = \int\limits_0^T \Theta_2(t)dt,$$

$$g_k = \varphi_k - \int\limits_0^T \Theta_k(t) \int\limits_0^t (t-s)F_n(s)dsdt, \qquad k = 1, 2.$$

Решая систему алгебраических уравнений (14), находим

$$C_{1n} = \frac{\alpha_3 g_1 - \alpha_1 g_2}{\omega} = \frac{1}{\omega}\left\{\alpha_3\varphi_{1n} - \alpha_3 \int\limits_0^T \Theta_1(t) \int\limits_0^t (t-s)F_n(s)dsdt - \right.$$

$$\left. -\alpha_1\varphi_{2n} + \alpha_1 \int\limits_0^T \Theta_2(t) \int\limits_0^t (t-s)F_n(s)dsdt \right\}, \tag{15}$$

$$C_{2n} = \frac{\alpha_2 g_1 - \alpha_3 g_2}{\omega} = \frac{1}{\omega}\left\{\alpha_2\varphi_{1n} - \alpha_2 \int\limits_0^T \Theta_1(t) \int\limits_0^t (t-s)F_n(s)dsdt - \right.$$

$$\left. -\alpha_3\varphi_{2n} + \alpha_3 \int\limits_0^T \Theta_2(t) \int\limits_0^t (t-s)F_n(s)dsdt \right\}, \tag{16}$$

где

$$\omega = \alpha_3\alpha_4 - \alpha_1\alpha_2 \neq 0. \tag{17}$$

Подставляя (15) и (16) в (13), имеем

$$u_n(t) = \psi_n(t) - \frac{\alpha_2 + \alpha_3 t}{\omega} \int\limits_0^T \Theta_1(t) \int\limits_0^t (t-s)F_n(s)dsdt +$$

$$+ \frac{\alpha_3 + \alpha_1 t}{\omega} \int\limits_0^T \Theta_2(t) \int\limits_0^t (t-s)F_n(s)dsdt + \int\limits_0^t (t-s)F_n(s)ds,$$

где

$$\psi_n(t) = \frac{1}{\omega}\Big[(\alpha_2 + \alpha_3 t)\varphi_{1n} - (\alpha_1 t + \alpha_3)\varphi_{2n}\Big],$$

или интегральное уравнение

$$u_n(t) = \psi_n(t) + \mu\tau_n \frac{\alpha_2 + \alpha_3 t}{\omega}\int\limits_0^T \Theta_1(t)\int\limits_0^t (t-s)\sum_{i=1}^m q_i(s)c_{in}dsdt-$$

$$-\mu\tau_n \frac{\alpha_3 + \alpha_1 t}{\omega}\int\limits_0^T \Theta_2(t)\int\limits_0^t (t-s)\sum_{i=1}^m q_i(s)c_{in}dsdt-$$

$$-\mu\tau_n \int\limits_0^t (t-s)\sum_{i=1}^m q_i(s)c_{in}ds + \int\limits_0^t (t-s)\frac{p(s)}{1+\lambda_n^2}\int\limits_0^T u_n(\theta)d\theta ds-$$

$$-\frac{\alpha_2 + \alpha_3 t}{\omega}\int\limits_0^T \Theta_1(t)\int\limits_0^t (t-s)\frac{p(s)}{1+\lambda_n^2}\int\limits_0^T u_n(\theta)d\theta dsdt+$$

$$+\frac{\alpha_3 + \alpha_1 t}{\omega}\int\limits_0^T \Theta_2(t)\int\limits_0^t (t-s)\frac{p(s)}{1+\lambda_n^2}\int\limits_0^T u_n(\theta)d\theta dsdt-$$

$$-\frac{\alpha_2 + \alpha_3 t}{\omega}\int\limits_0^T \Theta_1(t)\int\limits_0^t (t-s)\frac{s^2}{2(1+\lambda_n^2)}f_n(\gamma)dsdt+$$

$$+\frac{\alpha_3 + \alpha_1 t}{\omega}\int\limits_0^T \Theta_2(t)\int\limits_0^t (t-s)\frac{s^2}{2(1+\lambda_n^2)}f_n(\gamma)dsdt+$$

$$+\int\limits_0^t (t-s)\frac{s^2}{2(1+\lambda_n^2)}f_n(\gamma)ds, \tag{18}$$

где

$$q_i(t) = \int\limits_0^t (t-s)a_i(s)ds, \qquad p(t) = \int\limits_0^t (t-s)\eta(s)ds, \qquad i = \overline{1,m}.$$

Подставляя выражение (18) в (9), получаем систему счетных систем алгебраических уравнений (СССАУ)

$$c_{in} + \mu\tau_n \sum_{j=1}^m A_{ij}c_{jn} = B_{in}, \qquad i = \overline{1,m}. \tag{19}$$

Здесь

$$A_{ij} = \int_0^T b_i(s) \frac{\alpha_2 + \alpha_3 s}{\omega} \int_0^T \Theta_1(\zeta) \int_0^\zeta (\zeta - \xi) q_j(\xi) d\xi d\zeta ds -$$

$$- \int_0^T b_i(s) \frac{\alpha_3 + \alpha_1 s}{\omega} \int_0^T \Theta_2(\zeta) \int_0^\zeta (\zeta - \xi) q_j(\xi) d\xi d\zeta ds - \int_0^T b_i(s) \int_0^s (s - \zeta) q_j(\zeta) d\zeta ds,$$

$$B_{in} = \int_0^T b_i(s) \psi_n(s) ds -$$

$$- \int_0^T b_i(s) \frac{\alpha_2 + \alpha_3 s}{\omega} \int_0^T \Theta_1(\zeta) \int_0^\zeta (\zeta - \xi) \frac{p(\xi)}{1 + \lambda_n^2} \int_0^T u_n(\theta) d\theta d\xi d\zeta ds +$$

$$+ \int_0^T b_i(s) \frac{\alpha_3 + \alpha_1 s}{\omega} \int_0^T \Theta_2(\zeta) \int_0^\zeta (\zeta - \xi) \frac{p(\xi)}{1 + \lambda_n^2} \int_0^T u_n(\theta) d\theta d\xi d\zeta ds +$$

$$+ \int_0^T b_i(s) \int_0^s (s - \zeta) \frac{p(\zeta)}{1 + \lambda_n^2} \int_0^T u_n(\theta) d\theta d\zeta ds -$$

$$- \int_0^T b_i(s) \frac{\alpha_2 + \alpha_3 s}{\omega} \int_0^T \Theta_1(\zeta) \int_0^\zeta (\zeta - \xi) \frac{\xi^2}{2(1 + \lambda_n^2)} f_n(\gamma) d\xi d\zeta ds +$$

$$+ \int_0^T b_i(s) \frac{\alpha_3 + \alpha_1 s}{\omega} \int_0^T \Theta_2(\zeta) \int_0^\zeta (\zeta - \xi) \frac{\xi^2}{2(1 + \lambda_n^2)} f_n(\gamma) d\xi d\zeta ds +$$

$$+ \int_0^T b_i(s) \int_0^s (s - \zeta) \frac{\zeta^2}{2(1 + \lambda_n^2)} f_n(\gamma) d\zeta ds. \tag{20}$$

СССАУ (19) однозначно разрешима при любых конечных B_{in}, если выполняется условие

$$\Delta_n(\mu) = \begin{vmatrix} 1 + \mu\tau_n A_{11} & \mu\tau_n A_{12} & \ldots & \mu\tau_n A_{1m} \\ \mu\tau_n A_{21} & 1 + \mu\tau_n A_{22} & \ldots & \mu\tau_n A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu\tau_n A_{m1} & \mu\tau_n A_{m2} & \ldots & 1 + \mu\tau_n A_{mm} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{21}$$

Определитель $\Delta_n(\mu)$ в (21) является многочленом относительно μ степени не выше m. Уравнение $\Delta_n(\mu) = 0$ имеет не более m различных корней. Эти корни являются собственными числами ядра интегро-дифференциального уравнения (1). При других значениях μ условие (21) выполняется. Для таких значений μ система (19) имеет единственное решение при любой конечной правой части.

Тогда решения СССАУ (19) записываются в виде

$$c_{in} = \frac{\Delta_{in}(\mu)}{\Delta_n(\mu)}, \qquad i = \overline{1, m}, \tag{22}$$

где

$$\Delta_{in}(\mu) = \begin{vmatrix} 1+\mu\tau_n A_{11} & \ldots & \mu\tau_n A_{1(i-1)} & B_{1n} & \mu\tau_n A_{1(i+1)} & \ldots & \mu\tau_n A_{1m} \\ \mu\tau_n A_{21} & \ldots & \mu\tau_n A_{2(i-1)} & B_{2n} & \mu\tau_n A_{2(i+1)} & \ldots & \mu\tau_n A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu\tau_n A_{m1} & \ldots & \mu\,\tau_n A_{m(i-1)} & B_{mn} & \mu\tau_n A_{m(i+1)} & \ldots & 1+\mu\tau_n A_{mm} \end{vmatrix}.$$

Среди элементов определителей $\Delta_{in}(\mu)$ имеются B_{in}. В свою очередь, в состав B_{in} входят неизвестные величины $u_n(t)$. В самом деле, эти неизвестные функции содержались в правой части СССАУ (19). Чтобы вывести их из-под знака определителей, выражение в (20) запишем в виде

$$B_{in} = B_{1in} + B_{2i}\int\limits_0^T u_n(\theta)d\theta + B_{3in} f_n(\gamma),$$

где

$$B_{1in} = \int\limits_0^T b_i(s)\psi_n(s)ds,$$

$$B_{2in} = -\int\limits_0^T b_i(s)\frac{\alpha_2+\alpha_3 s}{\omega}\int\limits_0^T \Theta_1(\zeta)\int\limits_0^\zeta (\zeta-\xi)\frac{p(\xi)}{1+\lambda_n^2}d\xi d\zeta ds +$$

$$+\int\limits_0^T b_i(s)\frac{\alpha_3+\alpha_1 s}{\omega}\int\limits_0^T \Theta_2(\zeta)\int\limits_0^\zeta (\zeta-\xi)\frac{p(\xi)}{1+\lambda_n^2}d\xi d\zeta ds +$$

$$+\int\limits_0^T b_i(s)\int\limits_0^s (s-\zeta)\frac{p(\zeta)}{1+\lambda_n^2}d\zeta ds,$$

$$B_{3in} = -\int\limits_0^T b_i(s)\frac{\alpha_2+\alpha_3 s}{\omega}\int\limits_0^T \Theta_1(\zeta)\int\limits_0^\zeta (\zeta-\xi)\frac{\xi^2}{2(1+\lambda_n^2)}d\xi d\zeta ds +$$

$$+\int\limits_0^T b_i(s)\frac{\alpha_3+\alpha_1 s}{\omega}\int\limits_0^T \Theta_2(\zeta)\int\limits_0^\zeta (\zeta-\xi)\frac{\xi^2}{2(1+\lambda_n^2)}d\xi d\zeta ds +$$

$$+\int_0^T b_i(s)\int_0^s (s-\zeta)\frac{\zeta^2}{2(1+\lambda_n^2)}d\zeta ds.$$

Согласно свойству определителя из последнего равенства получаем

$$\Delta_{in}(\mu)=\Delta_{1in}(\mu)+\int_0^T u_n(\theta)d\theta\Delta_{2in}(\mu)+f_n(\gamma)\Delta_{3in}(\mu),$$

где

$$\Delta_{kin}(\mu)=$$

$$=\begin{vmatrix} 1+\mu\tau_n A_{11} & \ldots & \mu\tau_n A_{1(i-1)} & B_{k1n} & \mu\tau_n A_{1(i+1)} & \ldots & \mu\tau_n A_{1m} \\ \mu\tau_n A_{21} & \ldots & \mu\tau_n A_{2(i-1)} & B_{k2n} & \mu\tau_n A_{2(i+1)} & \ldots & \mu\tau_n A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu\tau_n A_{m1} & \ldots & \mu\tau_n A_{m(i-1)} & B_{kmn} & \mu\tau_n A_{m(i+1)} & \ldots & 1+\mu\tau_n A_{mm} \end{vmatrix},$$

$$k=\overline{1,3}.$$

Тогда формула (22) принимает вид

$$c_{in}=\frac{\Delta_{1in}(\mu)}{\Delta_n(\mu)}+\int_0^T u_n(\theta)d\theta\frac{\Delta_{2in}(\mu)}{\Delta_n(\mu)}+f_n(\gamma)\frac{\Delta_{3in}(\mu)}{\Delta_n(\mu)}, \qquad i=\overline{1,m}. \tag{23}$$

Подставляя (23) в (18), получаем ССНИУ

$$u_n(t)=\Im_1(t,u_n)\equiv Q_n(t)+G_n(t)\int_0^T u_n(\theta)d\theta+$$

$$+\Phi_n(t)\int_0^l f\left(y,\int_0^T\int_0^l H(\theta,z)\sum_{k=1}^{\infty}u_k(\theta)\vartheta_k(z)dzd\theta\right)\vartheta_n(y)dy, \tag{24}$$

где

$$Q_n(t)=\psi_n(t)-\mu\tau_n\int_0^t (t-s)\sum_{i=1}^m q_i(s)\frac{\Delta_{1in}(\mu)}{\Delta_n(\mu)}ds+$$

$$+\mu\tau_n\frac{\alpha_2+\alpha_3 t}{\omega}\int_0^T\Theta_1(t)\int_0^t (t-s)\sum_{i=1}^m q_i(s)\frac{\Delta_{1in}(\mu)}{\Delta_n(\mu)}dsdt-$$

$$-\mu\tau_n\frac{\alpha_3+\alpha_1 t}{\omega}\int_0^T\Theta_2(t)\int_0^t (t-s)\sum_{i=1}^m q_i(s)\frac{\Delta_{1in}(\mu)}{\Delta_n(\mu)}dsdt,$$

$$G_n(t)=-\mu\tau_n\int\limits_0^t(t-s)\sum_{i=1}^m q_i(s)\frac{\Delta_{2in}(\mu)}{\Delta_n(\mu)}ds+\int\limits_0^t\frac{(t-s)p(s)}{1+\lambda_n^2}ds+$$

$$+\mu\tau_n\frac{\alpha_2+\alpha_3t}{\omega}\int\limits_0^T\Theta_1(t)\int\limits_0^t(t-s)\sum_{i=1}^m q_i(s)\frac{\Delta_{2in}(\mu)}{\Delta_n(\mu)}dsdt-$$

$$-\mu\tau_n\frac{\alpha_3+\alpha_1t}{\omega}\int\limits_0^T\Theta_2(t)\int\limits_0^t(t-s)\sum_{i=1}^m q_i(s)\frac{\Delta_{2in}(\mu)}{\Delta_n(\mu)}dsdt-$$

$$-\frac{\alpha_2+\alpha_3t}{\omega}\int\limits_0^T\Theta_1(t)\int\limits_0^t\frac{(t-s)p(s)}{1+\lambda_n^2}dsdt+\frac{\alpha_3+\alpha_1t}{\omega}\int\limits_0^T\Theta_2(t)\int\limits_0^t\frac{(t-s)p(s)}{1+\lambda_n^2}dsdt,$$

$$\Phi_n(t)=\mu\tau_n\frac{\alpha_2+\alpha_3t}{\omega}\int\limits_0^T\Theta_1(t)\int\limits_0^t(t-s)\sum_{i=1}^m q_i(s)\frac{\Delta_{3in}(\mu)}{\Delta_n(\mu)}dsdt-$$

$$-\mu\tau_n\frac{\alpha_3+\alpha_1t}{\omega}\int\limits_0^T\Theta_2(t)\int\limits_0^t(t-s)\sum_{i=1}^m q_i(s)\frac{\Delta_{3in}(\mu)}{\Delta_n(\mu)}dsdt-$$

$$-\mu\tau_n\int\limits_0^t(t-s)\sum_{i=1}^m q_i(s)\frac{\Delta_{3in}(\mu)}{\Delta_n(\mu)}ds+\int\limits_0^t\frac{(t-s)s^2}{2(1+\lambda_n^2)}ds-$$

$$-\frac{\alpha_2+\alpha_3t}{\omega}\int\limits_0^T\Theta_1(t)\int\limits_0^t\frac{(t-s)s^2}{2(1+\lambda_n^2)}dsdt+\frac{\alpha_3+\alpha_1t}{\omega}\int\limits_0^T\Theta_2(t)\int\limits_0^t\frac{(t-s)s^2}{2(1+\lambda_n^2)}dsdt.$$

4. Однозначная разрешимость ССНИУ. Для функции $h(x)\in L_2(\Omega_l)$ используется норма

$$\big\|h(x)\big\|_{L_2(\Omega_l)}=\sqrt{\int\limits_0^l\Big|h(y)\Big|^2dy}.$$

Класс функций, удовлетворяющих условию Липшица по переменным $u,\vartheta,\ldots$ с положительным коэффициентом L, обозначается через $\mathrm{Lip}\left\{L_{|u,\vartheta,\ldots}\right\}$.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (17) *и* (21). *Если*

1) $\beta_1=\big\|Q(t)\big\|_{B_2(T)}<\infty,\ \beta_2=\big\|G(t)\big\|_{B_2(T)}<\infty,$

2) $\beta_3=\big\|\Phi(t)\big\|_{B_2(T)}<\infty,\ M=\big\|f(x,\gamma)\big\|_{L_2(\Omega_l)}<\infty,$

3) $f(x,\gamma)\in\mathrm{Lip}\left\{L(x)_{|\gamma}\right\},\ \delta_1=\big\|L(x)\big\|_{L_2(\Omega_l)}<\infty,$

4) $\delta_2=\displaystyle\int_0^T\int_0^l\big|H(t,x)\big|dxdt<\infty,\ \rho=\beta_2T+\beta_3\delta_1\delta_2\delta_3<1,$

где $\delta_3=\max_{x\in\Omega_l}\sqrt{\sum_{n=1}^\infty\big|\vartheta_n(x)\big|^2}$, *то ССНИУ* (24) *имеет единственное решение в про-*

странстве $B_2(T)$. Это решение может быть найдено с помощью итерационного процесса

$$u_n^0(t) = Q_n(t), \qquad u_n^{j+1}(t) = \Im_1(t, u_n^j), \qquad j = 0, 1, 2, \ldots . \tag{25}$$

Доказательство. Рассмотрим шар $S\Big(u_n^0; r_1\Big)$ радиуса $r_1 = \beta_1 + \dfrac{\beta_3 M}{1 - \beta_2 T}$. Для нулевого приближения, в силу первого условия теоремы, из (25) имеем

$$\left\| u^0(t) \right\|_{B_2(T)} \le \beta_1. \tag{26}$$

Для первой разности из (25) с использованием неравенств Гельдера и Минковского получаем

$$\left\| u^1(t) - u^0(t) \right\|_{B_2(T)} \le \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \max_{t \in \Omega_T} \Big| G_n(t) \Big|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^T Q_n(t) dt \right|^2} +$$

$$+ \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\max_{t \in \Omega_T} \Big| \Phi_n(t) \Big| \int_0^l \left| f\left(y, \int_0^T \int_0^l H(t,z) \sum_{k=1}^{\infty} u_k^0(t) \vartheta_k(z) dz dt \right) \vartheta_n(y) \right| dy \right]^2}.$$

Отсюда с использованием неравенства Бесселя, в силу условий теоремы и оценки (26), имеем

$$\left\| u^1(t) - u^0(t) \right\|_{B_2(T)} \le$$

$$\le \beta_1 \beta_2 T + \beta_3 \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^l \left| f\left(y, \int_0^T \int_0^l H(t,z) \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(t) \vartheta_k(z) dz dt \right) \right| \Big| \vartheta_n(y) \Big| dy \right]^2} \le$$

$$\le \beta_1 \beta_2 T + \beta_3 \left\| f(x, \gamma) \right\|_{L_2(\Omega_l)} = \beta_1 \beta_2 T + \beta_3 M. \tag{27}$$

Для разности $u^2(t) - u^0(t)$, в силу условий теоремы и оценки (27), из (25) аналогичным образом получаем оценку

$$\left\| u^2(t) - u^0(t) \right\|_{B_2(T)} \le \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \max_{t \in \Omega_T} \Big| G_n(t) \Big|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^T \Big| u_n^1(t) - u_n^0(t) \Big| dt \right]^2} +$$

$$+ \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \max_{t \in \Omega_T} \Big| \Phi_n(t) \Big|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^l \left| f\left(y, \gamma^1\right) \vartheta_n(y) \right| dy \right]^2} \le$$

$$\le (\beta_1 \beta_2 T + \beta_3 M) \beta_2 T + \beta_3 M = \beta_1 (\beta_2 T)^2 + (\beta_2 T + 1) \beta_3 M, \tag{28}$$

где

$$\gamma^1 = \int_0^T \int_0^l H(t,z) \sum_{k=1}^{\infty} \Big| u_k^1(t) \Big| \vartheta_k(z) dz dt.$$

Далее из (25) с учетом (28) имеем

$$\left\|u^3(t)-u^0(t)\right\|_{B_2(T)} \leq \Big(\beta_1\beta_2 T+\beta_3 M\Big)(\beta_2 T)^2+(\beta_2 T+1)\beta_3 M=$$

$$=\beta_1(\beta_2 T)^3+\Big((\beta_2 T)^2+\beta_2 T+1\Big)\beta_3 M. \tag{29}$$

Продолжая этот процесс, аналогично (29) получаем

$$\left\|u^j(t)-u^0(t)\right\|_{B_2(T)} \leq \beta_1(\beta_2 T)^j+$$

$$+\Big((\beta_2 T)^{j-1}+(\beta_2 T)^{j-2}+\ldots+(\beta_2 T)^2+\beta_2 T+1\Big)\beta_3 M. \tag{30}$$

Из последнего условия теоремы следует, что $\beta_2 T<1$. Поэтому из (30), переходя к пределу при $j\to\infty$

$$\lim_{j\to\infty}\left\|u^j(t)-u^0(t)\right\|_{B_2(T)} \leq \lim_{j\to\infty}\Big[\beta_1(\beta_2 T)^j+$$

$$+\Big((\beta_2 T)^{j-1}+(\beta_2 T)^{j-2}+\ldots+(\beta_2 T)^2+\beta_2 T+1\Big)\beta_3 M\Big],$$

имеем

$$\left\|u^\infty(t)-u^0(t)\right\|_{B_2(T)}<\beta_1+\frac{\beta_3 M}{1-\beta_2 T}=r_1. \tag{31}$$

Из (31) следует, что оператор в правой части (24) отображает шар $S\Big(u_n^0;r_1\Big)$ в себя. Теперь для произвольной разности $u^{j+1}(t)-u^j(t)$ получаем оценку

$$\left\|u^{j+1}(t)-u^j(t)\right\|_{B_2(T)} \leq$$

$$\leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\max_{t\in\Omega_T}\Big|G_n(t)\Big|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_0^T\Big|u_k^j(t)-u_k^{j-1}(t)\Big|dt\right|^2}+\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\max_{t\in\Omega_T}\Big|\Phi_n(t)\Big|^2}\times$$

$$\times\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^l L(y)\int_0^T\int_0^l |H(t,z)|\sum_{k=1}^{\infty}\Big|u_k^j(t)-u_k^{j-1}(t)\Big|\,\Big|\vartheta_k(z)\Big|dzdt\Big|\vartheta_n(y)\Big|dy\right]^2}\leq$$

$$\leq\left[\beta_2 T+\beta_3\delta_2\delta_3\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^l L(y)\Big|\vartheta_n(y)\Big|dy\right)^2}\right]\left\|u^j(t)-u^{j-1}(t)\right\|_{B_2(T)}\leq$$

$$\leq\rho\left\|u^j(t)-u^{j-1}(t)\right\|_{B_2(T)}. \tag{32}$$

В силу последнего условия теоремы, из оценки (32) следует, что оператор в правой части (24) является сжимающим. Из оценок (31), (32) заключаем, что для оператора (24) существует единственная неподвижная точка (см., например, [29, с. 389 – 401]). Следовательно, ССНИУ (24) имеет единственное решение $u(t)\in B_2(T)$.

Кроме того, для скорости сходимости справедлива оценка

$$\left\|u^{j+1}(t)-u(t)\right\|_{B_2(T)}\leq\frac{\rho^{j+1}}{1-\rho}\Big(\beta_1\beta_2 T+\beta_3 M\Big).$$

Теорема 1 доказана.

Покажем, что множество интегро-дифференциальных уравнений (1), для которых выполняется последнее условие теоремы 1, не пусто. Если в качестве примера взять функцию $H(t,x) = e^{-\beta_3\delta_1 t - \delta_3 x}$, то это условие примет вид

$$\rho = \beta_2 T + \left[1 - e^{-\beta_3\delta_1 T}\right]\left[1 - e^{-\delta_3 l}\right] < 1.$$

Отсюда следует, что для T, удовлетворяющего неравенству

$$T < \frac{1 - \left[1 - e^{-\beta_3\delta_1 T}\right]\left[1 - e^{-\delta_3 l}\right]}{\beta_2},$$

справедлива теорема 1.

Дифференцируя ССНИУ (24) дважды по t, имеем

$$u_n''(t) = \Im_2(t, u_n) \equiv Q_n''(t) + G_n''(t)\int_0^T u_n(\theta)d\theta +$$

$$+\Phi_n''(t)\int_0^l f\left(y, \int_0^T\int_0^l H(\theta,z)\sum_{k=1}^{\infty} u_k(\theta)\vartheta_k(z)dzd\theta\right)\vartheta_n(y)dy, \tag{33}$$

где

$$Q_n''(t) \in C(\Omega_T), \qquad G_n''(t) \in C(\Omega_T), \qquad \Phi_n''(t) \in C(\Omega_T).$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1 *и*

$$N_0 = \left\|Q''(t)\right\|_{B_2(T)} < \infty, \quad N_1 = \left\|G''(t)\right\|_{B_2(T)} < \infty, \quad N_2 = \left\|\Phi''(t)\right\|_{B_2(T)} < \infty.$$

Тогда $u''(t) \in B_2(T)$.

Доказательство. Рассмотрим шар $S\left(\frac{d^2}{dt^2}u_n^0; r_2\right)$ радиуса

$$r_2 = \max\left\{N_0; N_1 T\left(\beta_1 + \frac{1}{1-\beta_2 T}\right) + N_2 M\right\} < \infty.$$

Для оператора (33) рассмотрим итерационный процесс

$$\frac{d^2}{dt^2}u_n^0(t) = Q_n''(t), \qquad \frac{d^2}{dt^2}u_n^{j+1}(t) = \Im_2(t, u_n^j), \qquad j = 0, 1, 2, \ldots . \tag{34}$$

Покажем, что последовательные приближения (34) не выходят из шара $S\left(\frac{d^2}{dt^2}u_n^0; r_2\right)$. Для нулевого приближения, в силу первого условия теоремы, из (34) имеем оценку

$$\left\|\frac{d}{dt}u^0(t)\right\|_{B_2(T)} \le N_0. \tag{35}$$

Для первой разности, в силу условий теоремы и неравенства (26), из (34) получаем оценку

$$\left\| \frac{d^2}{dt^2} u^1(t) - \frac{d^2}{dt^2} u^0(t) \right\|_{B_2(T)} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \max_{t\in\Omega_T} \left| G_n''(t) \right|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \left| u_n^0(t) \right|^2 dt +}$$

$$+ \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\max_{t\in\Omega_T} \left| \Phi_n''(t) \right| \int_0^l \left| f\left(y, \int_0^T \int_0^l H(t,z) \sum_{k=1}^{\infty} u_k^0(t) \vartheta_k(z) dz\, dt \right) \vartheta_n(y) \right| dy \right]^2} \leq$$

$$\leq N_1 \beta_1 T + N_2 M.$$

Для разности $\dfrac{d^2}{dt^2} u^2(t) - \dfrac{d^2}{dt^2} u^0(t)$, в силу условий теоремы и оценки (27), из (34) получим оценку

$$\left\| \frac{d^2}{dt^2} u^2(t) - \frac{d^2}{dt^2} u^0(t) \right\|_{B_2(T)} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \max_{t\in\Omega_T} \left| G_n''(t) \right|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^T \left| u_n^1(t) - u_n^0(t) \right| dt \right]^2} +$$

$$+ \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \max_{t\in\Omega_T} \left| \Phi_n''(t) \right|^2} \sqrt{\left[\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^l \left| f\left(y, \gamma^1\right) \vartheta_n(y) \right| dy \right]^2} \leq$$

$$\leq (\beta_1 \beta_2 T + \beta_3 M) N_1 T + N_2 M,$$

где

$$\gamma^1 = \int_0^T \int_0^l H(t,z) \sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k^1(t) \right| \vartheta_k(z) dz dt.$$

Далее, из (34) с учетом (28) имеем

$$\left\| \frac{d^2}{dt^2} u^3(t) - \frac{d^2}{dt^2} u^0(t) \right\|_{B_2(T)} \leq$$

$$\leq N_1 T \Big(\beta_1 (\beta_2 T)^2 + (\beta_2 T + 1) \beta_3 M \Big) + N_2 M. \tag{36}$$

Продолжая этот процесс, аналогично (36) получаем

$$\left\| \frac{d^2}{dt^2} u^j(t) - \frac{d^2}{dt^2} u^0(t) \right\|_{B_2(T)} \leq N_1 T \Big[\beta_1 (\beta_2 T)^j +$$

$$+ \Big((\beta_2 T)^{j-1} + (\beta_2 T)^{j-2} + \ldots + (\beta_2 T)^2 + \beta_2 T + 1 \Big) \beta_3 M \Big] + N_2 M. \tag{37}$$

Из последнего условия теоремы 1 следует, что $\beta_2 T < 1$. Поэтому из (37), переходя к пределу при $j \to \infty$, имеем

$$\left\| \frac{d^2}{dt^2} u^\infty(t) - \frac{d^2}{dt^2} u^0(t) \right\|_{B_2(T)} < N_1 T \left(\beta_1 + \frac{1}{1 - \beta_2 T} \right) + N_2 M \leq r_2. \tag{38}$$

Из (35) и (38) заключаем, что оператор в правой части (33) отображает шар $S\left(\dfrac{d^2}{dt^2} u_n^0; r_2 \right)$ в себя. Отсюда следует, что $u''(t) \in B_2(T)$.

5. Сходимость ряда Фурье. Подставляя оператор из правой части (24) в ряд Фурье (5), получаем формальное решение смешанной задачи (1)–(4):

$$U(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\vartheta_n(x)\left\{Q_n(t)+G_n(t)\int_0^T u_n(\theta)d\theta+\right.$$

$$\left.+\Phi_n(t)\int_0^l f\left(y,\int_0^T\int_0^l H(\theta,z)\sum_{k=1}^{\infty}u_k(\theta)\vartheta_k(z)dzd\theta\right)\vartheta_n(y)dy\right\}. \tag{39}$$

Также подставим (25) в ряд (5):

$$U^{j+1}(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n^{j+1}(t)\vartheta_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\vartheta_n(x)\left\{Q_n(t)+G_n(t)\int_0^T u_n^j(\theta)d\theta+\right.$$

$$\left.+\Phi_n(t)\int_0^l f\left(y,\int_0^T\int_0^l H(\theta,z)\sum_{k=1}^{\infty}u_k^j(\theta)\vartheta_k(z)dzd\theta\right)\vartheta_n(y)dy\right\},$$

$$j=0,1,2,3,\ldots . \tag{40}$$

Теорема 3. *Пусть выполняются условия теоремы* 2 *и* $u(t)\in B_2(T)$ *является единственным решением ССНИУ* (24). *Тогда последовательность функций* (40) *сходится абсолютно и равномерно к функции* (39) *при* $j\to\infty$.

Доказательство. Поскольку $u(t)\in B_2(T)$ является единственным решением ССНИУ (24), можно полагать, что

$$\left\|u^j(t)-u(t)\right\|_{B_2(T)}\le\frac{\varepsilon}{\delta_3},$$

где $0<\varepsilon$ — малое число. Тогда для разности функций (40) и (39) с применением неравенства Гельдера получаем

$$\left|U^j(t,x)-U(t,x)\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n^j(t)-u_n(t)\right|\left|\vartheta_n(x)\right|\le$$

$$\le\delta_3\left\|u^j(t)-u(t)\right\|_{B_2(T)}\le\delta_3\frac{\varepsilon}{\delta_3}=\varepsilon.$$

Так как для оператора (33) имеем место $u''(t)\in B_2(T)$, то с применением неравенства Гельдера имеем оценку

$$\left|\frac{\partial^2U(t,x)}{\partial t^2}\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n''(t)\right|\left|\vartheta_n(x)\right|\le\delta_3\left\|u''(t)\right\|_{B_2(T)}<\infty.$$

Дифференцируя (39) дважды по x и учитывая (7), находим

$$\frac{\partial^2U(t,x)}{\partial x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\vartheta_n''(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2u_n(t)\vartheta_n(x). \tag{41}$$

Интегрируя по частям интеграл

$$u_n(t) = \int\limits_0^l U\left(t, y\right) \vartheta_n(y) dy$$

два раза, имеем

$$u_n(t) = -\frac{1}{\lambda_n^2} \int\limits_0^l \frac{\partial^2 U(t,y)}{\partial y^2} \vartheta_n(y) dy. \tag{42}$$

Подставляя (42) в (41) и используя неравенства Гельдера и Бесселя, окончательно получаем оценку

$$\left| -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 u_n(t) \vartheta_n(x) \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^l \frac{\partial^2 U(t,y)}{\partial y^2} \vartheta_n(y) dy \vartheta_n(x) \right| \leq$$

$$\leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left| \vartheta_n(x) \right|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int\limits_0^l \left| \frac{\partial^2 U(t,y)}{\partial y^2} \right| \left| \vartheta_n(y) \right| dy \right]^2} \leq$$

$$\leq \delta_3 \left\| \frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial x^2} \right\|_{L_2(\Omega_l)} < \infty.$$

Теорема 3 доказана.

Литература

1. *Алгазин С. Д., Кийко И. А.* Флаттер пластин и оболочек. – М.: Наука, 2006. – 248 с.
2. *Замышляева А. А.* Математические модели соболевского типа высокого порядка // Вестн. Южно-Урал. гос. ун-та. Мат. моделирование и программирование. – 2014. – **7**, № 2. – С. 5 – 28.
3. *Benney D. J., Luke J. C.* Interactions of permanent waves of finite amplitude // J. Math. Phys. – 1964. – **43**. – P. 309 – 313.
4. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. – М.: Наука, 1986. – 336 с.
5. *Алексидзе М. А.* Фундаментальные функции в приближенных решениях граничных задач. – М.: Наука, 1991. – 352 с.
6. *Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск: Наука, 1983. – 319 с.
7. *Бештоков М. Х.* Численный метод решения одной нелокальной краевой задачи для уравнения третьего порядка гиперболического типа // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2014. – **54**, № 9. – С. 1497 – 1514.
8. *Джураев Т. Д., Логинов Б. В., Малюгина И. А.* Вычисления собственных значений и собственных функций некоторых дифференциальных операторов третьего и четвертого порядков // Дифференц. уравнения мат. физики и их прил.: Сб. науч. трудов. – Ташкент: Фан, 1989. – С. 24 – 36.
9. *Зикиров О. С.* О задаче Дирихле для гиперболических уравнений третьего порядка // Изв. вузов. Математика. – 2014. – № 7. – С. 63 – 71.
10. *Иванчов Н. И.* Краевые задачи для параболического уравнения с интегральным условием //Дифференц. уравнения. – 2004. – **40**, № 4. – С. 547 – 564.
11. *Егоров С. М., Хруслов Е. Я.* Глобальные слабые решения системы Навье – Стокса – Фоккера – Планка // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 2. – С. 192 – 225.
12. *Шхануков М. Х.* О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // Дифференц. уравнения. – 1982. – **18**, № 4. – С. 689 – 699.

13. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. – М.: Мир, 1977. – 622 с.
14. *Юлдашев Т. К.* Обратная задача для одного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных третьего порядка // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Физ.-мат. науки. – 2014. – **34**, № 1. – С. 56 – 65.
15. *Юлдашев Т. К.* Об одном интегро-дифференциальном уравнении Фредгольма в частных производных третьего порядка // Изв. вузов. Математика. – 2015. – № 9. – С. 74 – 79.
16. *Yuldashev T. K.* A double inverse problem for a partial Fredholm integro-differential equation of fourth order // Proc. Jangjeon Math. Soc. – 2015. – **18**, № 3. – P. 417 – 426.
17. *Гордезиани Д. Г., Авалишвили Г. А.* Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды // Мат. моделирование. – 2000. – **12**, № 1. – С. 94 – 103.
18. *Кожанов А. И., Пулькина Л. С.* О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. – 2006. – **42**, № 9. – С. 1166 – 1179.
19. *Пулькина Л. С.* Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями 1- и 2-го рода // Изв. вузов. Математика. – 2012. – № 4. – С. 74 – 83.
20. *Тихонов А. Н.* О бесконечных системах дифференциальных уравнений // Мат. сб. – 1934. – **41**, № 4. – С. 551 – 560.
21. *Персидский К. П.* Об устойчивости решений счетной системы дифференциальных уравнений // Изв. АН КазССР. Математика и механика. – 1948. – № 2. – С. 2 – 35.
22. *Персидский К. П.* Некоторые критические случаи счетных систем // Изв. АН КазССР. Математика и механика. – 1951. – № 5. – С. 3 – 24.
23. *Персидский К. П.* Счетные системы дифференциальных уравнений и устойчивость их решений // Изв. АН КазССР. Математика и механика. – 1959. – № 7. – С. 52 – 71.
24. *Жаутыков О. А.* Исследования по теории счетных систем дифференциальных уравнений: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Алма-Ата: Ин-т математики АН КазССР, 1961.
25. *Валеев К. Г., Жаутыков О. А.* Бесконечные системы дифференциальных уравнений. – Алма-Ата: Изд-во АН КазССР, 1974. – 416 с.
26. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* Счетные системы дифференциальных уравнений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1993. – 308 с.
27. *Мучник В. Л.* Исследование специальных однородных интегральных уравнений второго рода в пространстве счетно-аддитивных функций множества: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Свердловск: Ин-т математики и механики УРО АН СССР, 1983. – 125 с.
28. *Чандиров Г. И.* Смешанная задача для квазилинейных уравнений гиперболического типа: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Баку: Азерб. гос. ун-т, 1970. – 248 с.
29. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 495 с.

Получено 24.09.15,
после доработки — 20.12.15