УДК 517.624.3

Д. С. Джумабаев, А. Д. Абильдаева
(Ин-т математики и мат. моделирования МОН Республики Казахстан, Алматы)

СВОЙСТВА ИЗОЛИРОВАННЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ НА ВСЕЙ ОСИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ*

We establish the conditions of continuous dependence on the right-hand side for the “isolated” solutions of a system of nonlinear ordinary differential equations bounded on the entire axis.

Встановлено умови неперервної залежності від правої частини „ізольованих” обмежених на всій осі розв’язків системи нелінійних звичайних диференціальних рівнянь.

1. Введение. На всей оси $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ рассматривается система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — непрерывная функция, $\|x\| = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i|$.

Через $\widetilde{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ обозначим пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_1 = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|$.

Ограниченные решения обыкновенных дифференциальных уравнений различными методами исследованы многими авторами (см. [1, 2] и приведенную в них библиографию). В соответствии с применяемыми методами условия существования ограниченных решений получены в различных терминах.

В настоящей работе исследуются вопросы существования изолированного ограниченного на $\mathbb{R}$ решения системы (1) и его непрерывная зависимость от правой части f. Изолированность ограниченного решения нелинейных дифференциальных уравнений имеет важное значение в приложениях и играет такую же роль, как единственность ограниченного решения для линейных дифференциальных уравнений. Однако изолированное ограниченное решение, рассматриваемое как изолированный элемент множества ограниченных решений уравнений (1), не является „устойчивым” к малым возмущениям правой части f. Например, дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = x^2(x-1)^2, \quad t \in \mathbb{R},$$

имеет два изолированных ограниченных на $\mathbb{R}$ решения: $x = 0$ и $x = 1$. Однако возмущенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = x^2(x-1)^2 + \varepsilon, \quad t \in \mathbb{R},$$

* Поддержана грантом Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект 4057/ГФ4).

не имеет ограниченного на $\mathbb{R}$ решения при любом $\varepsilon > 0$. Этот пример показывает, что изолированное ограниченное на $\mathbb{R}$ решение, вообще говоря, не имеет свойства непрерывной зависимости от правой части дифференциального уравнения, и его существование не обеспечивает существование ограниченного на $\mathbb{R}$ решения для возмущенного дифференциального уравнения.

2. Непрерывная зависимость „изолированного" ограниченного на $\mathbb{R}$ решения системы (1) от правой части. Следующее определение является обобщением определения „изолированного" решения нелинейной двухточечной краевой задачи, введенного в [3].

Определение A. *Ограниченное на $\mathbb{R}$ решение $x^*(t)$ системы* (1) *называется „изолированным", если*:

a) *существует число $\rho > 0$, при котором ограниченная в $G^*_\rho = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \in \mathbb{R}, \|x - x^*(t)\| < \rho\}$ функция $f(t,x)$ имеет равномерно непрерывную и ограниченную производную по x в G^*_ρ*;

b) *линеаризованная система*

$$\frac{dy}{dt} = f'_x(t, x^*(t))y, \qquad t \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}^n, \tag{1_0}$$

экспоненциально дихотомична на $\mathbb{R}$.

Свойства „изолированных" ограниченных на $\mathbb{R}$ решений исследуем методом параметризации [4].

Выполним разбиение действительной оси $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{r=-\infty}^{\infty} [(r-1)h, rh)$ с шагом $h > 0$.

Введем следующие пространства:

m_n — пространство ограниченных двусторонне бесконечных последовательностей $\lambda = (\ldots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \ldots)$, $\lambda_r \in \mathbb{R}^n$, с нормой $\|\lambda\|_2 = \|(\ldots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \ldots)\|_2 = \sup_{r\in\mathbb{Z}} \|\lambda_r\|$;

$\widetilde{C}(\mathbb{R}, h, m_n)$ — пространство ограниченных двусторонне бесконечных последовательностей функций $x[t] = (\ldots, x_r(t), x_{r+1}(t), \ldots)$ с нормой $\|x[\cdot]\|_3 = \sup_{r\in\mathbb{Z}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|x_r(t)\|$, где функция $x\colon [(r-1)h, rh) \to \mathbb{R}^n$ непрерывна на $[(r-1)h, rh)$ и имеет конечный предел при $t \to rh - 0$, $r \in \mathbb{Z}$;

$L(m_n)$ — пространство линейных ограниченных операторов $\Lambda\colon m_n \to m_n$ с индуцированной нормой.

Сужение функции $x(t)$ на r-й интервал $[(r-1)h, rh)$ обозначим через $x_r(t)$, т. е. $x_r(t)$ — вектор-функция размерности n, определенная и совпадающая с $x(t)$ на $[(r-1)h, rh)$, $r \in \mathbb{Z}$. Через λ_r обозначим значение функции $x_r(t)$ в точке $t = (r-1)h$. Выполним замену $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$, $t \in [(r-1)h, rh)$, $r \in \mathbb{Z}$, и от задачи нахождения ограниченного на $\mathbb{R}$ решения системы (1) перейдем к эквивалентной задаче с параметрами

$$\frac{du_r}{dt} = f(t, \lambda_r + u_r), \qquad t \in [(r-1)h, rh), \quad r \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

$$u_r((r-1)h) = 0, \quad r \in \mathbb{Z}, \tag{3}$$

$$\lambda_r + \lim_{t\to rh-0} u_r(t) - \lambda_{r+1} = 0, \quad r \in \mathbb{Z}, \tag{4}$$

$$\lambda = (\ldots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \ldots) \in m_n, \qquad u[t] = (\ldots, u_r(t), u_{r+1}(t), \ldots) \in \widetilde{C}(\mathbb{R}, h, m_n). \tag{5}$$

Решением задачи (2)–(5) является пара $\big(\lambda^*, u^*[t]\big)$ с элементами $\lambda^* = \big(\ldots, \lambda^*_r, \lambda^*_{r+1}, \ldots\big) \in m_n$, $u^*[t] = \big(\ldots, u^*_r(t), u^*_{r+1}(t), \ldots\big) \in \widetilde{C}(\mathbb{R}, h, m_n)$, где непрерывно дифференцируемая на $[(r-1)h, rh)$ функция $u_r^*(t)$ при $\lambda_r = \lambda_r^*$, $r \in \mathbb{Z}$, удовлетворяет дифференциальному уравнению (2) и условиям (3), (4). Если система пар $(\lambda_r^*, u_r^*(t))$, $r \in \mathbb{Z}$, является решением задачи (2)–(5), то функция, определяемая равенствами $x^*(t) = \lambda_r^* + u_r^*(t)$, $t \in [(r-1)h, rh)$, $r \in \mathbb{Z}$, будет ограниченным на $\mathbb{R}$ решением системы (1).

При фиксированном значении параметра λ_r задача Коши (2), (3) эквивалентна интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$u_r(t) = \int\limits_{(r-1)h}^{t} f(\tau, \lambda_r + u_r(\tau))d\tau, \qquad t \in [(r-1)h, rh), \quad r \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

Из (6), определив $\lim_{t\to rh-0} u_r(t)$ и подставив его в (4), получим бесконечную систему нелинейных уравнений относительно введенных параметров

$$\lambda_r + \int\limits_{(r-1)h}^{rh} f(t, \lambda_r + u_r(t))dt - \lambda_{r+1} = 0, \quad r \in \mathbb{Z}, \tag{7}$$

которую запишем в виде операторного уравнения

$$Q_{1,h}(\lambda, u) = 0, \quad \lambda \in m_n.$$

Рассмотрим наряду с (1) дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \widetilde{f}(t, x), \qquad x \in R^n, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

где функция $\widetilde{f}\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ непрерывна. Предположим, что $x^*(t)$ — „изолированное” ограниченное на всей оси решение дифференциального уравнения (1) и $\lambda_r^* = x^*((r-1)h)$, $u_r^*(t) = x^*(t) - x^*((r-1)h)$, $t \in [(r-1)h, rh)$, $r \in \mathbb{Z}$. По определению „изолированного” ограниченного на всей оси решения существуют числа $\rho > 0$, $L_0 > 0$ такие, что функция $f(t,x)$ в G_ρ^* ограничена, имеет равномерно непрерывную производную $f_x'(t,x)$ и выполняется неравенство $\|f_x'(t,x)\| \le L_0$. Матрицу Якоби $f_x'(t, x^*(t))$ обозначим через $A^*(t)$ и составим двусторонне бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно введенных параметров

$$\left[I + \int\limits_{(r-1)h}^{rh} A^*(t)dt\right]\lambda_r - \lambda_{r+1} = b_r, \quad r \in \mathbb{Z}. \tag{9}$$

Двусторонне бесконечную блочно-ленточную матрицу, соответствующую левой части системы (9), обозначим через $Q_1^*(h)$.

Используя схему доказательства теоремы 2 из [5, с. 36], нетрудно установить справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. *Линеаризованная система* (1_0) *экспоненциально дихотомична на* $\mathbb{R}$ *тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon \in (0,1]$ *найдется* $h = h(\varepsilon)$, *при котором двусторонне бесконечная блочно-ленточная матрица* $Q_1^*(h)\colon m_n \to m_n$ *ограниченно обратима, и выполняются неравенства*

a) $\|[Q_1^*(h)]^{-1}\|_{L(m_n)} \le \gamma_1^*(h)$,
b) $q_1^*(h) = \gamma_1^*(h)\big(e^{hL_0} - 1 - hL_0\big) < \varepsilon$.
Использовав теорему 1, по $\varepsilon = 1/8$ найдем $h_0 = h(1/8)$, при котором

$$\big\|[Q_1^*(h_0)]^{-1}\big\|_{L(m_n)} \le \gamma_1^*(h_0), \quad q_1^*(h_0) \le 1/8. \tag{10}$$

Составим множества
$S\big(\lambda^*, \rho/2\big) = \big\{\lambda = (\ldots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \ldots) \in m_n \colon \|\lambda - \lambda^*\|_2 = \sup\limits_{r\in\mathbb{Z}} \|\lambda_r - \lambda_r^*\| < \rho/2\big\}$,
$S_h\big(u^*[t], \rho/2\big) = \big\{u[t] \in \widetilde{C}(\mathbb{R}, h, m_n) \colon \|u[\cdot] - u^*[\cdot]\|_3 < \rho/2\big\}$,
$S\big(x^*(t), \rho\big) = \big\{x(t) \in \widetilde{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \colon \|x - x^*\|_1 < \rho\big\}$.

Из равномерной непрерывности $f'_x(t,x)$ в G_ρ^* следуют существование производной Фреше оператора $Q_{1,h_0}(\lambda, u)$ по λ и ее равномерная непрерывность в $S\big(\lambda^*, \rho/2\big) \times S_{h_0}\big(u^*[t], \rho/2\big)$. Поэтому $\rho_0 \in (0, \rho]$ можно выбрать так, чтобы выполнялось неравенство

$$\gamma_1^*(h_0)\big\|\partial Q_{1,h_0}(\lambda, u)/\partial\lambda - \partial Q_{1,h_0}(\lambda^*, u^*)/\partial\lambda\big\|_{L(m_n)} \le 1/3 \tag{11}$$

для всех $(\lambda, u[t]) \in S\big(\lambda^*, \rho_0/2\big) \times S_{h_0}\big(u^*[t], \rho_0/2\big)$. Поскольку $\partial Q_{1,h_0}(\lambda^*, u^*)/\partial\lambda = Q_1^*(h_0)$, то, согласно теореме о малых возмущениях ограниченно обратимых операторов [6, с. 212], двусторонне бесконечная матрица Якоби $\partial Q_{1,h_0}(\lambda, u)/\partial\lambda \colon m_n \to m_n$ ограниченно обратима и

$$\big\|(\partial Q_{1,h_0}(\lambda, u)/\partial\lambda)^{-1}\big\|_{L(m_n)} \le 1{,}5\gamma_1^*(h_0) \tag{12}$$

для всех $(\lambda, u[t]) \in S\big(\lambda^*, \rho_0/2\big) \times S_{h_0}\big(u^*[t], \rho_0/2\big)$.

В следующем утверждении предполагается, что система (1) имеет „изолированное" ограниченное на $\mathbb{R}$ решение $x^*(t)$ и числа $h_0 > 0$, $\rho_0 > 0$ выбраны удовлетворяющими неравенствам (10), (11).

Теорема 2. *Пусть функция* $\widetilde{f}(t,x)$ *в* $G_{\rho_0}^*$ *имеет равномерно непрерывную частную производную по* x *и для положительных чисел* ε_1, ε_2 *выполняются следующие неравенства*:
1) $\big\|\widetilde{f}(t,x) - f(t,x)\big\| \le \varepsilon_1$, $\big\|\widetilde{f}'_x(t,x) - f'_x(t,x)\big\| \le \varepsilon_2$, $(t,x) \in G_{\rho_0}^*$,
2) $1{,}5\gamma_1^*(h_0)h_0\varepsilon_2 \le 0{,}25$,
3) $\widetilde{q}_1(h_0) = 2\gamma_1^*(h_0)\big(e^{(L_0+\varepsilon_2)h_0} - 1 - (L_0+\varepsilon_2)h_0\big) \le 0{,}5$,
4) $4\gamma_1^*(h_0)h_0\varepsilon_1\big(1 + L_0h_0e^{(L_0+\varepsilon_2)h_0}\big) < \rho_0/2$,
5) $\Big(e^{(L_0+\varepsilon_2)h_0} + \big(e^{(L_0+\varepsilon_2)h_0} - 1\big)\cdot 4\gamma_1^*(h_0)\big(1 + L_0h_0e^{(L_0+\varepsilon_2)h_0}\big)\Big)h_0\varepsilon_1 < \rho_0/2$.

Тогда дифференциальное уравнение (8) *в* $S(x^*(t), \rho_0)$ *имеет „изолированное" ограниченное на* $\mathbb{R}$ *решение* $\widetilde{x}(t)$ *и справедлива оценка*

$$\|\widetilde{x} - x^*\|_1 \le e^{(L_0+\varepsilon_2)h_0}\big(1 + 4\gamma_1^*(h_0)\big(1 + L_0h_0e^{(L_0+\varepsilon_2)h_0}\big)\big)h_0\varepsilon_1. \tag{13}$$

Доказательство. По шагу $h_0 > 0$ выполним разбиение $\mathbb{R} = \bigcup_{r=-\infty}^{\infty}[(r-1)h_0, rh_0)$ и перейдем от задачи нахождения ограниченного на $\mathbb{R}$ решения дифференциального уравнения (8) к эквивалентной сингулярной задаче с параметрами

$$\frac{du_r}{dt} = \widetilde{f}(t, \lambda_r + u_r), \qquad t \in [(r-1)h_0, rh_0), \quad r \in \mathbb{Z}, \tag{14}$$

$$u_r((r-1)h_0) = 0, \quad r \in \mathbb{Z}, \tag{15}$$

$$\lambda_r + \lim_{t\to rh_0-0} u_r(t) - \lambda_{r+1} = 0, \quad r \in \mathbb{Z}, \tag{16}$$

$$(\lambda, u[t]) \in m_n \times \widetilde{C}(\mathbb{R}, h_0, m_n). \tag{17}$$

Аналогично (7) получим двусторонне бесконечную систему

$$\lambda_r + \int\limits_{(r-1)h_0}^{rh_0} \widetilde{f}(\tau, \lambda_r + u_r(\tau))d\tau - \lambda_{r+1} = 0, \quad r \in \mathbb{Z},$$

которую запишем в виде операторного уравнения

$$\widetilde{Q}_{1,h_0}(\lambda, u) = 0, \quad \lambda \in m_n. \tag{18}$$

Решение сингулярной задачи с параметрами (14)–(17) найдем методом последовательных приближений. За начальное приближение по параметру $\lambda^{(0)} \in m_n$ возьмем $\lambda^* = (\ldots, \lambda_r^*, \lambda_{r+1}^*, \ldots) \in m_n$ и найдем функцию $u_r^{(0)}(t)$, решив задачу Коши (14), (15) при $\lambda_r = \lambda_r^*$, $r \in \mathbb{Z}$. Условия теоремы обеспечивают существование единственного $u_r^{(0)}(t)$ для каждого $r \in \mathbb{Z}$ и оценку

$$\|u_r^{(0)}(t) - u_r^*(t)\| \le e^{(L_0+\varepsilon_2)(t-(r-1)h_0)}\varepsilon_1 h_0, \quad t \in [(r-1)h_0, rh_0). \tag{19}$$

Из неравенства из п. 1 теоремы следует, что $\big\|\partial\widetilde{Q}_{1,h_0}(\lambda,u)/\partial\lambda - \partial Q_{1,h_0}(\lambda,u)/\partial\lambda\big\|_{L(m_n)} \le \varepsilon_2 h_0$. Поэтому, использовав оценку (13), неравенство из п. 2 теоремы и теорему о малых возмущениях ограниченно обратимых операторов, получим обратимость двусторонне бесконечной матрицы Якоби $\partial\widetilde{Q}_{1,h_0}(\lambda,u)/\partial\lambda\colon m_n \to m_n$ и оценку

$$\big\|\big(\partial\widetilde{Q}_{1,h_0}(\lambda,u)/\partial\lambda\big)^{-1}\big\|_{L(m_n)} \le \widetilde{\gamma}_1(h_0) = 2\gamma_1^*(h_0) \tag{20}$$

для всех $(\lambda, u[t]) \in S(\lambda^*, \rho_0/2) \times S_{h_0}(u^*[t], \rho_0/2)$. Оценка (20) и неравенства из пп. 4, 5 теоремы обеспечивают для операторного уравнения (18) выполнение условий теоремы А из [3, с. 38] в $S(\lambda^*, \rho_0/2)$ при любом $u[t] \in S_{h_0}(u^*[t], \rho_0/2)$. Использовав эту теорему и решив операторное уравнение, найдем первое приближение по параметру $\lambda^{(1)} = (\ldots, \lambda_r^{(1)}, \lambda_{r+1}^{(1)}, \ldots)$

$$\widetilde{Q}_{1,h_0}(\lambda, u^{(0)}) = 0, \quad \lambda \in m_n,$$

и установим оценку

$$\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\|_2 \le 2\gamma_1^*(h_0)\|\widetilde{Q}_{1,h_0}(\lambda^*, u^{(0)})\|_2 \le 2\gamma_1^*(h_0)\big(1 + L_0 h_0 e^{(L_0+\varepsilon_2)h_0}\big) h_0\varepsilon_1. \tag{21}$$

Решая задачу Коши (14), (15) при $\lambda_r = \lambda_r^{(1)}$, $r \in \mathbb{Z}$, находим $u^{(1)}[t] = (\ldots, u_r^{(1)}(t), u_{r+1}^{(1)}(t), \ldots)$. Функции $u_r^{(1)}(t)$ существуют, и для них выполняются неравенства

$$\big\|u_r^{(1)}(t) - u_r^{(0)}(t)\big\| \le \big(e^{(L_0+\varepsilon_2)(t-(r-1)h_0)} - 1\big)\|\lambda_r^{(1)} - \lambda_r^{(0)}\|, \qquad t \in [(r-1)h_0, rh_0), \quad r \in \mathbb{Z}. \tag{22}$$

Подставив $u^{(1)}[t]$ в (18) и решив операторное уравнение

$$\widetilde{Q}_{1,h_0}(\lambda, u^{(1)}) = 0, \quad \lambda \in m_n,$$

найдем $\lambda^{(2)}$ и установим оценку

$$\|\lambda^{(2)} - \lambda^{(1)}\|_2 \leq 2\gamma_1^*(h_0)\|\widetilde{Q}_{1,h_0}(\lambda^{(1)}, u^{(1)})\|_2 \leq$$

$$\leq 2\gamma_1^*(h_0)(L_0 + \varepsilon_2) \sup_{r\in\mathbb{Z}} \int\limits_{(r-1)h_0}^{rh_0} \|u_r^{(1)}(\tau) - u_r^{(0)}(\tau)\| d\tau.$$

Отсюда, использовав неравенства (22), получим

$$\|\lambda^{(2)} - \lambda^{(1)}\|_2 \leq \widetilde{q}_1(h_0)\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\|_2.$$

Продолжая итерационный процесс, на $(k+1)$-м шаге находим $\lambda^{(k+1)} \in m_n$, $u^{(k+1)}[t] \in \in \widetilde{C}(\mathbb{R}, h_0, m_n)$ и устанавливаем оценки

$$\|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}\|_2 \leq \widetilde{q}_1(h_0)\|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}\|_2, \tag{23}$$

$$\|u^{(k+1)}[\cdot] - u^{(k)}[\cdot]\|_3 \leq \big(e^{(L_0+\varepsilon_2)h_0} - 1\big)\|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}\|_2. \tag{24}$$

В силу неравенства из п. 3 теоремы $\lambda^{(k)} \to \widetilde{\lambda}$, $u^{(k)}[t] \to \widetilde{u}[t]$ при $k \to \infty$. Из неравенств (21), (23) и (24) имеем

$$\big\|\widetilde{\lambda} - \lambda^{(0)}\big\|_2 \leq 4\gamma_1^*(h_0)\big(1 + L_0 h_0 e^{(L_0+\varepsilon_2)h_0}\big)h_0\varepsilon_1, \tag{25}$$

$$\Big\|\widetilde{u}[\cdot] - u^{(0)}[\cdot]\Big\|_3 \leq \big(e^{(L_0+\varepsilon_2)h_0} - 1\big)4\gamma_1^*(h_0)\big(1 + L_0 h_0 e^{(L_0+\varepsilon_2)h_0}\big)h_0\varepsilon_1. \tag{26}$$

Тогда функция $\widetilde{x}(t)$, определенная на $\mathbb{R}$ равенствами $\widetilde{x}(t) = \widetilde{\lambda}_r + \widetilde{u}_r(t)$, $t \in [(r-1)h_0, rh_0)$, $r \in \mathbb{Z}$, принадлежит $S(x^*(t), \rho_0)$ и является „изолированным" ограниченным на $\mathbb{R}$ решением нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения (8), а оценка (13) следует из (25), (26).

Теорема 2 доказана.

Отметим, что применяемый в статье подход позволил установить явную оценку разности „изолированных" ограниченных на $\mathbb{R}$ решений систем (8) и (1) через оценки $\big\|\widetilde{f}(t,x) - f(t,x)\big\|$, $\big\|\widetilde{f}'_x(t,x) - f'_x(t,x)\big\|$ на множестве $G^*_{\rho_0}$. Из (13) следует непрерывная зависимость „изолированных" ограниченных на $\mathbb{R}$ решений от правой части дифференциальных уравнений.

В качестве примера рассмотрим возмущенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = (1-x)x^2 + \varepsilon, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{27}$$

Уравнение (27) при $\varepsilon = 0$ имеет два изолированных ограниченных на $\mathbb{R}$ решения: $x = 0$ и $x = 1$. Изолированным в смысле определения А решением является только $x = 1$. Функция

$$x_\varepsilon(t) = \frac{1}{3} + \sqrt[3]{\frac{1}{27} + \frac{\varepsilon}{2} - \sqrt{\frac{\varepsilon}{27} + \frac{\varepsilon^2}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{27} + \frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{27} + \frac{\varepsilon^2}{4}}}, \quad t \in \mathbb{R},$$

является ограниченным на $\mathbb{R}$ решением уравнения (27) и при $\varepsilon \to 0$ совпадает с $x = 1$. Таким образом, при возмущении правой части дифференциального уравнения именно изолированное в смысле определения А решение сохраняется и непрерывно зависит от этого возмущения.

Литература

1. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 534 с.
2. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функции Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. – 272 с.
3. *Dzhumabaev D. S., Temesheva S. M.* A parametrization method for solving nonlinear two-point boundary value problems // Comput. Math. and Math. Phys. – 2007. – **47**, №1. – P. 37 – 61.
4. *Dzhumabaev D. S.* Singular boundary value problems and their approximation for nonlinear ordinary differential equations // Comput. Math. and Math. Phys. – 1992. – **32**, №1. – P. 10 – 24.
5. *Dzhumabayev D. S.* Approximation of a bounded solution of a linear ordinary differential equation by solutions of two-point boundary value problems // USSR Comput. Math. and Math. Phys. – 1990. – **30**, №2. – P. 34 – 45.
6. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744 с.

Получено 23.05.16