DOI: 10.37863/umzh.v73i12.191

УДК 517.9

К. Г. Овсепян (Іджеван. філія Єреван. держ. ун-ту, Вірменія)

КАТЕГОРІЯ ДЕЯКИХ ПІДАЛГЕБР АЛГЕБРИ ТЬОПЛІЦА

We consider the structure analysis of subalgebras of the Toeplitz algebra, which are generated by inverse subsemigroups of a bicyclic semigroup. We construct a category of the sets of natural numbers of length $k < m$ and match each set with a C^*-algebra. The result is a category of C^*-algebras. The existence of a functor between these categories is proved. In particular, we find the conditions, under which the category of C^*-algebras turns into a bundle of C^*-algebras.

Розглядається структурний аналіз C^*-підалгебр алгебри Тьопліца, які породжуються інверсними піднапівгрупами біциклічної напівгрупи. Побудовано категорію наборів натуральних чисел довжиною $k < m$, і кожному набору зіставлено деяку C^*-алгебру. В результаті отримано категорію C^*-алгебр. Доведено існування функтора між цими категоріями. Зокрема, знайдено умови, за яких категорія C^*-алгебр перетворюється в розшарування C^*-алгебр.

1. Вступ. Одним із відомих алгебраїчних об'єктів у сучасній математичній фізиці є алгебра Тьопліца $\mathcal{T}$. У багатьох роботах досліджується як сама алгебра, так і різні її модифікації [1 – 10]. Цю статтю також присвячено одному з узагальнень алгебри Тьопліца, яке виникає при дослідженні C^*-алгебр, породжених інверсними піднапівгрупами біциклічної напівгрупи. Барнес [1] довів, що біциклічна напівгрупа має з точністю до унітарної еквівалентності одне нескінченновимірне точне незвідне зображення і серія одновимірних зображень параметризується одиничним околом. З теореми Кобурна [2] випливає, що всі C^*-алгебри, породжені неунітарними ізометричними зображеннями напівгрупи невід'ємних цілих чисел $\mathbb{Z}_+$, канонічно ізоморфні. Ця теорема була узагальнена Дугласом [4] для напівгруп із архімедовим порядком і Мерфі [6] для напівгруп із повним порядком. У роботі [5] Аухадієв і Тепоян довели зворотне твердження до теореми Мерфі [6], тобто що всі C^*-алгебри, породжені точними ізометричними неунітарними зображеннями напівгрупи, канонічно ізоморфні лише тоді, коли напівгрупа оснащена повним порядком. Таким чином, C^*-алгебра, породжена точним нескінченновимірним зображенням біциклічної напівгрупи, ізоморфна алгебрі Тьопліца.

Раніше автором було розпочато вивчення C^*-підалгебр алгебри Тьопліца $\mathcal{T}$, породжених мономами, індекс яких кратний числу m. Таку C^*-алгебру було позначено $\mathcal{T}_m$ і показано, що вона нерухома щодо скінченної підгрупи групи S^1 порядку m. Було описано всі незвідні нескінченновимірні зображення цієї C^*-алгебри (див. [11 – 13]).

У роботі [14] продовжено вивчення C^*-алгебри $\mathcal{T}_m$ з дещо іншої точки зору. Отримано повний опис усіх інваріантних ідеалів алгебри $\mathcal{T}_m$, показано, що їх скінченна кількість, точно 2^m, і що кожен із них породжується однією або декількома різницями проєкторів вигляду $T^iT^{*i} - T^jT^{*j}$, $0 \leq i < j \leq m$. Також доведено, що якщо J — інваріантний ідеал C^*-алгебри $\mathcal{T}_m$ і $J \neq \mathcal{K}_m$, то вона може бути зображена у вигляді прямої суми $\mathcal{T}_m \cong \mathcal{T}_n \oplus J$ для деякого $n < m$.

У роботі [15] було показано, що алгебра $\mathcal{T}_m$ зображується у вигляді схрещеного добутку: $\mathcal{T}_m = \varphi(\mathcal{A}) \times_{\delta_m} \mathbb{Z}$, де $\mathcal{A} = C_0(\mathbb{Z}_+) \oplus \mathbb{C}I$, тобто алгебра неперервних функцій на $\mathbb{Z}_+$, які в нескінченності мають скінченну границю. Крім того, повний опис автоморфізмів C^*-алгебри $\mathcal{T}_m$ і її підалгебр $\mathcal{T}(m)$ і $\mathcal{K}_m$ наведено у роботі [16].

2. Підалгебри алгебри Тьопліца. Розглянемо біциклічну напівгрупу S з породжуючим елементом a. Зрозуміло, що кожен елемент біциклічної напівгрупи має вигляд $a^m a^{*n}$, де m і n — невід'ємні цілі числа. Елемент вигляду $a^m a^{*n}$ назвемо мономом.

Індексом монома $b = a^m a^{*n}$ із S назвемо число $m - n$ і позначимо його через $\operatorname{ind}(b)$. Зазначимо, що $\operatorname{ind}(b \cdot c) = \operatorname{ind}(b) + \operatorname{ind}(c)$ для будь-яких елементів $b, c \in S$ (див. [11]). Зафіксуємо ціле число $m \in \mathbb{N}$ і позначимо $S_m = \{b \in S\colon \operatorname{ind}(b) = k \cdot m,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Нехай $S(m) \subset S$ — піднапівгрупа, породжена елементом a^m. Зрозуміло, що $S(m)$, S_m є інверсними піднапівгрупами біциклічної напівгрупи S. Зв'язок цих напівгруп наведено у роботі [11]. Відомо, що біциклічна напівгрупа має з точністю унітарної еквівалентності одне точне нескінченновимірне незвідне зображення (див. [1])

$$\pi : S \to B(l^2(\mathbb{Z}_+)), \qquad \pi(a^n a^{*m}) = T^n T^{*m},$$

де T — оператор зсуву на $l^2(\mathbb{Z}_+)$, тобто на базисі $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ діє таким чином: $Te_k = e_{k+1}$, і це зображення породжує алгебру Тьопліца. Природно виникає питання: чи можна узагальнити алгебру Тьопліца так, що в отриманих узагальненнях кількість незвідних нескінченновимірних унітарно нееквівалентних зображень, які породжуються інверсними піднапівгрупами біциклічної напівгрупи, була скінченним числом? Виявилося, що такі C^*-алгебри породжуються всіма інверсними піднапівгрупами S_m, $m \in \mathbb{N}$, біциклічної напівгрупи S. Позначимо через $\mathcal{T}_m$ C^*-підалгебру алгебри Тьопліца $\mathcal{T}$, яка породжується інверсною піднапівгрупою $\pi(S_m)$. Іншими словами, $\mathcal{T}_m$ породжується всіма мономами вигляду $T^k T^{*l}$, де $\operatorname{ind}(T^k T^{*l})/m = k - l/m \in \mathbb{Z}$.

Нехай $\mathcal{T}(m)$ — C^*-підалгебра алгебри Тьопліца, породженої $\pi(S(m))$. Очевидно, що $\mathcal{T}(m) \subset \mathcal{T}_m$. Наведемо деякі твердження про розглядувані алгебри, отримані в роботі [14], які будемо використовувати в наступних пунктах.

Розглянемо розклад гільбертового простору $l^2(\mathbb{Z}_+)$ у вигляді прямої суми

$$l^2(\mathbb{Z}_+) = H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_m, \tag{1}$$

де базис підпростору H_i складається з векторів $\{e_{i-1+km}\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$, $1 \le i \le m$. Тоді підпростори H_i, $1 \le i \le m$, інваріантні щодо алгебри $\mathcal{T}_m$.

З огляду на (1) будь-який елемент $A \in \mathcal{T}_m$ однозначно можна зобразити у вигляді

$$A = A|_{H_1} \oplus \ldots \oplus A|_{H_m}. \tag{2}$$

Нехай $\mathcal{K}$ — C^*-підалгебра всіх компактних операторів алгебри Тьопліца $\mathcal{T}$, $\mathcal{K}_m$ — C^*-підалгебра всіх компактних операторів алгебри $\mathcal{T}_m$.

Лема 1. *Справджується тотожність*

$$\mathcal{K}_m = \mathcal{K}(H_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{K}(H_m).$$

Лема 2. *Алгебра $\mathcal{T}_m$ є C^*-алгеброю, породженою операторами T^m, T^{*m} і проєкторами $P_1, \ldots, P_m$, де $P_l = T^l T^{*l}$, $0 \le l \le m-1$.*

Теорема 1. *Будь-який елемент $A \in \mathcal{T}_m$ має вигляд $A = C + D$, де $C \in \mathcal{T}(m)$, $D \in \mathcal{K}_m$, тобто*

$$\mathcal{T}_m = \mathcal{T}(m) + \mathcal{K}_m.$$

Визначимо оператори $\alpha : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ і $\beta : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$:

$$\alpha(A) = TAT^*, \qquad \beta(A) = T^*AT, \quad A \in \mathcal{T}. \tag{3}$$

Очевидно, що оператор α є ендоморфізмом алгебри $\mathcal{T}$.

Лема 3. *Для операторів* α *і* β, *заданих формулами* (3), *справджуються такі співвідношення*:

1) $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}$;
2) $\beta(\mathcal{T}_m) = \mathcal{T}_m$;
3) $\beta \circ \alpha^k(\mathcal{T}_m) = \alpha^{k-1}(\mathcal{T}_m)$.

Доведення. Перше співвідношення є очевидним. Доведення достатньо провести на мономах. Доведемо друге співвідношення. Нехай $V = T^kT^{*l} \in \mathcal{T}_m$. Тоді $\beta(V) = T^*T^kT^{*l}T = T^{k-1}T^{*l-1}$. Легко бачити, що $\mathrm{ind}(\beta(V)) = \mathrm{ind}(V) = kl$. Звідси безпосередньо випливає друге співвідношення. Третє співвідношення випливає з першого.

3. Структура та зв'язок підалгебр $\mathcal{T}_m$ і $\mathcal{T}(m)$. Позначимо через $\mathcal{T}(m)^+ (\mathcal{T}(m)^-)$ підалгебру алгебри $\mathcal{T}(m)$, індекс кожного елемента якої додатний (від'ємний), тобто

$$\mathcal{T}(m)^+ = \big\{A \in \mathcal{T}(m) : \mathrm{ind}(A) \geq 0\big\}, \qquad \mathcal{T}(m)^- = \big\{A \in \mathcal{T}(m) : \mathrm{ind}(A) < 0\big\}.$$

Так само визначимо $\mathcal{T}_m^+$, $\mathcal{T}_m^-$. Зрозуміло, що ці алгебри не є C^*-алгебрами.

Теорема 2. *Банахова алгебра* $\mathcal{T}_m^+$ *зображується у вигляді прямої суми просторів*:

$$\mathcal{T}_m^+ = (T(m)^+) \oplus \alpha(\mathcal{T}(m)^+) \oplus \ldots \oplus \alpha^{m-1}(\mathcal{T}(m)^+).$$

Доведення. Покажемо, що для будь-якого монома $V \in \mathcal{T}_m^+$ $V \in \alpha^k(\mathcal{T}(m)^+)$ для деякого $0 \leq k \leq n-1$ і сума правої частини є прямою сумою. Нехай V — моном із $\mathcal{T}_m^+$, що має вигляд $V = T^{mk+l}T^{*mr+l}$, де $0 < l < m, k > r$. Тоді

$$V = T^lT^{mk}T^{*mr}T^{*l} \in \alpha^l(\mathcal{T}(m)^+).$$

Тепер покажемо, що $\alpha^k(\mathcal{T}(m)^+) \cap \alpha^j(\mathcal{T}(m)^+) = 0$ для $k \neq j$. Нехай моном $V \in \alpha^k(\mathcal{T}(m)^+) \cap \alpha^j(\mathcal{T}(m)^+)$, тоді $V = \alpha^k(T^{mn}T^{*ml}) = \alpha^j(T^{mi}T^{*ms})$. Отже, $V = T^{mn+k}T^{*ml+k} = T^{mr+j}T^{*ms+j}$, тобто $mn + k = mr + j$ і $ml + k = ms + j$. Оскільки $0 \leq k \leq m-1$ і $0 \leq j \leq m-1$, то ці рівності можливі лише при $k = j, n = r, l = s$. Твердження теореми тепер випливає з того, що мономи щільні в $\mathcal{T}_m^+$.

Наслідок 1. *Банахова алгебра* $\mathcal{T}_m^-$ *зображується у вигляді прямої суми просторів*:

$$\mathcal{T}_m^- = (T(m)^-) \oplus \alpha(\mathcal{T}(m)^-) \oplus \ldots \oplus \alpha^{m-1}(\mathcal{T}(m)^-).$$

Наслідок 2. C^*-*алгебра* $\mathcal{T}_m$ *зображується у вигляді прямої суми просторів*:

$$\mathcal{T}_m = \mathcal{T}_m^- \oplus \mathcal{T}_m^+.$$

Лема 4. *Має місце включення*

$$\alpha^k(\mathcal{T}(m)^+)\alpha^j(\mathcal{T}(m)^-) \subset \alpha^k(\mathcal{T}(m)^+) \oplus \alpha^j(\mathcal{T}(m)^-),$$

де $0 \leq k, j \leq m-1$.

Доведення. Для визначеності вважатимемо, що $k > j$. Нехай $V_1 \in \alpha^k \mathcal{T}(m)^+$ — моном вигляду $V_1 = T^{nm+k}T^{*ml+k}$, $n > l$, а $V_2 \in \alpha^j \mathcal{T}(m)^-$ — моном вигляду $V_2 = T^{cm+j}T^{*am+j}$, де $c < a$. Тоді якщо $c > l$, то

$$V_1V_2 = T^{nm+k}T^{*ml+k}T^{cm+j}T^{*am+j} = T^{nm+k+cm+j-(ml+k)}T^{*am+j} =$$

$$= T^jT^{m(n+c-l)}T^{*am}T^{*j} \in \alpha^j(\mathcal{T}(m)^+), \tag{4}$$

а якщо $c < l$, то

$$V_1V_2 = T^{nm+k}T^{*(ml+k)}T^{cm+j}T^{*(am+j)} =$$

$$= T^{nm+k}T^{*(-cm)-j+(ml+k)}T^{*(am+j)} = TT^{mn}T^{*m(l+a-c)}T^{*k} \in \alpha^k(\mathcal{T}(m)^-). \tag{5}$$

Таким чином, твердження леми справедливе на мономах. Для завершення доведення зауважимо, що елемент підалгебри $\alpha^k(\mathcal{T}(m)^+) \cdot \alpha^j(\mathcal{T}(m)^-)$ має вигляд AB, де A — лінійна комбінація мономів вигляду V_1, а B — лінійна комбінація мономів вигляду V_2. Отже, AB — лінійна комбінація мономів типу (4) або (5). Тому $AB \in \alpha^k(\mathcal{T}(m)^+)\alpha^j(\mathcal{T}(m)^-)$.

Розглянемо сім'ю $\{\mathcal{T}_m\}_{m=1}^{\infty}$ C^*-алгебр. Справедливою є така теорема.

Теорема 3. *Нехай $m \in \mathbb{N}$, тоді для будь-якого $n \in \mathbb{N}$*

$$\alpha^{i_1}(\mathcal{T}(m)) \oplus \ldots \oplus \alpha^{i_n}(\mathcal{T}(m)) \cong \mathcal{T}(n) \oplus \alpha(\mathcal{T}(n)) \oplus \ldots \oplus \alpha^{n-1}(\mathcal{T}(n)) = \mathcal{T}_n,$$

де $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_n \le m$.

Доведення проведемо методом математичної індукції. Якщо $n = 1$, то $\alpha^{i_1}(\mathcal{T}(m)) \cong \mathcal{T}(m)$ і $\mathcal{T}(m) \cong \mathcal{T}$. Звідси випливає, що $\alpha^{i_1}(\mathcal{T}(m)) \cong \mathcal{T}$.

Покажемо, що теорема справедлива для $n = 2$, тобто $\alpha^{i_1}(\mathcal{T}(m)) \oplus \alpha^{i_2}(\mathcal{T}(m)) \cong \mathcal{T}(2) \oplus \oplus \alpha(\mathcal{T}(2))$. Оскільки $i_1 < i_2$, то

$$\alpha^{i_1}(\mathcal{T}(m)) \oplus \alpha^{i_2}(\mathcal{T}(m)) = \alpha^{i_1}(\mathcal{T}(m)) \oplus \alpha^{i_2-i_1}(\mathcal{T}(m)) \cong \mathcal{T}(m) \oplus \alpha^{i_2-i_1}(\mathcal{T}(m)).$$

Позначимо $i_0 = i_2 - i_1 \ge 1$ і доведемо, що $\mathcal{T}(m) \oplus \alpha^{i_0}(\mathcal{T}(m)) \cong \mathcal{T}(2) \oplus \alpha(\mathcal{T}(2))$.

Розглянемо ізоморфізми $\varphi_1 \colon \mathcal{T}(m) \to \mathcal{T}(2) \colon \varphi_1(T^m) = T^2$ і $\varphi_2 \colon \alpha^{i_0}(\mathcal{T}(m)) \to \alpha(\mathcal{T}(2)) \colon \varphi_1(T^{m+i_0}T^{*i_0}) = \alpha(T^2)$.

Позначимо $\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2 \colon \mathcal{T}(m) \oplus \alpha^{i_0}(\mathcal{T}(m)) \to \mathcal{T}(2) \oplus \alpha(\mathcal{T}(2))$. Покажемо, що φ є ізоморфізмом.

Нехай $V_1 = T^{am}T^{*bm} \in \mathcal{T}(m)$, $V_2 = T^{dm+i_0}T^{*cm+i_0} \in \alpha^{i_0}(\mathcal{T}(m))$. Згідно з лемою 2 [14], 1) $V_1 \cdot V_2 \in \mathcal{T}(m)$ або 2) $V_1 \cdot V_2 \in \alpha^{i_0}(\mathcal{T}(m))$.

Для того щоб довести, що φ є ізоморфізмом, достатньо показати, що φ є гомоморфізмом, тобто у випадку 1) $\varphi_1(V_1) \cdot \varphi_2(V_2) \in \mathcal{T}(2)$, а у випадку 2) $\varphi_1(V_1) \cdot \varphi_2(V_2) \in \alpha(\mathcal{T}(2))$.

Розглянемо перший випадок, тобто $V_1 \cdot V_2 \in \mathcal{T}(m)$. З того, що

$$V_1 \cdot V_2 = T^{am}T^{*bm}T^{dm+i_0}T^{*cm+i_0} \in \mathcal{T}(m),$$

випливає, що $bm > dm + i_0$. Оскільки $\varphi_1(V_1) = T^{2a}T^{*2b}$, $\varphi_2(V_2) = T^{2d+1}T^{*(2c+1)}$, то $\varphi_1(V_1) \cdot \cdot \varphi_2(V_2) = T^{2a}T^{*2b}T^{2d+1}T^{*(2c+1)}$ і $\varphi_1(V_1) \cdot \varphi_2(V_2) \in \mathcal{T}(2)$ тоді й лише тоді, коли $2b > 2d + 1$. Покажемо, що з того, що $bm > dm + i_0$, випливає, що $2b > 2d + 1$. Справді,

$$bm > dm + i_0 \Rightarrow b \ge d + \frac{i_0}{m} \Rightarrow 2b > 2d \Rightarrow 2b \ge 2d + 1, \quad b, d \in \mathbb{N}.$$

У другому випадку доведення проводиться аналогічно. Таким чином,

$$\alpha^{i_1}(\mathcal{T}(m)) \oplus \alpha^{i_2}(\mathcal{T}(m)) \cong \mathcal{T}(2) \oplus \alpha(\mathcal{T}(2)).$$

Припустимо, що теорема справедлива при $n = k$, тобто

$$\alpha^{i_1}(\mathcal{T}(m)) \oplus \ldots \oplus \alpha^{i_k}(\mathcal{T}(m)) \cong \mathcal{T}(k) \oplus \alpha(\mathcal{T}(k)) \oplus \ldots \oplus \alpha^{i_{k-1}}(\mathcal{T}(k)) = \mathcal{T}_k,$$

і доведемо її для $n = k + 1$. Необхідно показати, що

$$\alpha^{i_1}(\mathcal{T}(m)) \oplus \ldots \oplus \alpha^{i_k+1}(\mathcal{T}(m)) \cong \mathcal{T}(k+1) \oplus \alpha(\mathcal{T}(k+1)) \oplus \ldots \oplus \alpha^{i_k}(\mathcal{T}(k+1)) = \mathcal{T}_{k+1}.$$

Згідно з індукційним припущенням $\alpha^{i_1}(\mathcal{T}(m)) \oplus \ldots \oplus \alpha^{i_k}(\mathcal{T}(m)) \cong \mathcal{T}(k) \oplus \alpha(\mathcal{T}(k)) \oplus \ldots$ $\ldots \oplus \alpha^{i_{k-1}}(\mathcal{T}(k)) = \mathcal{T}_k$, але, з іншого боку, $\mathcal{T}_k \cong \mathcal{T}(k+1) \oplus \alpha(\mathcal{T}(k+1)) \oplus \ldots \oplus \alpha^{i_{k-1}}(\mathcal{T}(k+1))$. Використовуючи вищенаведені рівності та крок індукції при $n = 2$, отримуємо

$$\alpha^{i_1}(\mathcal{T}(m)) \oplus \ldots \oplus \alpha^{i_k}(\mathcal{T}(m)) \oplus \alpha^{i_{k+1}}(\mathcal{T}(m)) \cong \mathcal{T}(k+1) \oplus \alpha(\mathcal{T}(k+1)) \oplus \ldots$$
$$\ldots \oplus \alpha^{i_{k-1}}(\mathcal{T}(k+1)) \oplus \alpha^{i_k}(\mathcal{T}(k+1)) = \mathcal{T}_{k+1}.$$

***Наслідок* 3.** *Існує ланцюжок вкладених алгебр*

$$\mathcal{T}_2 \hookrightarrow \mathcal{T}_3 \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow \mathcal{T}_n \hookrightarrow \ldots,$$

де під вкладенням $\hookrightarrow$ розуміється вкладення лінійних просторів відповідних алгебр, а не алгебр, тобто $\hookrightarrow$ не зберігає структуру алгебри.

4. Категорія C^*-алгебр. Визначимо унітарний оператор $u_j : H_j \to l^2(\mathbb{Z}_+)$, $0 \leq j \leq m-1$, покладаючи на базисних елементах $u_j(e_{j+km}) = e_k$. Оскільки H_j — інваріантні простори для C^*-алгебри $\mathcal{T}_m$, то унітарний оператор $u = u_0 \oplus \ldots \oplus u_{m-1} : H_0 \oplus H_1 \oplus \ldots \oplus H_{m-1} \to \bigoplus_{j=0}^{m-1} l^2(\mathbb{Z}_+)$ породжує вкладення

$$\sigma : \mathcal{T}_m \to \bigoplus_{j=0}^{m-1} B(l^2(\mathbb{Z}_+)),$$

$$\sigma(A) = uAu^*, \quad \text{де} \quad A \in \mathcal{T}_m.$$

Оскільки $T^m e_{i+km} = e_{i+(k+1)m}$, то $\sigma(T^m) = T \oplus \ldots \oplus T$ є m-ю копією оператора зсуву T. Алгебра $\mathcal{T}(m)$ породжується операторами T^m і T^{*m}, отже, для будь-якого $A \in \mathcal{T}(m)$ знайдеться такий оператор $B \in \mathcal{T}$, що

$$\sigma(A) = B \oplus \ldots \oplus B.$$

Очевидно, справедливим є і зворотне: для будь-якого $B \in \mathcal{T}$ знайдеться такий оператор $A \in \in \mathcal{T}(m)$, що $\sigma(A) = B \oplus \ldots \oplus B$. Тому алгебру $\mathcal{T}(m)$ будемо ототожнювати з алгеброю $\sigma(\mathcal{T}(m))$:

$$\mathcal{T}(m) \approx \sigma(\mathcal{T}(m)) = m\mathcal{T} = \{A : A = B \oplus B \oplus \ldots \oplus B,\ B \in \mathcal{T}\} \hookrightarrow \bigoplus^{m} \mathcal{T}, \qquad (6)$$

де через $\bigoplus^{m} \mathcal{T}$ позначено пряму суму m екземплярів алгебри Тьопліца $\mathcal{T}$.

Як показано в роботі [14],

$$P_j|_{H_i} = \begin{cases} I, & i-1 \geq j, \\ T^m T^{*m}, & i-1 < j, \end{cases} \qquad 0 \leq i \leq m-1.$$

Звідси випливає, що $\sigma(P_i) = TT^* \oplus \ldots \oplus TT^* \oplus I \oplus \ldots \oplus I$. Скрізь далі проєктори $P_i,\ 0 \leq$ $\leq i \leq m-1$, будемо ототожнювати з проєкторами $\sigma(P_i)\colon P_i \approx \sigma(P_i),\ 0 \leq i \leq m-1$. Звідси, зокрема (з урахуванням леми 1), випливає, що підалгебру компактних операторів $\mathcal{K}_m$ у $\mathcal{T}_m$ можна ототожнювати з алгеброю $\sigma(\mathcal{K}_m)$:

$$\mathcal{K}_m \approx \sigma(\mathcal{K}_m) = \bigoplus^{m} \mathcal{K}. \tag{7}$$

З теореми 1 і ототожнень (6), (7) випливає, що алгебру $\mathcal{T}_m$ можна ототожнити з алгеброю $\sigma(\mathcal{T}_m)$:

$$\mathcal{T}_m \approx \sigma(\mathcal{T}_m) = \Big\{A\colon A = (B+K_1) \oplus \ldots \oplus (B+K_m),\ B \in \mathcal{T},\ K_1, \ldots, K_m \in \mathcal{K}\Big\}.$$

Розглянемо множину чисел $M = \{1, \ldots, m\}$ і позначимо через

$$N = \big\{(i_1, \ldots, i_k),\ \text{де}\ i_k \in M,\ k = 1, \ldots, m\big\}$$

множину всіх можливих наборів чисел довжиною меншою, ніж m. Введемо порядок на N таким чином:

$$(i_1, \ldots, i_j) \leq (i_1, \ldots, i_l), \quad \text{якщо} \quad j \leq l, \qquad \text{і} \qquad i_t \in \{i_1, \ldots, i_l\}, \quad t = 1, \ldots, j.$$

Зрозуміло, що так визначене відношення на N є частковим порядком.

Означення 1. *Категорія $\mathcal{C}$ складається з класу об'єктів $Ob_{\mathcal{C}}$, і для кожної пари об'єктів A, B задано множину морфізмів* (*або стрілок*) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, *причому кожному морфізму відповідають єдині A і B. Для пари морфізмів $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ і $g \in \mathrm{Hom}(B, C)$ визначено композицію $g \circ f \in \mathrm{Hom}(A, C)$. До кожного об'єкта A задано тотожний морфізм* $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Hom}(A, A)$, *до того ж виконуються дві аксіоми*:

1) *операція композиції асоціативна*: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ *для всіх* $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$, $h\colon$ $C \to D$;

2) *тотожний морфізм діє тривіально*: $f \circ \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_B \circ f = f$ *для всіх* $f\colon A \to B$.

Очевидно, що $(N, \leq)$ є категорією, де класи морфізмів — це частковий порядок, а об'єкти — це всеможливі набори із N.

Кожному набору $(i_1, i_2, \ldots, i_k) \in N$ зіставимо C^*-алгебру $\mathcal{T}_m(i_1, i_2, \ldots, i_k) = \mathcal{T}(m) +$ $+ \mathcal{K}_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$, де

$$\mathcal{K}_{i_1, i_2, \ldots, i_k} = \big\{K_0 \oplus K_0 \oplus \ldots \oplus K_{i_1} \oplus K_{i_2} \oplus \ldots$$
$$\ldots \oplus K_{i_k} \oplus K_0 \oplus \ldots \oplus K_0,\ \text{де}\ K_0, K_{i_1}, \ldots, K_{i_k} \in \mathcal{K}\big\} =$$
$$= \big\{i_1 K_0 \oplus K_{i_1} \oplus K_{i_2} \oplus \ldots \oplus K_{i_k} \oplus (m-k) K_0,\ \text{де}\ K_0, K_{i_1}, \ldots, K_{i_k} \in \mathcal{K}\big\}.$$

Лема 5. *Для будь-якого набору $(i_1, i_2, \ldots, i_k) \in N$ C^*-алгебра $\mathcal{T}_m(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ ізоморфна C^*-алгебрі $\mathcal{T}_{k+1}$:*

$$\mathcal{T}_m(i_1, i_2, \ldots, i_k) \cong \mathcal{T}_{k+1}.$$

Доведення проведемо для випадку $k = 2$, тобто покажемо, що $\mathcal{T}_m(i_1, i_2) \cong \mathcal{T}_3$. Розглянемо розклад (1). Використовуючи структурний аналіз алгебр $\mathcal{T}(m)$ і $\mathcal{K}_{i_1,i_2}$, отримуємо, що будь-який елемент $A \in \mathcal{T}_m(i_1, i_2)$ зображується у вигляді

$$A = (T \oplus \ldots \oplus T) + (K_0 \oplus K_0 \oplus \ldots \oplus K_{i_1} \oplus K_0 \oplus \ldots \oplus K_{i_2} \oplus K_0 \oplus \ldots \oplus K_0) =$$
$$= (T + K_0) \oplus \ldots \oplus (T + K_{i_1}) \oplus \ldots \oplus (T + K_{i_2}) \oplus \ldots \oplus (T + K_0). \tag{8}$$

Визначимо відображення $\psi\colon \mathcal{T}_m(i_1, i_2) \to \mathcal{T}_3$ таким чином:

$$\psi\big((T + K_0) \oplus \ldots \oplus (T + K_{i_1}) \oplus \ldots \oplus (T + K_{i_2}) \oplus \ldots \oplus (T + K_0)\big) =$$
$$= (T + K_0) \oplus (T + K_{i_1}) \oplus (T + K_{i_2}).$$

Покажемо, що це відображення є гомоморфізмом. Справді, нехай $B,\ D$ — будь-які елементи з $\mathcal{T}_m(i_1, i_2)$. Покажемо, що тоді $\psi(B \cdot D) = \psi(B) \cdot \psi(D)$. Зрозуміло, що B, D мають вигляд (8). З визначення алгебри $\mathcal{T}_m(i_1, i_2)$ випливає, що $\mathcal{T}_m(i_1, i_2) \subsetneq \mathcal{T}_m$. З іншого боку, оскільки алгебри $\mathcal{T}(m)$ і $\mathcal{K}_{i_1,i_2}$ інваріантні щодо H_i із розкладу (1), ми отримуємо інваріантність алгебри $\mathcal{T}_m(i_1, i_2)$ щодо H_i. Отже, розклад (2) також є правильним для елементів алгебри $\mathcal{T}_m(i_1, i_2)$. Таким чином,

$$\psi(B \cdot D) = \psi\Big(\big((T + K_0) \oplus \ldots \oplus (T + K_{i_1}) \oplus \ldots \oplus (T + K_{i_2}) \oplus \ldots \oplus (T + K_0)\big)\times$$
$$\times\big((T + K_1) \oplus \ldots \oplus (T + K'_{i_1}) \oplus \ldots \oplus (T + K'_{i_2}) \oplus \ldots \oplus (T + K_1)\big)\Big) =$$
$$= \psi\big((T + K_0)(T + K_1) \oplus \ldots \oplus (T \oplus K_{i_1})(T + K'_{i_1}) \oplus \ldots$$
$$\ldots \oplus (T \oplus K_{i_2})(T + K'_{i_2}) \oplus \ldots \oplus (T + K_0)(T + K_1)\big) =$$
$$= (T + K_0)(T + K_1) \oplus (T \oplus K_{i_1})(T + K'_{i_1}) \oplus (T \oplus K_{i_2})(TK'_{i_2}). \tag{9}$$

Тут ми скористалися тим, що $B \cdot D = (B|_{H_1} \oplus \ldots \oplus B|_{H_m})(D|_{H_1} \oplus \ldots \oplus D|_{H_m}) = B|_{H_1} \cdot D|_{H_1} \oplus \ldots \ldots \oplus B|_{H_m} \cdot D|_{H_m}$. З іншого боку,

$$\psi(B) \cdot \psi(D) = \psi\big((T + K_0) \oplus \ldots \oplus (T + K_{i_1}) \oplus \ldots \oplus (T + K_{i_2}) \oplus \ldots \oplus (T + K_0)\big)\times$$
$$\times\psi\big((T + K_1) \oplus \ldots \oplus (T + K'_{i_1}) \oplus \ldots \oplus (T + K'_{i_2}) \oplus \ldots \oplus (T + K_1)\big) =$$
$$= \big((T + K_0) \oplus (T + K_{i_1}) \oplus (T + K_{i_2})\big) \cdot \big((T + K_1) \oplus (T + K'_{i_1}) \oplus (T + K'_{i_2})\big) =$$
$$= (T + K_0)(T + K_1) \oplus (T \oplus K_{i_1})(T + K'_{i_1}) \oplus (T \oplus K_{i_2})(TK'_{i_2}). \tag{10}$$

Із (9) і (10) випливає, що ψ є гомоморфізмом. Ін'єктивність та сюр'єктивність ψ безпосередньо отримуємо, використовуючи структурний аналіз наведених вище алгебр.

Доведення теореми для $k > 2$ не відрізняється від доведення для $k = 2$.

Розглянемо сім'ю $\{\mathcal{T}_m(i_1, \ldots, i_k)\}_{(i_1,\ldots,i_k)\in N}$ C^*-алгебр і визначимо вкладення алгебри $\mathcal{T}_m(i_1, \ldots, i_l)$ в алгебру $\mathcal{T}_m(i_1, \ldots, i_k)$ (скрізь далі під вкладенням будемо розуміти вкладення лінійних просторів відповідних алгебр). Виявилося, що це вкладення можна визначити тоді й лише тоді, коли $l < k$. Справді, якщо $l < k$, то за лемою 5 $\mathcal{T}_m(i_1, \ldots, i_l) \cong \mathcal{T}_l$, $\mathcal{T}_m(i_1, \ldots, i_k) \cong \mathcal{T}_k$. З іншого боку, згідно з наслідком 3 та структурним аналізом розглядуваних алгебр має місце вкладення $\mathcal{T}_k \hookrightarrow \mathcal{T}_l$. Це означає, що $\mathcal{T}_m(i_1, \ldots, i_l) \hookrightarrow \mathcal{T}_m(i_1, \ldots, i_k)$.

Таким чином, існує природне вкладення алгебри $\mathcal{T}_m(i_1, \ldots, i_l)$ в алгебру $\mathcal{T}_m(i_1, \ldots, i_k)$ при $l < k$.

Зрозуміло, що множина C^*-алгебр, що породжуються всеможливими наборами $(i_1, \ldots, i_k) \in \in N$, утворює категорію, морфізмами якої є зазначені вище вкладення:

$$\big(\{\mathcal{T}_m(i_1, \ldots, i_k)\}_{(i_1,\ldots,i_k)\in N}, \hookrightarrow\big).$$

Означення 2. *Функтор $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ з категорії $\mathcal{C}$ у категорію $\mathcal{D}$ — це відображення, яке зіставляє кожному об'єкту $X \in \mathcal{C}$ об'єкт $\mathcal{F}(X) \in \mathcal{D}$, а кожному морфізму $f\colon X \to Y$ у категорії $\mathcal{C}$ морфізм $\mathcal{F}(f)\colon \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ у категорії $\mathcal{D}$. Це зіставлення повинно мати такі властивості*: $\mathcal{F}(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(A)}$, $\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$.

Лема 6. *Існує функтор між такими категоріями*:

$$F_m\colon (N, \leq) \to \big(\{\mathcal{T}_m(i_1, \ldots, i_k)\}_{(i_1,\ldots,i_k)\in N}, \hookrightarrow\big).$$

Доведення. Оскільки алгебра $\mathcal{T}_m(i_1, \ldots, i_k)$ визначається для всіх наборів $(i_1, \ldots, i_k)$ з N, то F_m відображає об'єкти та морфізми з $(N, \leq)$ в об'єкти та морфізми в

$$\big(\{\mathcal{T}_m(i_1, \ldots, i_k)\}_{(i_1,\ldots,i_k)\in N}, \hookrightarrow\big),$$

тобто $F_m((i_1, \ldots, i_k)) = \mathcal{T}_m(i_1, \ldots, i_k)$ і $F_m(\leq) = \hookrightarrow$. Крім того, якщо $(i_1, \ldots, i_k) \leq (i_1, \ldots, i_j)$, то $F_m((i_1, \ldots, i_k)) = \mathcal{T}_m(i_1, \ldots, i_k) \hookrightarrow F_m((i_1, \ldots, i_j)) = \mathcal{T}_m(i_1, \ldots, i_j)$. Останнє означає, що F_m є функтором.

Довжиною C^*-алгебри $\mathcal{T}_m(i_1, \ldots, i_k)$ назвемо число k.

Зауваження. Якщо в категорії C^*-алгебр $\big(\{\mathcal{T}_m(i_1, \ldots, i_k)\}_{(i_1,\ldots,i_k)\in N}, \hookrightarrow\big)$ розглядати в ролі об'єктів лише ті C^*-алгебри, довжина яких однакова, то категорія перетворюється на розшарування C^*-алгебр:

$$\big(\{\mathcal{T}_m(i_1, \ldots, i_k)\}_{(i_1,\ldots,i_k)\in N}, \cong\big),$$

де, згідно з лемою 5, роль морфізмів відіграють ізоморфізми C^*-алгебр.

Література

1. B. A. Barnes, *Representation of the l^1-algebra of an inverse semigroup*, Trans. Amer. Math. Soc., **218**, 361 – 396 (1976).
2. L. A. Coburn, *The C^*-algebra generated by an isometry*, Bull. Amer. Math. Soc., **73**, 722 – 726 (1967).
3. S. Y. Jang, *Uniqueness property of C^*-algebras like the Toeplitz algebras*, Trends Math., **6**, 29 – 32 (2003).
4. R. G. Douglas, *On the C^*-algebra of a one-parameter semigroup of isometries*, Acta Math., **128**, 143 – 152 (1972).
5. M. A. Aukhadiev, V. H. Tepoyan, *Isometric representations of totally ordered semigroups*, Lobachevskii J. Math., **33**, № 3, 239 – 243 (2012).
6. G. J. Murphy, *Crossed products of C^*-algebras by semigroups of automorphisms*, Proc. London Math. Soc., **68**, 423 – 448 (1994).
7. Дж. Мерфи, *C^*-алгебра и теория операторов*, Факториал, Москва (1997).
8. K. R. Davidson, *C^*-algebras by example*, Fields Institute Monographs, **6** (1996).
9. R. G. Douglas, *Banach algebra techniques in operator theory*, 2nd ed., Grad. Texts in Math., vol. 179 (1998).
10. С. А. Григорян, А. Ф. Салахутдинов, *C^*-алгебры, порожденные полугруппами с сокращением*, Сиб. мат. журн., **51**, № 1, 16 – 25 (2010).

11. К. Г. Овсепян, *О C^*-алгебрах, порожденных инверсными подполугруппами бициклической полугруппы*, Изв. НАН Армении, математика, **49**, № 5, 67 – 75 (2014).
12. Е. В. Липачева, К. Г. Овсепян, *Структура подалгебр алгебры Теплица, неподвижных относительно конечной группы автоморфизмов*, Изв. вузов. Математика, № 6, 14 – 23 (2015).
13. Т. А. Григорян, К. Г. Овсепян, *Структура и связь подалгебр алгебры Теплица $\mathcal{T}_m$ и $\mathcal{T}(m)$*, Вест. КГЭУ, **19**, № 4, 31 – 36 (2013).
14. K. H. Hovsepyan, E. V. Lipacheva, *The structure of invariant ideals of some subalgebras of Toeplitz algebra*, J. Contemp. Math. Anal., **50**, № 2, 70 – 79 (2015).
15. K. H. Hovsepyan, *The C^*-algebra $\mathcal{T}_m$ as a crossed product*, Proc. Yerevan State Univ., Phys. and Math. Sci., № 3, 24 – 30 (2014).
16. Е. В. Липачева, К. Г. Овсепян, *Автоморфизмы некоторых подалгебр алгебры Теплица*, Сиб. мат. журн., **57**, № 3, 666 – 674 (2016).

Одержано 10.07.19