

**КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ  
ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ ТА ВИРОДЖЕННЯМ У ПОЧАТКОВИЙ МОМЕНТ**

We study boundary-value problem with Dirichlet conditions for nonlinear parabolic equations with variable delay (i.e., delay is a function of time) and degeneration at the initial time. The existence and uniqueness of the classical solution of this problem are proved. A priori estimates of this solution are obtained.

Исследована краевая задача с условием Дирихле для нелинейных параболических уравнений с переменным запаздыванием и вырождением в начальный момент времени. Доказаны существование и единственность классического решения такой задачи и получены его априорные оценки.

**Вступ.** Нелінійні вироджувані диференціальні рівняння використовують при моделюванні різних процесів, зокрема опріснення морської води, руху рідин та газів у пористих середовищах. Такі рівняння виникають і в теоріях еластичності, відносності та оптимізації [13]. Параболічні рівняння із виродженням та задачі для них досліджувались у багатьох роботах (див., наприклад, [1, 4, 8, 11, 13, 18]).

Наявність запізнення в диференціальних рівняннях, що описують певні динамічні процеси, є свідченням того, що стан еволюційної системи в актуальний момент часу залежить від станів в попередні моменти часу. Рівняння із запізненням використовують, зокрема, для моделювання харчових ланцюгів [17], реакції імунної системи людського організму на вірус імунодефіциту [14, 16, 17]. В останні роки інтенсивно розвивається математичний апарат для дослідження рівнянь та систем із запізненням (див., наприклад, [2, 3, 9, 10, 12, 15, 19, 21–24]). На даний час досить повно розроблено теорію диференціальних рівнянь із сталим запізненням. Сталість запізнення, як правило, є додатковим припущенням для спрощення дослідження, що не мотивовано реальними процесами. Більш природними є рівняння зі змінним запізненням. Звичайні диференціальні рівняння зі змінним запізненням досліджуються досить активно [5, 7, 17], але рівняння з частинними похідними зі змінним запізненням не є достатньо вивченими [3].

Наскільки відомо авторам, задачі для параболічних вироджуваних (за рахунок коефіцієнтів) рівнянь із запізненням раніше не вивчались. У даній роботі досліджено мішану задачу для нелінійних параболічних рівнянь зі змінним запізненням, що вироджуються в початковий момент часу. Доведено існування та єдиність класичного розв'язку такої задачі, а також отримано його априорні оцінки.

У першому пункті наведено основні позначення та факти. Постановка задачі, яка розглядається в роботі, та формулювання основних результатів щодо неї міститься у другому пункті. У третьому пункті доведено допоміжні твердження, а в четвертому наведено безпосереднє обґрунтування основних результатів.

**1. Основні позначення та допоміжні факти.** Нагадаємо деякі позначення і поняття, які ми будемо використовувати. Під  $\mathbb{R}^k$ ,  $k \geq 1$ , розумітимемо лінійний простір, складений із впорядкованих наборів  $z = (z_1, \dots, z_k)$  дійсних чисел, з нормою  $|z| = (|z_1|^2 + \dots + |z_k|^2)^{1/2}$ . Через  $C(H)$ , де  $H$  — множина в  $\mathbb{R}^k$ , позначатимемо лінійний простір неперервних на  $H$  функцій. Якщо  $K$  — компакт в  $\mathbb{R}^k$ , то на  $C(K)$  задаємо норму  $\|v\|_{C(K)} := \max_{z \in K} |v(z)|$ , з якою цей простір є банаховим. Кажемо, що послідовність функцій  $\{v_m\}_{m=1}^{\infty}$  збігається до  $v$  в

$C(H)$ , де  $H$  — довільна некомпактна множина в  $\mathbb{R}^k$ , якщо  $\|v_m - v\|_{C(K)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$  для будь-якого компакту  $K \subset H$ .

Нехай  $\alpha \in (0, 1]$ ,  $K$  — компакт в  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Під  $C^{\alpha, \alpha/2}(K)$  розумітимемо банахів простір, що є підпростором  $C(K)$  і складається з функцій  $v(x, t)$ ,  $(x, t) \in K$ , зі скінченною нормою

$$\|v\|_{\alpha, \alpha/2}^K := \|v\|_{C(K)} + \sup_{\substack{(x,t), (x',t) \in K \\ 0 < |x-x'| \leq \rho}} \frac{|v(x, t) - v(x', t)|}{|x - x'|^\alpha} + \sup_{\substack{(x,t), (x,t') \in K \\ 0 < |t-t'| \leq \rho}} \frac{|v(x, t) - v(x, t')|}{|t - t'|^{\alpha/2}},$$

де  $\rho > 0$  — довільне фіксоване число (див. [6, с. 16, 17]).

Через  $C_{\text{loc}}^{\alpha, \alpha/2}(H)$ , де  $H$  — довільна некомпактна множина в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , позначатимемо простір таких функцій  $v$ , що  $v \in C^{\alpha, \alpha/2}(K)$  для довільного компакту  $K \subset H$ . Під  $C^{2,1}(D)$  (відповідно  $C^{2,1}(\bar{D})$ ), де  $D$  — область в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , розумітимемо лінійний простір функцій  $v(x, t)$ ,  $(x, t) \in D$  (відповідно,  $(x, t) \in \bar{D}$ ), які разом зі своїми похідними  $v_{x_k}, v_{x_k x_l}$ ,  $k, l = \bar{1}, \bar{n}$ ,  $v_t$  визначені і неперервні на  $D$  (відповідно  $\bar{D}$ ). Через  $C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\bar{D})$ , якщо  $D$  — обмежена область в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , позначатимемо банахів простір функцій  $v$  з простору  $C^{2,1}(\bar{D})$  зі скінченною нормою

$$\|v\|_{2+\alpha, 1+\alpha/2}^{\bar{D}} = \|v\|_{C(\bar{D})} + \sum_{k=1}^n \|v_{x_k}\|_{\alpha, \alpha/2}^{\bar{D}} + \sum_{k,l=1}^n \|v_{x_k x_l}\|_{\alpha, \alpha/2}^{\bar{D}} + \|v_t\|_{\alpha, \alpha/2}^{\bar{D}}.$$

Під  $C_{\text{loc}}^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(G)$ , де  $G$  — область в  $\mathbb{R}^{n+1}$  або об'єднання області з частиною своєї межі, розумітимемо простір таких функцій  $v$ , що  $v \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\bar{D})$  для довільної обмеженої області  $D$  такої, що  $\bar{D} \subset G$ .

**Твердження 1.** Нехай послідовність функцій  $\{u_m\}_{m=1}^\infty$  є обмеженою в  $C^{\alpha, \alpha/2}(K)$ , де  $K$  — компакт в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , тобто

$$\|u_m\|_{\alpha, \alpha/2}^K \leq C_1, \quad m \in \mathbb{N},$$

де  $C_1 > 0$  — стала, що не залежить від  $m$ . Тоді існують підпослідовність  $\{u_{m_j}\}_{j=1}^\infty$  послідовності  $\{u_m\}_{m=1}^\infty$  та функція  $u \in C^{\alpha, \alpha/2}(K)$  такі, що  $u_{m_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} u$  в  $C(K)$ .

*Доведення.* Дане твердження випливає з теореми Арцела–Асколі.

**Твердження 2.** Нехай  $H$  — довільна некомпактна множина в  $\mathbb{R}^{n+1}$  така, що  $H = \bigcup_{i=1}^\infty K_i$ , де  $\{K_i\}_{i=1}^\infty$  — сім'я компактів, причому  $K_i \subset K_{i+1}$  для кожного  $i \in \mathbb{N}$ . Припустимо, що  $\{u_m\}_{m=1}^\infty$  — послідовність функцій з  $C_{\text{loc}}^{\alpha, \alpha/2}(H)$  така, що для будь-якого  $i \in \mathbb{N}$  послідовність звужень членів даної послідовності на  $K_i$  є обмеженою в  $C^{\alpha, \alpha/2}(K_i)$ , тобто

$$\|u_m\|_{\alpha, \alpha/2}^{K_i} \leq C_2, \quad m \in \mathbb{N},$$

де  $C_2 > 0$  — стала, яка не залежить від  $m$ , але може залежати від  $K_i$ . Тоді існують підпослідовність  $\{u_{m_j}\}_{j=1}^\infty$  послідовності  $\{u_m\}_{m=1}^\infty$  та функція  $u \in C_{\text{loc}}^{\alpha, \alpha/2}(H)$  такі, що

$$u_{m_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} u \quad \text{в } C(H). \quad (1)$$

*Доведення.* Будемо використовувати діагональний процес. Згідно з твердженням 1 з послідовності  $\{u_m\}_{m=1}^\infty$  можна вибрати підпослідовність, звуження членів якої на  $K_1$  збіжні в

$C(K_1)$  до функції  $u^1 \in C^{\alpha, \alpha/2}(K_1)$ . Далі, з цієї підпослідовності вибираємо підпослідовність, звуження членів якої на  $K_2$  збіжні в  $C(K_2)$  до  $u^2 \in C^{\alpha, \alpha/2}(K_2)$ . Очевидно, що  $u^2 = u^1$  на  $K_1$ . Продовжуючи цей процес далі, отримуємо послідовності підпослідовностей послідовності  $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ , кожна з яких, починаючи з другої є підпослідовністю попередньої і рівномірно збігається на відповідному компактi із сім'ї  $\{K_i\}_{i=1}^\infty$ . Також отримаємо сім'ю функцій  $\{u^i \in C^{\alpha, \alpha/2}(K_i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ , які є границями відповідних підпослідовностей. Зазначимо, що  $u^{i+1} = u^i$  на  $K_i$  для кожного  $i \in \mathbb{N}$ . Складемо з отриманих підпослідовностей нескінченну матрицю так, що у  $i$ -му рядку буде знаходитись підпослідовність, збіжна до  $u^i$  в  $C(K_i)$ . Очевидно, що елементи головної діагоналі цієї матриці утворюють послідовність  $\{u_{m_j}\}_{j=1}^\infty$ , збіжну до  $u^i$  в  $C(K_i)$  для кожного  $i \in \mathbb{N}$ . Побудуємо функцію  $u \in C_{\text{loc}}^{\alpha, \alpha/2}(H)$  за правилом: для кожного  $x \in H$  вибираємо  $i \in \mathbb{N}$  таке, що  $x \in K_i$ , і визначаємо  $u(x) := u^i(x)$ . Легко переконатись, що для функції  $u$  виконується (1).

Твердження 2 доведено.

**2. Формулювання задачі та основних результатів.** Нехай  $\Omega$  — обмежена область в  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ , з межею  $\partial\Omega$ ,  $T > 0$  — деяке число. Покладемо  $Q := \Omega \times (0, T]$ ,  $\tilde{Q} := \bar{\Omega} \times (0, T]$ ,  $\Sigma := \partial\Omega \times (0, T]$ . Нехай  $\tau: (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  — задана неперервна функція така, що  $0 \leq \tau(t) < t$  для всіх  $t \in (0, T]$ .

Розглянемо задачу: знайти функцію  $u \in C(\tilde{Q}) \cap C^{2,1}(Q)$ , яка задовольняє рівняння

$$\begin{aligned} Pu(x, t) := & p(x, t)u_t(x, t) - \sum_{k,l=1}^n a_{kl}(x, t)u_{x_k x_l}(x, t) + \\ & + \sum_{k=1}^n a_k(x, t)u_{x_k}(x, t) + a_0(x, t)u(x, t) - \\ & - g(x, t, u(x, t), u(x, t - \tau(t))) = f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \end{aligned} \tag{2}$$

крайову умову

$$Ru(x, t) := u(x, t) = h(x, t), \quad (x, t) \in \Sigma, \tag{3}$$

та аналог початкової умови

$$\limsup_{t \rightarrow 0+} \max_{x \in \bar{\Omega}} |u(x, t)| < \infty \tag{4}$$

(зауважимо, що умова (4) рівносильна умові  $\sup_{(x,t) \in \tilde{Q}} |u(x, t)| < \infty$ ).

Припустимо, що виконуються такі умови:

(A)  $a_{kl}, a_k, a_0$ , — неперервні на  $Q$  функції,  $a_{kl} = a_{lk}$ ,  $k, l = \overline{1, n}$ ,  $\inf_{(x,t) \in Q} a_0(x, t) > 0$  і

$$\sum_{k,l=1}^n a_{kl}(x, t)\xi_k \xi_l \geq \mu(t) \sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 \quad \forall (x, t) \in Q \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

де  $\mu \in C((0, T])$ ,  $\mu(t) > 0$  для кожного  $t \in (0, T]$ ;

(T)  $\tau: (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  — така неперервна функція, що  $0 \leq \tau(t) < t$  для всіх  $t \in (0, T]$ ;

(P)  $p \in C(Q)$ ,  $p(x, t) > 0$  для кожного  $(x, t) \in Q$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0} p(x, t) = 0$  для кожного  $x \in \Omega$  та, крім того, існує така функція  $\varphi \in C((0, T])$ , що

$$\int_0^T \varphi(s) ds = +\infty, \quad \sup_{t \in (0, T]} \int_{t-\tau(t)}^t \varphi(s) ds < \infty, \quad \sup_{(x,t) \in Q} p(x, t)\varphi(t) < \infty \quad \forall t \in (0, T];$$

( $\mathcal{G}$ )  $g(x, t, \xi, \eta)$ ,  $(x, t, \xi, \eta) \in \Omega \times (0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , — неперервна за всіма змінними і неперервно диференційовна за змінними  $\xi$  та  $\eta$  функція, причому існують визначені на  $Q$  невід'ємні функції  $g_1, g_2$  такі, що

$$0 \leq g_\xi(x, t, \xi, \eta) \leq g_1(x, t) \quad \forall (x, t) \in Q \quad \forall (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2,$$

$$0 \leq g_\eta(x, t, \xi, \eta) \leq g_2(x, t) \quad \forall (x, t) \in Q \quad \forall (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2,$$

$$\inf_{(x,t) \in Q} (a_0(x, t) - g_1(x, t)) =: a_0^- > 0,$$

$$\sup_{(x,t) \in Q} g_2(x, t) =: g_2^+ < \infty;$$

крім того,  $g(x, t, 0, 0) = 0$  для будь-яких  $(x, t) \in Q$ ;

( $\mathcal{F}$ )  $f \in C(Q)$ ,  $h \in C(\Sigma)$  — обмежені функції.

**Зауваження 1.** Прикладом функцій, що задовольняють умову ( $\mathcal{P}$ ), є  $p \in C(Q)$ ,  $p(x, t) \sim t^\alpha$  при  $t \rightarrow 0+$  рівномірно по  $x \in \Omega$ ,  $\varphi(t) = t^{-\alpha}$ ,  $t \in (0, T]$ ,  $\tau(t) \sim t^\gamma$  при  $t \rightarrow 0+$ , де  $\gamma > \alpha > 1$  — деякі числа.

**Зауваження 2.** Умову ( $\mathcal{G}$ ) задовольняє, зокрема, функція  $g(x, t, \xi, \eta) = g_1(x, t)\xi + g_2(x, t)\eta$ , де функції  $g_1, g_2$  такі, як в умові ( $\mathcal{G}$ ), і, як наслідок, цю умову задовольняє функція  $g = 0$ .

Тепер сформулюємо основні результати роботи.

**Теорема 1.** Нехай виконуються умови ( $\mathcal{A}$ ), ( $\mathcal{T}$ ), ( $\mathcal{P}$ ), ( $\mathcal{G}$ ) і  $a_0^- - g_2^+ > 0$ . Припустимо, що  $u_1, u_2$  — розв'язки задач, що відрізняються від задачі (2)–(4) лише тим, що замість  $f, h$  замінимо відповідно на  $f_1, h_1$  та  $f_2, h_2$  з такими ж властивостями, як  $f, h$  (див. ( $\mathcal{F}$ )). Тоді виконується нерівність

$$\begin{aligned} & \min \left\{ \frac{1}{a_0^- - g_2^+} \inf_{(y,s) \in Q} (f_1(y, s) - f_2(y, s)), \inf_{(y,s) \in \Sigma} (h_1(y, s) - h_2(y, s)), 0 \right\} \leq \\ & \leq u_1(x, t) - u_2(x, t) \leq \\ & \leq \max \left\{ \frac{1}{a_0^- - g_2^+} \sup_{(y,s) \in Q} (f_1(y, s) - f_2(y, s)), \sup_{(y,s) \in \Sigma} (h_1(y, s) - h_2(y, s)), 0 \right\}, \quad (x, t) \in Q. \end{aligned} \quad (5)$$

Зауважимо, що з цієї теореми безпосередньо випливає неперервна залежність розв'язку задачі (2)–(4) від початкових даних.

**Наслідок 1.** Нехай виконуються умови теореми 1 і, крім того,

$$f_1(x, t) \leq f_2(x, t) \quad \forall (x, t) \in Q, \quad h_1(x, t) \leq h_2(x, t) \quad \forall (x, t) \in \Sigma.$$

Тоді виконується нерівність

$$u_1(x, t) \leq u_2(x, t) \quad \forall (x, t) \in Q.$$

**Наслідок 2.** Нехай виконуються умови ( $\mathcal{A}$ ), ( $\mathcal{T}$ ), ( $\mathcal{P}$ ), ( $\mathcal{G}$ ), ( $\mathcal{F}$ ) і  $a_0^- - g_2^+ > 0$ . Тоді для розв'язку задачі (2)–(4) правильно є оцінка

$$\min \left\{ \frac{1}{a_0^- - g_2^+} \inf_{(y,s) \in Q} f(y,s), \inf_{(y,s) \in \Sigma} h(y,s), 0 \right\} \leq u(x,t) \leq \max \left\{ \frac{1}{a_0^- - g_2^+} \sup_{(y,s) \in Q} f(y,s), \sup_{(y,s) \in \Sigma} h(y,s), 0 \right\}, \quad (x,t) \in Q.$$

**Наслідок 3.** Нехай виконуються умови (А), (Р), (Т), (G), (F) і  $a_0^- - g_2^+ > 0$ . Тоді задача (2)–(4) має не більше одного розв’язку.

Згідно з означеннями з п. 1, під  $C_{loc}^{\alpha, \alpha/2}(Q)$  розумітимемо простір таких функцій  $v \in C(Q)$ , що для строго внутрішньої підобласті  $\Omega'$  області  $\Omega$  (тобто,  $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ ) та будь-якого числа  $\delta \in (0, T)$  звуження  $v$  на  $\overline{\Omega'} \times [\delta, T]$  належить простору  $C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{\Omega'} \times [\delta, T])$ , а під  $C_{loc}^{\alpha, \alpha/2}(\tilde{Q})$  (відповідно  $C_{loc}^{\alpha, \alpha/2}(\Sigma)$ ) – простір таких функцій  $v \in C(\tilde{Q})$  (відповідно  $C(\Sigma)$ ), що будь-якого числа  $\delta \in (0, T)$  звуження  $v$  на  $\overline{\Omega} \times [\delta, T]$  (відповідно  $\partial\Omega \times [\delta, T]$ ) належить простору  $C^{\alpha, \alpha/2}(\overline{\Omega} \times [\delta, T])$  (відповідно  $C^{\alpha, \alpha/2}(\partial\Omega \times [\delta, T])$ ).

Під  $C_{loc}^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(Q)$  розумітимемо простір таких функцій  $v \in C^{2,1}(Q)$  що їх похідні  $v_{x_k}$ ,  $v_{x_k x_l}$ ,  $k, l = \overline{1, n}$ ,  $v_t$  належать простору  $C_{loc}^{\alpha, \alpha/2}(Q)$ .

Через  $C_{loc}^{\alpha, \alpha/2, 1, 1}(\overline{\Omega} \times (0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$  позначатимемо простір неперервних функцій  $\tilde{g}(x, t, \xi, \eta)$ ,  $(x, t, \xi, \eta) \in \overline{\Omega} \times (0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , кожна з яких є неперервно диференційовною за змінними  $\xi, \eta$  та для будь-якого  $\delta \in (0, T)$  існує така додатна стала  $L = L(\tilde{g})$ , що

$$|\tilde{g}(x, t, \xi, \eta) - \tilde{g}(y, s, \bar{\xi}, \bar{\eta})| \leq L(|x - y|^\alpha + |t - s|^{\alpha/2} + |\xi - \bar{\xi}| + |\eta - \bar{\eta}|)$$

для довільних  $(x, t, \xi, \eta), (y, s, \bar{\xi}, \bar{\eta}) \in \overline{\Omega} \times [\delta, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

Позначимо через  $Lip_{loc}((0, T])$  простір функцій, що задовольняють умову Ліпшиця на кожному відрізку проміжку  $(0, T]$ .

**Теорема 2.** Нехай виконуються умови (А), (Т), (Р), (G), (F) і  $a_0^- - g_2^+ > 0$  та

(B<sub>1</sub>)  $\partial a_{kl} / \partial x_s \in C(\tilde{Q})$ ,  $k, l, s = \overline{1, n}$ ,

(B<sub>2</sub>)  $\tau \in Lip_{loc}((0, T])$ .

Крім того, припустимо, що для деякого  $\alpha \in (0, 1]$  :

(B<sub>3</sub>)  $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$ ,

(B<sub>4</sub>)  $p, a_{kl}, a_k, a_0 \in C_{loc}^{\alpha, \alpha/2}(\tilde{Q})$ ,  $k, l = \overline{1, n}$ ,  $g \in C_{loc}^{\alpha, \alpha/2, 1, 1}(\overline{\Omega} \times (0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ ,  $f \in C_{loc}^{\alpha, \alpha/2}(\tilde{Q})$ ,  $h \in C_{loc}^{\alpha, \alpha/2}(\Sigma)$ .

Тоді існує єдиний розв’язок задачі (2)–(4), що належить простору  $C_{loc}^{\alpha, \alpha/2}(\tilde{Q}) \cap C_{loc}^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(Q)$ .

**3. Допоміжні твердження.** Розглянемо таку задачу: знайти функцію  $w \in C(\tilde{Q}) \cap C^{2,1}(Q)$ , що задовольняє рівняння

$$p(x,t)w_t(x,t) - \sum_{k,l=1}^n a_{kl}(x,t)w_{x_k x_l}(x,t) + \sum_{k=1}^n a_k(x,t)w_{x_k}(x,t) + \widehat{a}_0(x,t)w(x,t) - \widehat{g}(x,t)w(x,t - \tau(t)) = \widehat{f}(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{6}$$

та умови

$$w(x,t) = \widehat{h}(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma, \tag{7}$$

$$\limsup_{t \rightarrow 0^+} \max_{x \in \bar{\Omega}} |w(x, t)| < \infty. \quad (8)$$

Ми припускаємо, що функції  $a_{k,l}$ ,  $a_k$ ,  $k, l = \overline{1, n}$ ,  $\tau$ ,  $p$  мають ті ж властивості, що вказані в умовах відповідно  $(\mathcal{A})$ ,  $(\mathcal{T})$  і  $(\mathcal{P})$ , функції  $\hat{f}$ ,  $\hat{h}$  з мають такі ж властивості, як відповідно  $f, h$  (див.  $(\mathcal{F})$ ), а функції  $\hat{a}_0$ ,  $\hat{g}$  задовольняють умови

$$\hat{a}_0, \hat{g} \in C(Q), \quad \hat{a}_0^- := \inf_{(x,t) \in Q} \hat{a}_0(x, t) > -\infty, \quad \hat{g}^+ := \sup_{(x,t) \in Q} \hat{g}(x, t) < +\infty.$$

**Зауваження 3.** Якщо  $p(x, t) \geq p_0 > 0$  для всіх  $(x, t) \in \Omega \times [0, T]$ , то можна не накладати умову  $\tau(t) < t$ , а умову (4) замінити початковою умовою

$$u(x, t) = u_0(x, t), \quad (x, t) \in \bar{\Omega} \times E_0. \quad (9)$$

де  $E_0$  — множина, що складається з таких чисел  $t - \tau(t)$ , що  $t - \tau(t) \leq 0$  і  $t \in [0, T]$ , а також числа 0. Таку задачу досліджено у [3] і там, зокрема, отримано такий результат.

**Твердження А ([3]).** Нехай  $\hat{g} \geq 0$  на  $Q$  і  $\hat{a}_0^- - \hat{g}^+ > 0$ . Тоді для довільного розв'язку  $w$  задачі (6), (7), (9) виконується оцінка

$$\begin{aligned} \min \left\{ \frac{1}{\hat{a}_0^- - \hat{g}^+} \inf_{(y,s) \in Q} \hat{f}(y, s), \min_{(y,s) \in \bar{\Sigma}} \hat{h}(y, s), \min_{(y,s) \in \bar{\Omega} \times E_0} u_0(y, s), 0 \right\} &\leq w(x, t) \leq \\ &\leq \max \left\{ \frac{1}{\hat{a}_0^- - \hat{g}^+} \sup_{(y,s) \in Q} \hat{f}(y, s), \max_{(y,s) \in \bar{\Sigma}} \hat{h}(y, s), \max_{(x,s) \in \bar{\Omega} \times E_0} u_0(y, s), 0 \right\}, \\ &(x, t) \in \bar{\Omega} \times (E_0 \cup [0, T]). \end{aligned}$$

**Твердження 3.** Нехай  $\hat{g} \geq 0$  на  $Q$  і  $\hat{a}_0^- - \hat{g}^+ > 0$ . Тоді для розв'язку задачі (6)–(8) справджується оцінка

$$\begin{aligned} \min \left\{ \frac{1}{\hat{a}_0^- - \hat{g}^+} \inf_{(y,s) \in Q} \hat{f}(y, s), \inf_{(y,s) \in \Sigma} \hat{h}(y, s), 0 \right\} &\leq w(x, t) \leq \\ &\leq \max \left\{ \frac{1}{\hat{a}_0^- - \hat{g}^+} \sup_{(y,s) \in Q} \hat{f}(y, s), \sup_{(y,s) \in \Sigma} \hat{h}(y, s), 0 \right\}, \quad (x, t) \in Q. \end{aligned} \quad (10)$$

**Доведення.** Введемо такі позначення:

$$\theta(t) := \int_T^t \varphi(s) ds, \quad \varkappa(t) := \int_{t-\tau(t)}^t \varphi(s) ds, \quad t \in (0, T].$$

На підставі умови  $(\mathcal{P})$  маємо, що  $\theta(t) \leq 0$  при  $t \in (0, T]$ ,  $\theta$  монотонно зростає на  $(0, T]$ ,  $\theta(T) = 0$ ,  $\theta(t) \rightarrow -\infty$  при  $t \rightarrow -\infty$ ,  $\varkappa(t) > 0$  при  $t \in (0, T]$  є обмеженою.

Нехай  $w$  — розв'язок задачі (6)–(8) і  $M > 0$  — така стала, що

$$|w(x, t)| \leq M, \quad (x, t) \in \tilde{Q}. \quad (11)$$

Позначимо

$$w^\mu(x, t) := w(x, t)e^{\mu\theta(t)}, \quad (x, t) \in \tilde{Q},$$

де  $\mu > 0$  — поки що довільне число. Тоді

$$w(x, t) := w^\mu(x, t)e^{-\mu\theta(t)}, \quad (x, t) \in \tilde{Q}. \tag{12}$$

Підставивши у рівність (6) вираз  $w$ , заданий формулою (12), та врахувавши рівності

$$w_t(x, t) = w_t^\mu(x, t)e^{-\mu\theta(t)} - \mu\varphi(t)w^\mu(x, t)e^{-\mu\theta(t)}, \quad w_{x_k}(x, t) = w_{x_k}^\mu(x, t)e^{-\mu\theta(t)}, \quad k = \overline{1, n},$$

$$w(x, t - \tau(t)) = w^\mu(x, t - \tau(t))e^{-\mu \int_T^{t-\tau(t)} \varphi(s)ds} \equiv e^{\mu\varphi(t)}w^\mu(x, t - \tau(t))e^{-\mu\theta(t)}, \quad t \in (0, T],$$

магимемо

$$\begin{aligned} & p(x, t)w_t^\mu(x, t)e^{-\mu\theta(t)} - \sum_{k,l=1}^n a_{kl}(x, t)w_{x_k x_l}^\mu(x, t)e^{-\mu\theta(t)} + \\ & + \sum_{k=1}^n a_k(x, t)w_{x_k}^\mu(x, t)e^{-\mu\theta(t)} + (\hat{a}_0(x, t) - \mu p(x, t)\varphi(t))w^\mu(x, t)e^{-\mu\theta(t)} - \\ & - \hat{g}(x, t)e^{\mu\varphi(t)}w^\mu(t - \tau(t))e^{-\mu\theta(t)} = \hat{f}(x, t), \quad (x, t) \in Q. \end{aligned}$$

Домноживши цю рівність на  $e^{\mu\theta(t)}$  і позначивши

$$\hat{a}_0^\mu(x, t) := \hat{a}_0(x, t) - \mu p(x, t)\varphi(t),$$

$$\hat{g}^\mu(x, t) := \hat{g}(x, t)e^{\mu\varphi(t)}, \quad f^\mu(x, t) := \hat{f}(x, t)e^{\mu\theta(t)} \quad \forall (x, t) \in Q,$$

отримаємо

$$\begin{aligned} & p(x, t)w_t^\mu(x, t) - \sum_{k,l=1}^n a_{kl}(x, t)w_{x_k x_l}^\mu(x, t) + \sum_{k=1}^n a_k(x, t)w_{x_k}^\mu(x, t) + \\ & + \hat{a}_0^\mu(x, t)w^\mu(x, t) - \hat{g}^\mu(x, t)w^\mu(t - \tau(t)) = f^\mu(x, t), \quad (x, t) \in Q. \end{aligned} \tag{13}$$

З умови (7) та співвідношення (12) маємо

$$w^\mu(x, t) = h^\mu(x, t), \quad (x, t) \in \Sigma, \tag{14}$$

де  $h^\mu(x, t) := \hat{h}(x, t)e^{\mu\theta(t)}$ ,  $(x, t) \in \Sigma$ .

Нехай  $\varepsilon \in (0, T)$  — довільне число. Позначимо через  $E_\varepsilon$  множину, що складається з таких чисел  $t - \tau(t)$ , що  $t - \tau(t) < \varepsilon$  при  $t \geq \varepsilon$ , а також числа  $\varepsilon$ . Покладемо

$$Q_\varepsilon := \Omega \times (\varepsilon, T] \quad (\text{тоді } \overline{Q_\varepsilon} := \overline{\Omega} \times [\varepsilon, T]), \quad \Sigma_\varepsilon := \partial\Omega \times (\varepsilon, T].$$

Розглянемо задачу: знайти функцію  $w \in C(\overline{\Omega} \times (E_\varepsilon \cup (\varepsilon, T])) \cap C^{2,1}(Q_\varepsilon)$ , яка задовольняє рівняння

$$\begin{aligned} & p(x, t)w_t(x, t) - \sum_{k,l=1}^n a_{kl}(x, t)w_{x_k x_l}(x, t) + \sum_{k=1}^n a_k w_{x_k}(x, t) + \\ & + \hat{a}_0^\mu(x, t)w(x, t) - \hat{g}^\mu(x, t)w(t - \tau(t)) = f^\mu(x, t), \quad (x, t) \in Q_\varepsilon, \end{aligned} \tag{15}$$

крайову умову

$$w(x, t) = h^\mu(x, t), \quad (x, t) \in \Sigma_\varepsilon, \tag{16}$$

і початкову умову

$$w(x, t) = w^\mu(x, t), \quad (x, t) \in \overline{\Omega} \times E_\varepsilon. \tag{17}$$

Ця задача вже без виродження, а тому можна застосувати результати, одержані у роботі [3]. Переконаємося, що для розв’язків задачі (15)–(17) при досить малих значеннях  $\mu$  виконуються умови твердження А роботи [3]. Справді, з умови  $\widehat{g} \geq 0$  на  $Q$  безпосередньо випливає нерівність  $\widehat{g}^\mu \geq 0$  на  $Q$ . Покажемо, що існує таке  $\mu^* > 0$ , що  $\widehat{a}_0^{\mu,-} - \widehat{g}^{\mu,+} > 0$  для будь-якого  $\mu \in (0, \mu^*]$ , де  $\widehat{a}_0^{\mu,-} := \inf_{(x,t) \in Q} \widehat{a}_0^\mu(x, t)$ ,  $\widehat{g}^{\mu,+} := \sup_{(x,t) \in Q} \widehat{g}^\mu(x, t)$ . Для цього введемо позначення:  $(p\varphi)^+ := \sup_{(x,t) \in Q} (p(x, t)\varphi(t))$ ,  $\varkappa^+ := \sup_{t \in (0, T]} \varkappa(t)$ . Легко бачити, що

$$\widehat{a}_0^{\mu,-} = \inf_{(x,t) \in Q} (\widehat{a}_0(x, t) - \mu p(x, t)\varphi(t)) \geq \widehat{a}_0^- - \mu(p\varphi)^+, \quad \mu > 0, \tag{18}$$

а також

$$\widehat{g}^{\mu,+} = \sup_{(x,t) \in Q} (\widehat{g}(x, t)e^{\mu\varkappa(t)}) \leq \widehat{g}^+ e^{\mu\varkappa^+}, \quad \mu > 0. \tag{19}$$

З (18) і (19) отримуємо  $\widehat{a}_0^{\mu,-} - \widehat{g}^{\mu,+} \geq \widehat{a}_0^- - \mu(p\varphi)^+ - \widehat{g}^+ e^{\mu\varkappa^+} =: l(\mu)$  при  $\mu > 0$ . Розглянемо функцію  $l(\mu)$ ,  $\mu \in [0, +\infty)$ . Очевидно, що вона є неперервною і  $l(0) = \widehat{a}_0^- - \widehat{g}^+ > 0$ . Звідси випливає існування такого  $\mu^* > 0$ , що  $l(\mu) > 0$  при  $\mu \in [0, \mu^*]$ . Отже,

$$\widehat{a}_0^{\mu,-} - \widehat{g}^{\mu,+} \geq l(\mu) > 0 \quad \text{при} \quad \mu \in [0, \mu^*]. \tag{20}$$

Таким чином, при  $\mu \in [0, \mu^*]$  умови твердження А роботи [3] у випадку задачі (15)–(17) виконуються.

А оскільки на підставі рівностей (13) і (14) легко зробити висновок, що звуження  $w^\mu$  на  $\overline{\Omega} \times (E_\varepsilon \cup (\varepsilon, T])$  є розв’язком задачі (15)–(17), то, використавши твердження А роботи [3], для всіх  $\mu \in [0, \mu^*]$  отримаємо оцінку

$$\begin{aligned} & \min \left\{ \frac{1}{\widehat{a}_0^{\mu,-} - \widehat{g}^{\mu,+}} \inf_{(y,s) \in Q_\varepsilon} f^\mu(y, s), \inf_{(y,s) \in \Sigma_\varepsilon} h^\mu(y, s), \inf_{(y,s) \in \overline{\Omega} \times E_\varepsilon} w^\mu(y, s), 0 \right\} \leq w^\mu(x, t) \leq \\ & \leq \max \left\{ \frac{1}{\widehat{a}_0^{\mu,-} - \widehat{g}^{\mu,+}} \sup_{(y,s) \in Q_\varepsilon} f^\mu(y, s), \sup_{(y,s) \in \Sigma_\varepsilon} h^\mu(y, s), \sup_{(y,s) \in \overline{\Omega} \times E_\varepsilon} w^\mu(y, s), 0 \right\}, \quad (x, t) \in Q_\varepsilon. \end{aligned} \tag{21}$$

Зрозуміло, що для будь-якого  $\varepsilon \in (0, T)$  маємо

$$\begin{aligned} \inf_{(y,s) \in Q_\varepsilon} f^\mu(y, s) &\geq \inf_{(y,s) \in Q} f^\mu(y, s), & \inf_{(y,s) \in \Sigma_\varepsilon} h^\mu(y, s) &\geq \inf_{(y,s) \in \Sigma} h^\mu(y, s), \\ \sup_{(y,s) \in Q_\varepsilon} f^\mu(y, s) &\leq \sup_{(y,s) \in Q} f^\mu(y, s), & \sup_{(y,s) \in \Sigma_\varepsilon} h^\mu(y, s) &\leq \sup_{(y,s) \in \Sigma} h^\mu(y, s). \end{aligned} \tag{22}$$

Також легко переконатися, врахувавши оцінку (11) і монотонність  $\theta$ , що

$$\sup_{(y,s) \in \overline{\Omega} \times E_\varepsilon} |w^\mu(y, s)| \leq \sup_{(y,s) \in \overline{\Omega} \times (0, \varepsilon]} |w(y, s)e^{\mu\theta(s)}| \leq M e^{\mu\theta(\varepsilon)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow +0} 0. \tag{23}$$



На підставі (22) і (23) з (21), спрямувавши  $\varepsilon$  до 0, отримаємо

$$\begin{aligned} & \min \left\{ \frac{1}{\widehat{a}_0^{\mu,-} - \widehat{g}^{\mu,+}} \inf_{(y,s) \in Q} f^\mu(y,s), \inf_{(y,s) \in \Sigma} h^\mu(y,s), 0 \right\} \leq w^\mu(x,t) \leq \\ & \leq \max \left\{ \frac{1}{\widehat{a}_0^{\mu,-} - \widehat{g}^{\mu,+}} \sup_{(y,s) \in Q} f^\mu(y,s), \sup_{(y,s) \in \Sigma} h^\mu(y,s), 0 \right\}, \quad (x,t) \in Q, \quad \mu \in (0, \mu^*]. \end{aligned} \quad (24)$$

Нехай

$$\begin{aligned} Q_- & := \{(x,t) \in Q \mid f(x,t) < 0\}, & Q_+ & := \{(x,t) \in Q \mid f(x,t) > 0\}, \\ \Sigma_- & := \{(x,t) \in Q \mid h(x,t) < 0\}, & \Sigma_+ & := \{(x,t) \in Q \mid h(x,t) > 0\}. \end{aligned}$$

У випадку  $Q_- \neq \emptyset$ , врахувавши, що  $0 < e^{\mu\theta(s)} \leq 1 \quad \forall s \in (0, T]$ , одержуємо

$$\inf_{(y,s) \in Q} f^\mu(y,s) = \inf_{(y,s) \in Q_-} f(y,s)e^{\mu\theta(s)} \geq \inf_{(y,s) \in Q_-} f(y,s) = \inf_{(y,s) \in Q} f(y,s),$$

а тому (див. (20))

$$\frac{1}{\widehat{a}_0^{\mu,-} - \widehat{g}_\mu^+} \inf_{(y,s) \in Q} f^\mu(y,s) \geq \frac{1}{\widehat{a}_0^{\mu,-} - \widehat{g}_\mu^+} \inf_{(y,s) \in Q} f(y,s) \geq \frac{1}{l(\mu)} \inf_{(y,s) \in Q} f(y,s).$$

Отже, в цьому випадку в лівій частині нерівності (24) перший член можна замінити на  $\frac{1}{l(\mu)} \inf_{(y,s) \in Q} f(y,s)$ . Очевидно, що те ж саме можна зробити і тоді, коли  $Q_- = \emptyset$ , оскільки в цьому випадку перший член нерівності (24) є невід'ємним, а отже, не визначає значення лівої частини нерівності (24).

Провівши аналогічні міркування щодо другого члена лівої частини, а також першого та другого членів правої частини нерівності (24), будемо мати

$$\begin{aligned} & \min \left\{ \frac{1}{l(\mu)} \inf_{(y,s) \in Q} f(y,s), \inf_{(y,s) \in \Sigma} h(y,s), 0 \right\} \leq w(x,t)e^{\mu\theta(t)} \leq \\ & \leq \max \left\{ \frac{1}{l(\mu)} \sup_{(y,s) \in Q} f(y,s), \sup_{(y,s) \in \Sigma} h(y,s), 0 \right\}, \quad (x,t) \in Q, \quad \mu \in (0, \mu^*]. \end{aligned} \quad (25)$$

Зафіксувавши довільним чином вибрану точку  $(x,t) \in Q$ , перейдемо в (25) до границі при  $\mu \rightarrow +0$ . У результаті, взявши до уваги, що  $l(\mu) \xrightarrow{\mu \rightarrow +0} \widehat{a}_0^- - \widehat{g}^+$ , отримаємо оцінку (10).

Твердження 3 доведено.

**Твердження 4.** Для довільних  $(x,t) \in Q$ ,  $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$  справджується рівність

$$\begin{aligned} & g(x,t,\xi_1,\eta_1) - g(x,t,\xi_2,\eta_2) = \\ & = (\xi_1 - \xi_2)G_1(x,t,\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2) + (\eta_1 - \eta_2)G_2(x,t,\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2), \end{aligned}$$

де

$$G_1(x,t,\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2) := \int_0^1 g_\xi(x,t,z(\xi_1 - \xi_2) + \xi_2, z(\eta_1 - \eta_2) + \eta_2) dz, \quad (26)$$

$$G_2(x, t, \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) := \int_0^1 g_\eta(x, t, z(\xi_1 - \xi_2) + \xi_2, z(\eta_1 - \eta_2) + \eta_2) dz, \quad (27)$$

причому

$$0 \leq G_i(x, t, \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) \leq g_i(x, t), \quad i = 1, 2.$$

Дане твердження доведено у [3].

**4. Обґрунтування основних результатів. Доведення теореми 1.** Позначимо  $w(x, t) := u_1(x, t) - u_2(x, t)$ ,  $(x, t) \in \tilde{Q}$ . Розглядаючи різницю виразів  $Pu_1$  і  $Pu_2$ , на підставі твердження 4 отримуємо рівність

$$\begin{aligned} p(x, t)w_t(x, t) - \sum_{k,l=1}^n a_{kl}(x, t)w_{x_k x_l}(x, t) + \sum_{k=1}^n a_k(x, t)w_{x_k}(x, t) + \\ + \hat{a}_0(x, t)w(x, t) - \hat{g}(x, t)w(x, t - \tau(t)) = \hat{f}(x, t), \quad (x, t) \in Q, \end{aligned} \quad (28)$$

де

$$\begin{aligned} \hat{a}_0(x, t) &:= a_0(x, t) - G_1(x, t, u_1(x, t), u_2(x, t), u_1(x, t - \tau(t)), u_2(x, t - \tau(t))), \\ \hat{g}(x, t) &:= G_2(x, t, u_1(x, t), u_2(x, t), u_1(x, t - \tau(t)), u_2(x, t - \tau(t))), \\ \hat{f}(x, t) &= f_1(x, t) - f_2(x, t), \quad (x, t) \in Q, \end{aligned}$$

а  $G_1$  і  $G_2$  визначено, відповідно, формулами (26) і (27). Легко бачити, що

$$w(x, t) = \hat{h}(x, t), \quad (x, t) \in \Sigma, \quad (29)$$

$$\limsup_{t \rightarrow 0^+} \max_{x \in \Omega} |w(x, t)| < \infty, \quad (30)$$

де

$$\hat{h}(x, t) := h_1(x, t) - h_2(x, t), \quad (x, t) \in \Sigma.$$

З (28)–(30) випливає, що функція  $w$  є розв'язком задачі (6)–(8). Перевіримо чи виконуються умови твердження 3, а саме,  $\hat{g} \geq 0$  на  $Q$  і  $\hat{a}_0^- - \hat{g}^+ > 0$ . З твердження 4 випливає, що  $\hat{g}(x, t) \geq 0$  для будь-яких  $(x, t) \in Q$ . Використовуючи умову (G) та твердження 4, отримуємо

$$\begin{aligned} \hat{a}_0^- &:= \inf_{(x,t) \in Q} \hat{a}_0(x, t) = \\ &= \inf_{(x,t) \in Q} \left[ a_0(x, t) - G_1(x, t, u_1(x, t), u_2(x, t), u_1(x, t - \tau(t)), u_2(x, t - \tau(t))) \right] \geq \\ &\geq \inf_{(x,t) \in Q} (a_0(x, t) - g_1(x, t)) = a_0^-, \\ \hat{g}^+ &:= \sup_{(x,t) \in Q} \hat{g}(x, t) = \\ &= \sup_{(x,t) \in Q} G_2(x, t, u_1(x, t), u_2(x, t), u_1(x, t - \tau(t)), u_2(x, t - \tau(t))) \leq \sup_{(x,t) \in Q} g_2(x, t) = g_2^+. \end{aligned}$$

Оскільки  $\hat{a}_0^- - \hat{g}^+ \geq a_0^- - g_2^+$ , а з умови даного твердження маємо  $a_0^- - g_2^+ > 0$ , то умови твердження 3 виконуються. Отож, для функції  $w$  виконується нерівність (10), з якої випливає оцінка (5).

Теорему 1 доведено.

**Доведення наслідку 1.** Дане твердження безпосередньо отримуємо з теореми 1, покладаючи  $u_1 := u, u_2 := 0$ .

**Доведення наслідку 1.** З умови наслідку маємо, що  $f_1(x, t) - f_2(x, t) \leq 0 \forall (x, t) \in Q, h_1(x, t) - h_2(x, t) \leq 0 \forall (x, t) \in \Sigma$ . Тоді з (5) отримуємо  $u_1(x, t) - u_2(x, t) \leq 0 \forall (x, t) \in Q$ , тобто  $u_1(x, t) \leq u_2(x, t) \forall (x, t) \in Q$ .

**Доведення наслідку 3.** Припустимо протилежне. Нехай  $u_1, u_2$  — два різних розв'язки задачі (2)–(4). Тоді з теореми 1 маємо, що  $0 \leq u_1(x, t) - u_2(x, t) \leq 0, (x, t) \in \bar{Q}$ , тобто  $u_1 = u_2$  на  $\bar{Q}$ , а це суперечить нашому припущенню. Отож, твердження наслідку 3 є правильним.

**Доведення теореми 2.** Нехай  $\varepsilon$  — довільне число з проміжку  $(0, T/3)$ , а позначення  $Q_\varepsilon, \Sigma_\varepsilon, E_\varepsilon$  такі ж, як при доведенні твердження 1.

Візьмемо функцію  $\theta_\varepsilon \in C^\infty((0, T])$ , яка задовольняє умови  $0 \leq \theta_\varepsilon(t) \leq 1$  при  $t \in (0, T]$ ,  $\theta_\varepsilon(t) = 0$  при  $t \in (0, 2\varepsilon]$  і  $\theta_\varepsilon(t) = 1$  при  $t \in (3\varepsilon, T]$ . Покладемо

$$h_\varepsilon(x, t) := \theta_\varepsilon(t)h(x, t), \quad (x, t) \in \Sigma, \quad f_\varepsilon(x, t) := \theta_\varepsilon(t)f(x, t), \quad (x, t) \in Q.$$

Зауважимо, що

$$|h_\varepsilon(x, t)| \leq |h(x, t)| \quad \forall (x, t) \in \Sigma, \quad |f_\varepsilon(x, t)| \leq |f(x, t)| \quad \forall (x, t) \in Q. \quad (31)$$

Розглянемо задачу: знайти функцію  $u_\varepsilon \in C(\bar{\Omega} \times (E_\varepsilon \cup (\varepsilon, T])) \cap C^{2,1}(Q_\varepsilon)$ , яка задовольняє рівняння

$$Pu_\varepsilon(x, t) = f_\varepsilon(x, t), \quad (x, t) \in Q_\varepsilon, \quad (32)$$

та умови

$$u_\varepsilon(x, t) = h_\varepsilon(x, t), \quad (x, t) \in \Sigma_\varepsilon, \quad (33)$$

$$u_\varepsilon(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \bar{\Omega} \times E_\varepsilon, \quad (34)$$

де  $P$  — диференціальний оператор, який визначено у (2).

З теореми 2 роботи [3] випливає існування єдиного розв'язку  $u_\varepsilon \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(Q_\varepsilon) \cap C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Omega} \times (E_\varepsilon \cup (\varepsilon, T]))$  задачі (32)–(34). На підставі наслідку 2 роботи [3] для звуження  $u_\varepsilon$  на  $\bar{\Omega} \times (E_\varepsilon \cup (\varepsilon, 2\varepsilon])$  маємо оцінку

$$|u_\varepsilon(x, t)| \leq \max \left\{ \frac{1}{a_0^- - g_2^+} \sup_{(y,s) \in Q_\varepsilon/Q_{2\varepsilon}} |f_\varepsilon(y, s)|, \sup_{(y,s) \in \Sigma_\varepsilon/\Sigma_{2\varepsilon}} |h_\varepsilon(y, s)| \right\}, \quad (x, t) \in \bar{Q}_\varepsilon/Q_{2\varepsilon}. \quad (35)$$

З означень  $f_\varepsilon$  та  $h_\varepsilon$  випливає, що права частина (4) дорівнює нулю, а тому  $u_\varepsilon(x, t) = 0$  для кожного  $(x, t) \in \bar{\Omega} \times (E_\varepsilon \cup (\varepsilon, 2\varepsilon])$ . Довизначимо  $u_\varepsilon$  нулем на всю множину  $\bar{Q}$  і залишимо за цим продовженням позначення  $u_\varepsilon$ . Легко переконатися, що  $u_\varepsilon$  є розв'язком задачі, яка відрізняється від задачі (2) – (4) лише тим, що  $f$  і  $h$  замінено, відповідно на  $f_\varepsilon$  і  $h_\varepsilon$ . Звідси на підставі наслідку 2 та (31) випливає, що

$$|u_\varepsilon(x, t)| \leq \max \left\{ \frac{1}{a_0^- - g_2^+} \sup_{(y, s) \in Q} |f(y, s)|, \sup_{(y, s) \in \Sigma} |h(y, s)| \right\}, \quad (x, t) \in Q. \quad (36)$$

Нехай  $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^\infty$  — така послідовність чисел з інтервалу  $(0, T/2)$ , що  $\varepsilon_j \downarrow 0$  при  $j \rightarrow \infty$ . Перепозначимо  $u_j := u_{\varepsilon_j}$ ,  $f_j := f_{\varepsilon_j}$ ,  $h_j := h_{\varepsilon_j}$  для кожного  $j \in \mathbb{N}$ . З (36) випливає, що послідовність  $\{u_j\}$  є обмеженою на  $Q$ , тобто

$$\sup_{(x, t) \in \tilde{Q}} |u_j(x, t)| \leq C_3, \quad j \in \mathbb{N}, \quad (37)$$

де  $C_3 > 0$  — стала, яка не залежить від  $j$ .

Нехай  $\{\delta_k\}_{k=1}^\infty$  — монотонна послідовність чисел така, що  $\delta_k \downarrow 0$ ,  $0 < \delta_k < T$ , і  $\Omega_k := \{x \in \Omega : \text{dist}\{x, \partial\Omega\} > \delta_k\}$  — область в  $\mathbb{R}^n$  для кожного  $k \in \mathbb{N}$ . Позначимо  $I_k := (\delta_k, T]$ ,  $Q_k := \Omega_k \times I_k$ ,  $Q^k := \Omega \times I_k$ . Зауважимо, що  $Q_k \subset Q^k$ ,  $Q_k \subset Q_{k+1}$ ,  $Q^k \subset Q^{k+1}$  для кожного  $k \in \mathbb{N}$ ;  $\bigcup_{k=1}^\infty \Omega_k = \Omega$ ,  $\bigcup_{k=1}^\infty \bar{Q}_k = Q$ ,  $\bigcup_{k=1}^\infty \bar{Q}^k = \tilde{Q}$ .

Позначимо  $g_j(x, t) := f_j(x, t) + g(x, t, u_j(x, t), u_j(x, t - \tau(t)))$ ,  $(x, t) \in \tilde{Q}$ , для кожного  $j \in \mathbb{N}$ . З неперервності функцій  $g$  на  $\tilde{Q} \times \mathbb{R}^2$ ,  $f_j, u_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , на  $\tilde{Q}$  та оцінок (31), (37) випливає, що функції  $g_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , є неперервними на  $\tilde{Q}$  і для довільного  $k \in \mathbb{N}$  справджується оцінка

$$\|g_j\|_{C(\bar{Q}^k)} \leq C_4, \quad j \in \mathbb{N}, \quad (38)$$

де  $C_4 > 0$  — стала, яка не залежить від  $j$ , але може залежати від  $k$ .

З (32) випливає, що для кожного  $j \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} p(x, t)u_{j,t}(x, t) - \sum_{k,l=1}^n a_{kl}(x, t)u_{j,x_k x_l}(x, t) + \\ + \sum_{k=1}^n a_k(x, t)u_{j,x_k}(x, t) + a_0(x, t)u_j(x, t) = g_j(x, t), \quad (x, t) \in Q, \end{aligned} \quad (39)$$

а з (33) —

$$u_j(x, t) = h_j(x, t), \quad (x, t) \in \Sigma. \quad (40)$$

Зазначимо, що на підставі умов  $(B_1)$ ,  $(B_3)$ ,  $(B_4)$  рівняння (39) є частковим випадком рівняння (1.1), дослідженого у главі 3 монографії [6]. Зокрема, теорема 10.1 цієї монографії встановлює оцінки сталої Гельдера розв'язку рівняння (1.1) у підобласті області його задання. На підставі цієї теореми для розв'язку рівняння (39), що задовольняє умову (40), отримуємо оцінку

$$\|u_j\|_{\alpha, \alpha/2}^{\bar{Q}^k} \leq C_5, \quad j \in \mathbb{N}, \quad (41)$$

де  $C_5 > 0$  — стала, яка залежить від коефіцієнтів рівняння, сталих  $C_3, C_4$  з оцінок (37), (38) та  $\delta_k$ , але не залежить від  $j$ .

Отже, згідно з твердженням 2 (п. 1) існують функція  $u \in C_{\text{loc}}^{\alpha, \alpha/2}(\tilde{Q})$  і підпослідовності послідовності  $\{u_j\}_{j=1}^\infty$  (цю підпослідовність позначимо так само, як і всю послідовність, через  $\{u_j\}_{j=1}^\infty$ ) такі, що

$$u_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} u \quad \text{в } C(\tilde{Q}). \quad (42)$$

Покажемо, що  $u$  — розв'язок задачі (2)–(4).

Відмітимо, що з умов  $(\mathcal{G})$ ,  $(\mathcal{F})$ ,  $(\mathcal{B}_2)$ ,  $(\mathcal{B}_4)$  та оцінки (41) маємо

$$\|g_j\|_{\alpha, \alpha/2}^{\overline{Q^k}} \leq C_6, \quad j \in \mathbb{N}, \quad (43)$$

де  $C_6 > 0$  — стала, яка не залежить від  $j$ , але може залежати від  $k$ .

Зазначимо, що на підставі умов  $(\mathcal{B}_1)$ ,  $(\mathcal{B}_3)$ ,  $(\mathcal{B}_4)$  рівняння (39) є частковим випадком рівняння (10.1), дослідженого у главі 4 монографії [6]. Зокрема, теоремі 10.1 цієї монографії встановлює локальні оцінки розв'язку рівняння (10.1) та його похідних у класах Гельдера. На підставі цієї теореми для розв'язку рівняння (39) отримуємо оцінку

$$\|u_j\|_{2+\alpha, 1+\alpha/2}^{\overline{Q^k}} \leq C_7, \quad j \in \mathbb{N}, \quad (44)$$

де  $C_7 > 0$  — стала, яка залежить від коефіцієнтів рівняння, сталих  $C_3$ ,  $C_6$  з оцінок (37), (43), але не залежить від  $j$ .

Із (42), (44), твердження 2 (п. 1) та теореми про диференціювання границі збіжної послідовності функцій випливає, що функція  $u$  (див. (42)) належить простору  $C_{\text{loc}}^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(Q)$  і з послідовності  $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$  можна вибрати підпослідовність  $\{u_{j_m}\}_{m=1}^{\infty}$ , яка збігається до  $u$  у просторі  $C^{2,1}(Q)$ . Зауважимо, що  $h_j \rightarrow h$  при  $j \rightarrow \infty$  рівномірно на кожному компакт  $K \subset \Sigma$ . Крім того, з (42) та неперервності функцій  $g, f_j$  маємо  $g_j(x, t) \rightarrow f(x, t) + g(x, t, u(x, t), u(x, t - \tau(t)))$  при  $j \rightarrow \infty$  для кожної точки  $(x, t) \in Q$ . Врахувавши викладене, покладемо  $j = j_m$  у (39) і (40) та перейдемо там до границі при  $m \rightarrow \infty$ . В результаті отримаємо рівності, які означають, що функція  $u$  є класичним розв'язком рівняння (2) та задовольняє крайову умову (3). Виконання умови (4) випливає із (36) та (42).

Теорему 2 доведено.

## Література

1. Агаев Г. Н. О первой краевой задаче для линейных вырождающихся параболических уравнений // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук. – 1976. – 2. – С. 10–16.
2. Бокало М., Дмитрів В. Задача Фур'є для різнокомпонентної еволюційної системи рівнянь із інтегральним запізненням // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2002. – 60. – С. 32–49.
3. Бокало М., Ільницька О. Мішані задачі для параболических рівнянь зі змінним запізненням // Буков. мат. журн. – 2015. – 3. – С. 16–24.
4. Бугрій О. М. Про задачі з однорідними граничними умовами для нелінійних рівнянь з виродженням // Укр. мат. вісн. – 2008. – 5. – С. 435–469.
5. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М.: Наука, 1971. – 296 с.
6. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., Солонников В. А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
7. Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. – М.: Наука, 1972. – 256 с.
8. Пукальський І. Д. Нелокальна задача Неймана для параболического рівняння з виродженням // Укр. мат. журн. – 1999. – 51, № 9. – С. 1232–1243.
9. Слюсарчук В. Ю. Абсолютна стійкість динамічних систем з післядією. – Рівне: УДУВГ, 2003.
10. Vainov D., Petrov V. Asymptotic properties of the nonoscillatory solutions of second-order neutral equations with a deviating argument // J. Math. Anal. and Appl. – 1995. – 190. – P. 645–653.

11. *Burger R., Evje S., Karlsenc K. H.* On strongly degenerate convection diffusion problems modeling sedimentations consolidation processes // *J. Math. Anal. and Appl.* – 2000. – **247**. – P. 517–556.
12. *Burton T. A., Haddock J. R.* On the delay-differential equations  $x'(t) + a(t)f(x(t - r(t))) = 0$  and  $x''(t) + a(t)f(x(t - r(t))) = 0$  // *J. Math. Anal. and Appl.* – 1976. – **54**. – C. 37–48.
13. *Gui-Qiang G. Chen* On degenerate partial differential equations // *Oxford Centre Nonlinear PDE*. – 2010. – **16**. – 38 p.
14. *Culshaw R. V., Shigui R.* A delay-differential equation model of HIV infection of CD4+ T-cells // *Math. Biosci.* – 2000. – **165**. – P. 27–39.
15. *Dmytriv V. M.* On a Fourier problem for coupled evolution system of equations with time delays // *Mat. Stud.* – 2001. – **16**. – P. 141–156.
16. *Dumrongpokaphan T., Lenbury Y., Ouncharoen R., Xu Y.* An Intracellular delay-differential equation model of the HIV infection and immune control // *Math. Modelling Natur. Phenomena*. – 2007. – **2**. – P. 75–99.
17. *Feng W., Pao C. V., Lu X.* Global attractors of reaction-diffusion systems modeling food chain populations with delays // *Communs Pure and Appl. Anal.* – 2011. – **10**. – P. 1463–1478.
18. *Karlsen K. H., Ohlberger M.* A note on the uniqueness of entropy solutions of nonlinear degenerate parabolic equations // *J. Appl. Math. Anal. Appl.* – 2002. – **275**. – P. 439–458.
19. *Kuang Y., Zhang B., Zhao T.* Qualitative analysis of a nonautonomous nonlinear delay differential equation // *Tohoku Math. J.* – 1991. – **43**. – P. 509–528.
20. *Mascia C., Porretta A., Terracina A.* Nonhomogeneous dirichlet problems for degenerate parabolic-hyperbolic equations // *Arch. Ration. Mech. and Anal.* – 2002. – **163**. – P. 87–124.
21. *Pao C. V.* Coupled nonlinear parabolic systems with time delays // *J. Math. Anal. and Appl.* – 1995. – **196**. – P. 237–265.
22. *Pao C. V.* Dynamics of nonlinear parabolic systems with time delays // *J. Math. Anal. and Appl.* – 1996. – **198**. – P. 751–779.
23. *Pao C. V.* Systems of parabolic equations with continuous and discrete delays // *J. Math. Anal. and Appl.* – 1997. – **205**. – P. 157–185.
24. *Pao C. V.* Time delays parabolic systems with coupled nonlinear boundary conditions // *Proc. Amer. Math. Soc.* – 2001. – **130**. – P. 1079–1086.

Одержано 29.12.15