УДК 517.587

С. М. Загороднюк (Харьков. нац. ун-т им. В. Н. Каразина)

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С НЕКОТОРЫМИ ПУЧКАМИ ЯКОБИЕВОГО ТИПА

We study a generalization of the class of orthonormal polynomials on the real axis. These polynomials satisfy the following relation: $(J_5-\lambda J_3)\vec{p}(\lambda)=0$, where J_3 is a Jacobi matrix and J_5 is a semi-infinite real symmetric five-diagonal matrix with positive numbers on the second subdiagonal, $\vec{p}(\lambda)=(p_0(\lambda),p_1(\lambda),p_2(\lambda),\ldots)^T$, the superscript T denotes the operation of transposition with the initial conditions $p_0(\lambda)=1$ and $p_1(\lambda)=\alpha\lambda+\beta$, $\alpha>0$, $\beta\in\mathbb{R}$. Certain orthonormality conditions for the polynomials $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ are obtained. An explicit example of these polynomials is constructed.

Вивчається деяке узагальнення класу ортонормованих поліномів на дійсній осі. Ці поліноми задовольняють співвідношення $(J_5-\lambda J_3)\vec{p}(\lambda)=0$, де J_3 — матриця Якобі, J_5 — напівнескінченна дійсна симетрична п'ятидіагональна матриця з додатними числами на другій піддіагоналі, $\vec{p}(\lambda)=(p_0(\lambda),p_1(\lambda),p_2(\lambda),\ldots)^T$, індекс T означає транспонування, за початкових умов $p_0(\lambda)=1$, $p_1(\lambda)=\alpha\lambda+\beta$, $\alpha>0$, $\beta\in\mathbb{R}$. Одержано деякі співвідношення ортонормованості для поліномів $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$. Побудовано явний приклад таких поліномів.

1. Введение. Теория ортогональных многочленов на вещественной оси является классической областью анализа, ей посвящено огромное количество работ и она имеет многочисленные приложения (см., например, [5, 7, 15]). В настоящее время она привлекает новых исследователей, которые используют новые методы [11, 14]. В данной работе мы рассмотрим некоторое обобщение класса ортонормированных многочленов на вещественной оси.

Как известно, якобиевы матрицы и соответствующие операторы близко связаны с ортогональными многочленами на вещественной оси (см., например, [3, 16]). Согласно теореме Стоуна, любой самосопряженный оператор с простым спектром порождается некоторой якобиевой матрицей типа D [2]. Это обуславливает богатые связи теории самосопряженных операторов и теории якобиевых матриц. С другой стороны, в настоящее время активно развивается спектральная теория операторных пучков (см. [1, 4, 12, 13]). По аналогии со случаем самосопряженного оператора хотелось бы иметь простой модельный объект для линейного самосопряженного операторного пучка. В качестве такого объекта естественно использовать пучок вида $J-\lambda G$, где J,G — обобщенные якобиевы матрицы, и рассмотреть соответствующее уравнение на собственные значения:

$$(J-\lambda G)u(\lambda)=0,$$

где $u(\lambda)=(u_0,u_1,u_2,\ldots)^T$ (индекс T означает транспонирование). Подобные пучки для случая трехдиагональных якобиевых матриц рассматривались ранее во многих работах (см. [10] и приведенную там библиографию). Однако в этом случае, как легко проверить, элемент $u_k(\lambda)$ может оказаться рациональной функцией от λ, а не многочленом. Также отметим, что рассматривались и квадратичные пучки с коэффициентами – конечными якобиевыми матрицами [6].

Приведем следующее основное определение.

Определение 1. *Набор $\Theta=(J_3,J_5,\alpha,\beta)$, где $\alpha>0$, $\beta\in\mathbb{R}$, J_3 — матрица Якоби и J_5 — полубесконечная вещественная симметрическая пятидиагональная матрица с положительными числами на второй поддиагонали, называется пучком (матриц) якобиевого типа.*

Как следует из данного определения, матрицы J_3 и J_5 имеют следующий вид:

$$J_3 = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ a_0 & b_1 & a_1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & a_1 & b_2 & a_2 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \end{pmatrix}, \qquad a_k > 0, \quad b_k \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \tag{1}$$

$$J_5 = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \beta_0 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & 0 & 0 & \ldots \\ \gamma_0 & \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & 0 & \ldots \\ 0 & \gamma_1 & \beta_2 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \end{pmatrix}, \qquad \alpha_n, \quad \beta_n \in \mathbb{R}, \quad \gamma_n > 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{2}$$

С пучком матриц якобиевого типа Θ будем ассоциировать систему многочленов $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ такую, что

$$p_0(\lambda) = 1, \qquad p_1(\lambda) = \alpha\lambda + \beta \tag{3}$$

и

$$(J_5 - \lambda J_3)\vec{p}(\lambda) = 0, \tag{4}$$

где $\vec{p}(\lambda) = (p_0(\lambda), p_1(\lambda), p_2(\lambda), \ldots)^T$. Здесь индекс T означает транспонирование. Многочлены $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ называются *ассоциированными для пучка матриц якобиевого типа* Θ.

Заметим, что пятидиагональные матрицы могут рассматриваться как (2×2)-блочные матрицы Якоби. Эти матрицы связаны с (2×2)-матричными ортогональными многочленами на вещественной оси [9], равно как и с ортогональными многочленами на радиальных лучах в комплексной плоскости (см., например [8, 17] и приведенную в них библиографию). Однако, в отличие от случая пятидиагональной матрицы, в случае пучка матриц якобиевого типа Θ не видно простой связи соответствующих многочленов с матричными ортогональными многочленами.

Перебирая всевозможные пучки матриц якобиевого типа, мы получаем класс $\mathfrak{K}$, который состоит из ассоциированных систем многочленов. Класс $\mathfrak{K}$ содержит класс $\mathfrak{N}$ всех систем ортонормированных многочленов на вещественной оси с $p_0 = 1$ (и положительными старшими коэффициентами). Действительно, для каждой системы ортонормированных многочленов на вещественной оси с $p_0 = 1$ можно выбрать в качестве J_3 соответствующую матрицу Якоби (элементы которой являются коэффициентами рекуррентного соотношения), $J_5 = J_3^2$, и в качестве α, β использовать коэффициенты p_1 $\big(p_1(\lambda) = \alpha\lambda + \beta\big)$.

В случае ограниченных коэффициентов матриц J_3, J_5 эти матрицы определяют обычным образом ограниченные операторы на l_2. Эти операторы будем обозначать теми же буквами, что и соответствующие матрицы. В этом случае выражение $J_5 - \lambda J_3$ есть (ограниченный) линейный операторный пучок (см. [12]).

В общем случае матрицы J_3, J_5 позволяют задать операторы $J_{3,0}$, $J_{5,0}$ на множестве всех финитных векторов в l_2 (т. е. векторов с конечным числом ненулевых элементов).

Соотношение (4) может быть записано в следующей скалярной форме:

$$\gamma_{n-2}p_{n-2}(\lambda) + (\beta_{n-1} - \lambda a_{n-1})p_{n-1}(\lambda) + (\alpha_n - \lambda b_n)p_n(\lambda)+$$
$$+(\beta_n - \lambda a_n)p_{n+1}(\lambda) + \gamma_n p_{n+2}(\lambda) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{5}$$

где $p_{-2}(\lambda) = p_{-1}(\lambda) = 0$, $\gamma_{-2} = \gamma_{-1} = a_{-1} = \beta_{-1} = 0$. Рекуррентное соотношение (5) с начальными условиями (3) однозначно определяют ассоциированные многочлены пучка матриц якобиевого типа. Многочлен p_n имеет степень n, вещественные коэффициенты и положительный старший коэффициент ($n \in \mathbb{Z}_+$). С другой стороны, ясно, что ассоциированные многочлены не определяют пучок. К примеру, умножение J_3 и J_5 на положительное число не меняет ассоциированные многочлены. Мы вернемся к этому вопросу позднее.

Наша первая цель состоит в получении некоторых соотношений ортонормированности для ассоциированных многочленов произвольного пучка якобиевого типа. Для этой цели определяется оператор пучка. В общем случае этот оператор не обязательно симметрический. Построение соотношений ортонормированности является модификацией на случай пучка классического построения для матриц Якоби (см., например, [2]). Интересно, что эта классическая идея работает в случае пучка, т. е. пары матриц, но, похоже, неприменима для случая (одной) пятидиагональной матрицы [17].

Нашей второй целью будет построение примера ассоциированных многочленов с явным представлением (не являющихся ортонормированными на вещественной оси). Заметим, что мы можем выбрать J_3 и J_5, имеющие постоянные коэффициенты. Соответствующее уравнению (5) характеристическое уравнение 4-го порядка имеет четыре корня, выражающиеся через радикалы. Однако, данные общие выражения слишком сложны для определения того, являются ли корни различными, или того, что определитель соответствующей линейной системы уравнений (выражающей начальные условия) отличен от нуля. Здесь важным элементом является факторизация (23), которая не столь проста, так как зависит от параметра λ. Нахождение подобных факторизаций представляется нам непростым, поэтому соответствующий пример мы будем называть основным (из-за отсутствия других примеров, по крайней мере). Заметим также, что данный пример показывает, что $\mathfrak{N} \neq \mathfrak{K}$.

Обозначения. Как обычно, обозначим через $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$ множества вещественных, комплексных, натуральных, целых и целых неотрицательных чисел соответственно, а через $\mathbb{P}$ множество всех многочленов с комплексными коэффициентами.

Далее, через l_2 обозначим гильбертово пространство всех комплексных последовательностей $c = (c_n)_{n=0}^\infty = (c_0, c_1, c_2, \ldots)^T$ с конечной нормой $\|c\|_{l_2} = \sqrt{\sum_{n=0}^\infty |c_n|^2}$. Скалярное произведение двух последовательностей $c = (c_n)_{n=0}^\infty, d = (d_n)_{n=0}^\infty \in l_2$ определяется так: $(c,d)_{l_2} = \sum_{n=0}^\infty c_n \overline{d_n}$. Полагаем $\vec{e}_m = (\delta_{n,m})_{n=0}^\infty \in l_2$, $m \in \mathbb{Z}_+$. Через $l_{2,fin}$ обозначим множество всех финитных векторов из l_2, т. е. векторов с конечным числом ненулевых компонент.

Через $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ обозначается множество всех борелевских подмножеств $\mathbb{R}$. Если σ — ограниченная мера на $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$, то через L^2_σ обозначим гильбертово пространство всех (классов эквивалентности из) комплекснозначных функций f на $\mathbb{R}$ с конечной нормой $\|f\|_{L^2_\sigma} = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 d\sigma}$.

Скалярное произведение $f, g \in L^2_\sigma$ определено как $(f,g)_{L^2_\sigma} = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}d\sigma$. Через $[f]$ обозначим класс эквивалентности в L^2_σ, содержащий представителя f.

Если H — гильбертово пространство, то $(\cdot,\cdot)_H$ и $\|\cdot\|_H$ обозначают скалярное произведение и норму в H соответственно. Индексы могут опускаться в очевидных случаях. Для линейного оператора A в H обозначим через $D(A)$ его область определения, через $R(A)$ его область значений, а через A^* сопряженный оператор, если последний существует. Если A обратим, то A^{-1} означает обратный оператор. $\overline{A}$ означает замыкание оператора, если оператор допускает замыкание. Если A ограничен, то $\|A\|$ обозначает его норму. Для множества $M \subseteq H$ обозначаем через $\overline{M}$ замыкание M по норме H. Под $\operatorname{Lin} M$ мы подразумеваем множество всех линейных комбинаций элементов из M и $\overline{\operatorname{span}}\, M := \overline{\operatorname{Lin} M}$. Через E_H обозначим единичный оператор в H, т. е. $E_H x = x$, $x \in H$. Если H_1 — подпространство в H, то $P_{H_1} = P^H_{H_1}$ — оператор ортогонального проектирования на H_1 в H.

2. Соотношения ортогональности для ассоциированных многочленов. Рассмотрим произвольный пучок якобиевого типа $\Theta = (J_3, J_5, \alpha, \beta)$. Полагаем

$$u_n := J_3\vec{e}_n = a_{n-1}\vec{e}_{n-1} + b_n\vec{e}_n + a_n\vec{e}_{n+1}, \tag{6}$$

$$w_n := J_5\vec{e}_n = \gamma_{n-2}\vec{e}_{n-2} + \beta_{n-1}\vec{e}_{n-1} + \alpha_n\vec{e}_n + \beta_n\vec{e}_{n+1} + \gamma_n\vec{e}_{n+2}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{7}$$

Здесь и далее под $\vec{e}_k$ с отрицательным k мы понимаем нулевой вектор. Поскольку $a_n > 0$, то векторы $\vec{e}_0$, u_n, $n \in \mathbb{Z}_+$ линейно независимы. Более того, $\operatorname{Lin}\{\vec{e}_0, u_0, u_1, u_2, \ldots\} = l_{2,\mathrm{fin}}$. Оператор:

$$Af = \frac{\zeta}{\alpha}(\vec{e}_1 - \beta\vec{e}_0) + \sum_{n=0}^{\infty}\xi_n w_n,$$

$$f = \zeta\vec{e}_0 + \sum_{n=0}^{\infty}\xi_n u_n \in l_{2,fin}, \quad \zeta, \xi_n \in \mathbb{C}, \tag{8}$$

с $D(A) = l_{2,\mathrm{fin}}$ называется *ассоциированным оператором для пучка якобиевого типа* Θ. Отметим, что в суммах в (8) лишь конечное число ξ_n ненулевые. Это будет всегда предполагаться в случаях элементов из линейной оболочки.

Итак, оператор A линеен и плотно задан в l_2. В частности, для него выполнено

$$Au_n = w_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{9}$$

$$A\vec{e}_0 = \frac{1}{\alpha}(\vec{e}_1 - \beta\vec{e}_0). \tag{10}$$

Для произвольного ненулевого многочлена $f(\lambda) \in \mathbb{P}$ степени $d \in \mathbb{Z}_+$, $f(\lambda) = \sum_{k=0}^{d} d_k\lambda^k$, $d_k \in \mathbb{C}$, полагаем

$$f(A) = \sum_{k=0}^{d} d_k A^k.$$

Здесь $A^0 := E|_{l_{2,\mathrm{fin}}}$. Поскольку $Al_{2,\mathrm{fin}} \subseteq l_{2,\mathrm{fin}}$, то $D(f(A)) = l_{2,\mathrm{fin}}$. Для $f(\lambda) \equiv 0$, полагаем

$$f(A) = 0|_{l_{2,\mathrm{fin}}}.$$

Соответствие $f \mapsto f(A)$ аддитивно и мультипликативно: для произвольных $f, g \in \mathbb{P}$

$$(f+g)(A) = f(A) + g(A), \qquad (fg)(A) = f(A)g(A).$$

Обозначим через $\{r_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$, $r_0(\lambda) = 1$, систему многочленов, удовлетворяющих соотношению

$$J_3\vec{r}(\lambda) = \lambda\vec{r}(\lambda), \qquad \vec{r}(\lambda) = \big(r_0(\lambda), r_1(\lambda), r_2(\lambda), \ldots\big)^T. \tag{11}$$

Эти многочлены являются ортонормированными на вещественной оси относительно неотрицательной конечной меры σ на $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ (теорема Фавара). В общем случае мера ортогональности σ может быть не единственной и мы выбираем произвольную. Рассмотрим оператор

$$U\sum_{n=0}^{\infty}\xi_n\vec{e}_n = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\xi_n r_n(x)\right], \quad \xi_n \in \mathbb{C},$$

который отображает $l_{2,\mathrm{fin}}$ на всё $\mathcal{P}$. Здесь $\mathcal{P}$ — множество всех полиномов (точнее говоря, всех классов эквивалентности, которые содержат полиномы) в L^2_σ. Оператор U линеен и изометричен. Полагаем

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_\sigma = UAU^{-1}.$$

Оператор $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\sigma$ называется *модельным представлением в* L^2_σ *ассоциированного оператора* A. Пусть $f(\lambda) \in \mathbb{P}$ ненулевой и степени $d \in \mathbb{Z}_+$, $f(\lambda) = \sum_{k=0}^{d} d_k\lambda^k$, $d_k \in \mathbb{C}$. Полагаем

$$f(\mathcal{A}_\sigma) = \sum_{k=0}^{d} d_k\mathcal{A}_\sigma^k; \quad \mathcal{A}_\sigma^0 := E|_{\mathcal{P}}.$$

Легко проверить, что

$$Uf(A)U^{-1} = f(\mathcal{A}_\sigma). \tag{12}$$

Теорема 1. *Пусть* $\Theta = (J_3, J_5, \alpha, \beta)$ — *произвольный пучок якобиевого типа* $\{r_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$, $r_0(\lambda) = 1$, — *система многочленов, удовлетворяющая* (11) *и* σ — (*произвольная*) *соответствующая этой системе мера ортонормированности на* $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$. *Ассоциированные многочлены* $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ *удовлетворяют соотношениям ортонормированности*

$$\int_{\mathbb{R}} p_n(\mathcal{A})(1)\overline{p_m(\mathcal{A})(1)}d\sigma = \delta_{n,m}, \quad n, m \in \mathbb{Z}_+, \tag{13}$$

где $\mathcal{A}$ *является модельным представлением в* L^2_σ *ассоциированного оператора* A.

Доказательство. Рассмотрим произвольный пучок якобиевого типа $\Theta = (J_3, J_5, \alpha, \beta)$ и его ассоциированный оператор A. Используя (6), (7), (9) получаем

$$\gamma_{n-2}\vec{e}_{n-2} + \beta_{n-1}\vec{e}_{n-1} - a_{n-1}A\vec{e}_{n-1} + \alpha_n\vec{e}_n - b_nA\vec{e}_n +$$
$$+\beta_n\vec{e}_{n+1} - a_nA\vec{e}_{n+1} + \gamma_n\vec{e}_{n+2} = 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Рассмотрим уравнение

$$\gamma_{n-2}y_{n-2} + \beta_{n-1}y_{n-1} - a_{n-1}Ay_{n-1} + \alpha_ny_n - b_nAy_n +$$

$$+\beta_n y_{n+1} - a_n A y_{n+1} + \gamma_n y_{n+2} = 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{14}$$

относительно неизвестных векторов $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, $y_n \in l_{2,\mathrm{fin}}$, где векторы y_k с отрицательными k являются нулевыми. Ясно, что решение уравнения (14) однозначно определяется через y_0, y_1. Значит, векторы $\{\vec{e}_n\}_{n=0}^{\infty}$ составляют решение уравнения (14).

Запишем (5) с операторным аргументом A и применим к $\vec{e}_0$. В результате получим, что $\widetilde{y}_n = p_n(A)\vec{e}_0$ является решением уравнения (14). Заметим, что $\widetilde{y}_0 = \vec{e}_0$,

$$\widetilde{y}_1 = p_1(A)\vec{e}_0 = \vec{e}_1.$$

Таким образом, решения $\{\vec{e}_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\widetilde{y}_n\}_{n=0}^{\infty}$ уравнения (14) совпадают и

$$\vec{e}_n = p_n(A)\vec{e}_0, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Значит,

$$\big(p_n(A)\vec{e}_0, p_m(A)\vec{e}_0\big)_{l_2} = \delta_{n,m}, \quad n, m \in \mathbb{Z}_+. \tag{15}$$

Записывая соотношения (15) в модельном пространстве L^2_σ, с учетом (12), мы приходим к соотношению (13).

Теорема 1 доказана.

Заметим, что для систем ортонормированных многочленов p_n на вещественной оси с $p_0 = 1$, т. е. в случае $J_5 = J_3^2$, J_3 — соответствующая матрица Якоби и α, β: $p_1(x) = \alpha x + \beta$, оператор A совпадает с оператором $J_{3,0}$ (определяемым матрицей Якоби J_3 на $l_{2,\mathrm{fin}}$). В этом случае соотношение (15) приводит к обычным соотношениям ортонормированности для p_n.

Как отмечалось во введении, ассоциированные многочлены $p_n(\lambda)$ не определяют пучок Θ. Предположим, что

$$p_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \mu_{n,k}\lambda^k, \qquad \mu_{n,k} \in \mathbb{R}, \quad \mu_{n,n} > 0.$$

Подсчитывая коэффициенты в левой части в соотношения (5) при степени $n+2$, $n+1$, n, имеем

$$-a_n\mu_{n+1,n+1} + \gamma_n\mu_{n+2,n+2} = 0,$$

$$-b_n\mu_{n,n} + \beta_n\mu_{n+1,n+1} - a_n\mu_{n+1,n} + \gamma_n\mu_{n+2,n+1} = 0,$$

$$-a_{n-1}\mu_{n-1,n-1} + \alpha_n\mu_{n,n} - b_n\mu_{n,n-1} + \beta_n\mu_{n+1,n} - a_n\mu_{n+1,n-1} + \gamma_n\mu_{n+2,n} = 0,$$

где $n \in \mathbb{Z}_+$, $\mu_{-1,-1} = \mu_{0,-1} = \mu_{1,-1} = 0$. Выделяя γ_n, β_n, α_n, имеем

$$\gamma_n = a_n\frac{\mu_{n+1,n+1}}{\mu_{n+2,n+2}}, \tag{16}$$

$$\beta_n = \frac{b_n\mu_{n,n} + a_n\mu_{n+1,n} - \gamma_n\mu_{n+2,n+1}}{\mu_{n+1,n+1}}, \tag{17}$$

$$\alpha_n = \frac{a_{n-1}\mu_{n-1,n-1} + b_n\mu_{n,n-1} - \beta_n\mu_{n+1,n} + a_n\mu_{n+1,n-1} - \gamma_n\mu_{n+2,n}}{\mu_{n,n}}, \tag{18}$$

где $n \in \mathbb{Z}_+$. Следовательно, *матрица J_5 пучка однозначно определяется через ассоциированные многочлены и J_3*. Кроме того, соотношения (16), (17) показывают, что *матрица J_3 пучка однозначно определяется через ассоциированные многочлены и J_5*.

3. Основной пример. Обозначим через Θ_1 пучок якобиевого типа с $\alpha = \beta = \sqrt{2}$, $a_k = \sqrt{2}$, $b_k = 2$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha_n = \beta_n = 0$, $\gamma_n = 1$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Рекуррентное соотношение (5) для ассоциированных многочленов $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ принимает вид

$$p_{n-2}(\lambda) - \sqrt{2}\lambda p_{n-1}(\lambda) - 2\lambda p_n(\lambda) - \sqrt{2}\lambda p_{n+1}(\lambda) + p_{n+2}(\lambda) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{19}$$

с начальными условиями

$$p_0(\lambda) = 1, \qquad p_1(\lambda) = \sqrt{2}\lambda + \sqrt{2}. \tag{20}$$

Теорема 2. *Ассоциированные многочлены* $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ *пучка* Θ_1 *имеют представление*

$$p_n(\sqrt{2}t - 1) = T_n(t) + tU_{n-1}(t) - \frac{1}{2}\frac{U_{n-1}(t) - U_{n-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{t + \frac{1}{\sqrt{2}}},$$

$$n \in \mathbb{Z}_+, \quad t \in \left(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right). \tag{21}$$

Здесь $T_n(t) = \cos(n \arccos t)$, $U_n(t) = \dfrac{\sin((n+1)\arccos t)}{\sqrt{1-t^2}}$ — *многочлены Чебышева первого и второго рода соответственно* ($U_{-1} = 0$).

Доказательство. Как обычно, будем искать решение $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ разностного уравнения (соответствующего (19))

$$y_{n-2} - \sqrt{2}\lambda y_{n-1} - 2\lambda y_n - \sqrt{2}\lambda y_{n+1} + y_{n+2} = 0, \quad n = 2, 3, \ldots,$$

в виде $y_n = w^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $w = w(\lambda) \in \mathbb{C}$. Здесь $\lambda \in \mathbb{C}$ — фиксированный параметр. Тогда характеристическое уравнение имеет вид

$$w^4 - \sqrt{2}\lambda w^3 - 2\lambda w^2 - \sqrt{2}\lambda w + 1 = 0. \tag{22}$$

Факторизуем выражение в левой части (22) следующим образом:

$$(w^2 + \sqrt{2}w + 1)(w^2 - \sqrt{2}(\lambda+1)w + 1) = 0. \tag{23}$$

Следовательно, мы получаем корни

$$w_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 \mp i), \qquad w_{3,4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\lambda + 1 \pm \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda - 1}\right).$$

Здесь и далее для каждого комплексного λ мы фиксируем *произвольное* значение квадратного корня $\sqrt{\lambda^2 + 2\lambda - 1}$. При этом мы предполагаем, что эти значения формируют некоторую ветвь, и не налагаем других условий. Пусть

$$r_n(\lambda) = C_1(\lambda)w_1^n + C_2(\lambda)w_2^n + C_3(\lambda)w_3^n + C_4(\lambda)w_4^n, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

где $C_j(\lambda)$ — произвольные комплекснозначные функции от λ. Функции $r_n(\lambda)$ удовлетворяют соотношению (19) для $n = 2, 3, \ldots$. Кроме того, $r_n(\lambda)$ удовлетворяет соотношению (19) с $n = 0, 1$ и начальным условиям (20) в том и только в том случае, когда коэффициенты $C_n(\lambda)$ удовлетворяют соответствующей линейной системе уравнений

$$
\begin{gathered}
(-\lambda+(\lambda+1)i)C_1+(-\lambda-(\lambda+1)i)C_2+(-\lambda+\sqrt{\lambda^2+2\lambda-1})C_3+\\
+(-\lambda-\sqrt{\lambda^2+2\lambda-1})C_4=0,\\
(1-i)C_1+(1+i)C_2+(-\lambda-1+\sqrt{\lambda^2+2\lambda-1})C_3+\\
+(-\lambda-1-\sqrt{\lambda^2+2\lambda-1})C_4=0,\\
C_1+C_2+C_3+C_4=1,\\
(-1-i)C_1+(-1+i)C_2+(\lambda+1+\sqrt{\lambda^2+2\lambda-1})C_3+\\
+(\lambda+1-\sqrt{\lambda^2+2\lambda-1})C_4=2\lambda+2.
\end{gathered}
\tag{24}
$$

Определитель Δ этой системы равен $-8(\lambda+2)^2\sqrt{\lambda^2+2\lambda-1}i$. Таким образом, линейная система (24) имеет решение, если $\lambda\neq-2,-1\pm\sqrt{2}$. Тогда

$$
C_{1,2}=\mp\frac{1}{2(\lambda+2)i},\qquad C_{3,4}=\frac{1}{2}\pm\frac{\lambda^2+3\lambda+1}{2(\lambda+2)\sqrt{\lambda^2+2\lambda-1}},
$$

и мы приходим к следующему представлению ассоциированных многочленов:

$$
\begin{gathered}
p_n(\lambda)=\\
=\frac{1}{\lambda+2}\sin\left(\frac{3\pi}{4}n\right)+2^{-\frac{n}{2}-1}\Big((\lambda+1+\sqrt{\lambda^2+2\lambda-1})^n+(\lambda+1-\sqrt{\lambda^2+2\lambda-1})^n+\\
+\frac{\lambda^2+3\lambda+1}{(\lambda+2)\sqrt{\lambda^2+2\lambda-1}}\times\Big((\lambda+1+\sqrt{\lambda^2+2\lambda-1})^n-\\
-(\lambda+1-\sqrt{\lambda^2+2\lambda-1})^n\Big)\Big),\qquad n\in\mathbb{Z}_+,\quad \lambda\in\mathbb{C}\backslash\big\{-2,-1\pm\sqrt{2}\big\}.
\end{gathered}
\tag{25}
$$

В дальнейшем мы предположим, что $\lambda\in(-1-\sqrt{2},-2)\cup(-2,-1+\sqrt{2})$. Тогда $t:=\dfrac{\lambda+1}{\sqrt{2}}\in$ $\in\left(-1,-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},1\right)$. Следовательно, можем записать

$$
\sqrt{\lambda^2+2\lambda-1}=\sqrt{-2(1-t^2)}=\sqrt{2}\sqrt{1-t^2}i,
$$

где последнее равенство означает, что мы зафиксировали определенное значение квадратного корня (мы могли выбрать это значение в предыдущих рассуждениях). Тогда

$$
\begin{gathered}
\sqrt{\lambda^2+2\lambda-1}=\sqrt{2}\sqrt{1-(\cos(\arccos t))^2}i=\sqrt{2}\sin(\arccos t)i,\\
\lambda+1\pm\sqrt{\lambda^2+2\lambda-1}=\sqrt{2}\left(\cos(\arccos t)\right)\pm i\sin(\arccos t))=\sqrt{2}e^{\pm i\arccos t}.
\end{gathered}
$$

Используя (25) и последние равенства, получаем

$$
p_n(\sqrt{2}t-1)=\frac{1}{\sqrt{2}t+1}\sin\left(\frac{3\pi}{4}n\right)+T_n(t)+
$$

$$+\left(\frac{t}{\sqrt{1-t^2}i} - \frac{1}{(\sqrt{2}t+1)\sqrt{2}\sqrt{1-t^2}i}\right) i\sin(n\arccos t),$$

где $n \in \mathbb{Z}_+,\ t \in \left(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$. Значит, формула (21) справедлива.

Теорема 2 доказана.

С помощью формулы (21) или рекуррентного соотношения (19) вычисляем

$$p_2(\lambda) = 2\lambda(\lambda+2), \qquad p_3(\lambda) = \sqrt{2}\lambda(2\lambda^2 + 6\lambda + 3).$$

Мы видим, что последовательные многочлены имеют общий корень 0. Следовательно, эти многочлены не являются ортогональными на вещественной оси.

Интересной задачей является описание распределения корней многочленов p_n из (21). Например, можно предположить, что все нули p_n являются вещественными.

Построим теперь ассоциированный оператор A, его модельное представление и другие связанные с ним объекты. В данном случае имеем

$$u_n = \sqrt{2}\vec{e}_{n-1} + 2\vec{e}_n + \sqrt{2}\vec{e}_{n+1}, \qquad w_n = \vec{e}_{n-2} + \vec{e}_{n+2}, \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Значит,

$$Au_n = \vec{e}_{n-2} + \vec{e}_{n+2}, \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{26}$$

Используя (10), получаем

$$A\vec{e}_0 = -\vec{e}_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1. \tag{27}$$

Сравнивая рекуррентное соотношение многочленов Чебышева второго рода $U_n(x)$ с соотношением для $r_n(x)$, видим, что

$$r_n(x) = U_n\left(\frac{x-2}{2\sqrt{2}}\right), \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Обозначим через $\{q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ многочлены второго рода для ортогональных многочленов $r_n(x)$:

$$q_n(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{r_n(x) - r_n(t)}{x-t} d\sigma, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Сравнивая начальные условия заключаем, что

$$q_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} U_{n-1}\left(\frac{x-2}{2\sqrt{2}}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Заметим, что

$$Uu_n = \big[xr_n(x)\big], \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Используя (26), (27), получаем

$$\mathcal{A}_\sigma[xr_n(x)] = \big[r_{n-2}(x) + r_{n+2}(x)\big], \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{28}$$

$$A_\sigma[r_0(x)] = \left[-r_0(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} r_1(x)\right]. \tag{29}$$

Для произвольного комплексного многочлена $p(x)$ степени $l \in \mathbb{Z}_+$ можем записать

$$p(x) = p(0) + x\frac{p(x) - p(0)}{x} = p(0) + x\sum_{n=0}^{\infty} \widehat{c}_n r_n(x), \quad \widehat{c}_n \in \mathbb{C}, \tag{30}$$

где $\widehat{c}_n = 0$ для $n > l - 1$. Заметим теперь, что

$$\widehat{c}_k = \left(\frac{p(x) - p(0)}{x}, r_k(x)\right)_{L^2_\sigma}, \quad 0 \le k \le l - 1. \tag{31}$$

При этом

$$x^2 r_n(x) = \sqrt{2}x r_{n-1}(x) + 2x r_n(x) + \sqrt{2}x r_{n+1}(x) =$$

$$= \begin{cases} 2r_2(x) + 4\sqrt{2}r_1(x) + 6r_0(x), & n = 0 \\ 2(r_{n-2}(x) + r_{n+2}(x)) + 4\sqrt{2}r_{n-1}(x) + 8r_n(x) + 4\sqrt{2}r_{n+1}(x), & n \in \mathbb{N} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 2r_2(x) + 4xr_0(x) - 2r_0(x), & n = 0, \\ 2(r_{n-2}(x) + r_{n+2}(x)) + 4xr_n(x), & n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{32}$$

Используя (28)–(32) мы заключаем, что

$$\mathcal{A}_\sigma\left[p(x)\right] = \left[\left(\frac{1}{2}x - 2\right)p(x) + \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{p(x) - p(0)}{x} d\sigma\right], \quad p \in \mathbb{P}.$$

Вычислим матрицу M_A ассоциированного оператора A относительно ортонормированного базиса $\{\vec{e}_n\}_{n=0}^{\infty}$:

$$(A\vec{e}_n, \vec{e}_m)_{l_2} = (\mathcal{A}r_n(x), r_m(x))_{L^2_\sigma} = \left(\left(\frac{1}{2}x - 2\right)r_n(x) + q_n(0), r_m(x)\right)_{L^2_\sigma} =$$

$$= \frac{1}{2}(u_n, \vec{e}_m)_{l_2} - 2\delta_{n,m} + q_n(0)\delta_{m,0} =$$

$$= \frac{1}{2}(J_3\vec{e}_n, \vec{e}_m)_{l_2} - 2\delta_{n,m} + q_n(0)\delta_{m,0}, \quad n, m \in \mathbb{Z}_+.$$

Значит,

$$M_A = \frac{1}{2}J_3 - 2I + \begin{pmatrix} 0 & q_1(0) & q_2(0) & q_3(0) & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} + q_1(0) & q_2(0) & q_3(0) & \cdots \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где $I = (\delta_{n,m})_{n,m=0}^{\infty}$. Заметим, что $q_n(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} U_{n-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right)$, $n \in \mathbb{N}$. В частности, выполнено $q_{8k+2}(0) = -1$, $k \in \mathbb{N}$. Значит, оператор A не является ограниченным (так как $M_A^* \vec{e}_0 \notin l_2$).

Таким образом, мы видим, что хотя операторы J_3 и J_5 являются ограниченными и самосопряженными, ассоциированный оператор A не является ни ограниченным, ни симметрическим. Дополнительные предположения для матриц J_3, J_5, возможно, дадут больше информации об ассоциированном операторе A пучка якобиевого типа.

Литература

1. *Абрамов Ю. Ш.* Вариационные методы в теории операторных пучков. Спектральная оптимизация. – Л.: Изд-во Ленингр., ун-та, 1983. – 180 с.
2. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. – М.: Физматгиз., 1961. – 312 с.
3. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев.: Наук. думка, 1965. – 800 с.
4. *Копачевский Н. Д.* Спектральная теория операторных пучков. Спец. курс лекций. – Симферополь: Тавр. нац. ун-т им. В. И. Вернадского, 2009. 128 с.
5. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. – 3-е изд. – М.: Физматлит., 2005. – 480 с.
6. *Agranovich Y., Azizov T., Barsukov A., Dijksma A.* On an inverse spectral problem for a quadratic Jacobi matrix pencil // J. Math. Anal. and Appl. – 2005. – **306**, № 1. – P. 1 – 17.
7. *Chihara T. S.* An introduction to orthogonal polynomials // Math. and Appl. – New York etc.: Gordon and Breach Sci. Publ., 1978. – **13**. – xii+249 p.
8. *Choque R., Abdon E., Zagorodnyuk Sergey M.* Orthogonal polynomials on rays: Christoffel's formula // Bol. Soc. mat. mexic. – 2009. – **15**, № 2. – P. 149 – 164.
9. *Damanik D., Pushnitski A., Simon B.* The analytic theory of matrix orthogonal polynomials // Surv. Approxim. Theory. – 2008. – **4**. – P. 1 – 85.
10. *Derevyagin M., Tsujimoto S., Vinet L., Zhedanov A.* Bannai – Ito polynomials and dressing chains // Proc. Amer. Math. Soc. – 2014. – **142**, № 12. – P. 4191 – 4206.
11. *Ismail Mourad E. H.* Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in one variable // Encycl. Math. and Appl. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005. – **98**. – xviii+706 p.
12. *Markus A. S.* Introduction to the spectral theory of polynomial operator pencils // Transl. Math. Monogr. – Providence RI: 71. Amer. Math. Soc., 1988. – **71**. – iv+250 p.
13. *Möller M., Pivovarchik V.* Spectral theory of operator pencils, Hermite – Biehler functions, and their applications // Oper. Theory: Adv. and Appl. – Cham: Birkhäuser/Springer, 2015. – **246**. – xvii+412 p.
14. *Simon B.* Szegö's Theorem and its Descendants. Spectral Theory for L^2 Perturbations of Orthogonal Polynomials. M. B. Porter Lectures. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2011. xii+650 pp.
15. *Szegö G.* Orthogonal polynomials. – Fourth ed. – Providence RI: Amer. Math. Soc., 1975. – **23**. – iv+423 p.
16. *Teschl G.* Jacobi operators and completely integrable nonlinear lattices // Math. Surv. and Monogr. – Providence RI: Amer. Math. Soc., 2000. – **72**. – iv+351 p.
17. *Zagorodnyuk S. M.* On generalized Jacobi matrices and orthogonal polynomials // N. Y. J. Math. – 2003. – **9**. – P. 117 – 136 (electronic).

Получено 03.12.15