УДК 517.956.4

В. М. Лось (Нац. техн. ун-т України „КПІ”, Чернігів. нац. технол. ун-т)

КЛАСИЧНІ РОЗВ’ЯЗКИ ПАРАБОЛІЧНИХ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВИХ ЗАДАЧ І ПРОСТОРИ ХЕРМАНДЕРА

For the second-order linear parabolic differential equations with complex-valued coefficients, we establish new sufficient conditions under which the generalized solutions of these problems are continuous. The conditions are formulated in the terms of belonging of the right-hand sides of these problems to certain anisotropic Hoїmander spaces.

Дослідження геометричних властивостей траєкторій частинок у стохастичних потоках приводить до вивчення їхніх взаємних кутів обходу. Для незалежних двовимірних броунівських рухів відповідну задачу розв’язав М. Йор. Ми узагальнюємо цей результат на випадок ізотропних броунівських стохастичних потоків зі старшим показником Ляпунова, що дорівнює нулю.

1. Вступ. Сучасну теорію загальних параболічних початково-крайових задач розроблено для шкал функціональних просторів Гельдера і Соболєва [1 – 6]. Основні її результати — теореми про коректну розв’язність (за Адамаром) цих задач та про регулярність їхніх розв’язків у вказаних просторах.

У цій теорії особливе місце займають мішані задачі для рівнянь другого порядку, що пов’язано з їхніми численними застосуваннями. Актуальним є питання про те, за яких умов узагальнений розв’язок такої задачі є класичним, тобто коли диференціальні оператори застосовуються до розв’язків за допомогою лише класичних похідних. У роботах [2, 7 – 10] відповідь на це питання отримано для задач з дійсними коефіцієнтами. Результати сформульовано, як правило, у термінах належності правих частин задачі деяким просторам Гельдера або Соболєва.

Л. Хермандер [11] (п. 2.2) ввів і дослідив широкі класи функціональних нормовних просторів, для яких показником регулярності розподілів є не число, як у просторах Гельдера і Соболєва, а досить загальний функціональний параметр, що залежить від частотних змінних. Останній дозволяє охарактеризувати регулярність розподілів істотно більш тонко, ніж числовий параметр. Серед просторів Хермандера окреме місце займають гільбертові простори $H^{\mu}(\mathbb{R}^n) := \mathcal{B}_{2,\mu}$, де μ — функціональний параметр, та їхні аналоги для евклідових областей і гладких многовидів. Якщо $\mu(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{s/2}$ як функція від $\xi \in \mathbb{R}^n$, то $H^{\mu}(\mathbb{R}^n)$ — гільбертів простір Соболєва порядку $s \in \mathbb{R}$. Простори Хермандера та їхні різні узагальнення знайшли чимало застосувань в аналізі і теорії диференціальних рівнянь [11 – 21].

Так, В. А. Михайлець і О. О. Мурач [19 – 26] побудували теорію загальних еліптичних диференціальних операторів і еліптичних крайових задач у гільбертових шкалах ізотропних просторів Хермандера. Зокрема, було отримано більш тонкі, ніж це дозволяє соболєвська шкала, умови класичності узагальнених розв’язків еліптичних задач.

У роботах [27 – 36] досліджено мішані параболічні задачі у гільбертових просторах Хермандера. Зокрема [31], отримано нові умови класичності узагальнених розв’язків параболічної початково-крайової задачі з однорідними початковими даними Коші.

У статтях [34, 35] доведено теореми про коректну розв’язність початково-крайових задач для загального лінійного параболічного рівняння другого порядку у придатних парах гільбертових просторів Хермандера. Мета цієї роботи — отримати нові достатні умови класичності узагальнених розв’язків цих задач. При цьому ми скористаємося результатами статей [34, 35], що дозволить встановити ці умови у випадку комплекснозначних коефіцієнтів і правих частин задачі. Зазначимо, що використання просторів Хермандера дозволить накласти на праву частину рівняння більш слабку умову, ніж гельдеровість у замкненому циліндрі.

Зауважимо [37] (теорема 7.9.8), що неперервність у замкненому циліндрі правої частини параболічного рівняння є недостатньою для класичності розв'язку мішаної задачі навіть у випадку однорідних крайової і початкової умов (див. п. 2).

2. Постановка задачі. Нехай довільно задано ціле число $n \geq 2$, дійсне число $\tau > 0$ і обмежену область $G \subset \mathbb{R}^n$ з нескінченно гладкою межею $\Gamma := \partial G$. Позначимо через $\Omega := G \times (0, \tau)$ відкритий циліндр в $\mathbb{R}^{n+1}$, через $S := \Gamma \times (0, \tau)$ його бічну поверхню. Тоді $\overline{\Omega} := \overline{G} \times [0, \tau]$ і $\overline{S} := \Gamma \times [0, \tau]$ — замикання Ω і S відповідно.

Для параболічного рівняння другого порядку, заданого в Ω, розглянемо початково-крайові задачі з крайовою умовою Діріхле або із загальною крайовою умовою першого порядку:

$$Au \equiv \partial_t u(x,t) + \sum_{|\alpha| \leq 2} a^{\alpha}(x,t)\, D_x^{\alpha} u(x,t) = f(x,t) \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{1}$$

$$u(x,0) = h(x) \quad \text{при} \quad x \in G, \tag{2}$$

$$u(x,t)\big|_S = g(x,t) \quad \text{при} \quad x \in \Gamma, \quad 0 < t < \tau, \tag{3}$$

або

$$Bu\big|_S \equiv \left. \left(\sum_{j=1}^{n} b_j(x,t) D_j u(x,t) + b_0(x,t) u(x,t) \right) \right|_S = g(x,t) \quad \text{при} \quad x \in \Gamma, \quad 0 < t < \tau. \tag{4}$$

Всі коефіцієнти диференціальних виразів A і B вважаємо нескінченно гладкими комплекснозначними функціями на $\overline{\Omega}$ і $\overline{S}$ відповідно, тобто $a^{\alpha} \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ та $b_0,\, b_j \in C^{\infty}(\overline{S})$. Використовуємо такі позначення для частинних похідних:

$$D_x^{\alpha} := D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}, \quad D_j := i\,\partial/\partial x_j, \quad \partial_t := \partial/\partial t.$$

Тут $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — довільна точка простору $\mathbb{R}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультиіндекс і $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Підсумовування в (1) проводиться за цілими індексами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0$, що задовольняють умову, вказану під знаком суми.

Припускаємо [1] (§ 9, п. 1), що рівняння (1) є параболічним за Петровським у замкненому циліндрі $\overline{\Omega}$, а крайовий диференціальний оператор B накриває диференціальний оператор A на бічній поверхні $\overline{S}$ цього циліндра. Це означає виконання таких двох умов.

Умова 1. Для довільних $x \in \overline{G}$, $t \in [0, \tau]$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ та $p \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} p \geq 0$,

$$A^{(0)}(x,t,\xi,p) \equiv p + \sum_{|\alpha|=2} a^{\alpha}(x,t)\, \xi^{\alpha} \neq 0 \quad \text{за умови} \quad |\xi| + |p| \neq 0.$$

Довільно виберемо $x \in \Gamma$, $t \in [0, \tau]$, дотичний вектор $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$ до межі Γ у точці x та число $p \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} p \geq 0$, такі, що $|\eta| + |p| \neq 0$. Нехай $\nu(x) = (\nu_1(x), \ldots, \nu_n(x))$ — орт внутрішньої нормалі до межі Γ у точці x.

Умова 2. Для кожного такого вибору x, t, η та p виконуються дві властивості:

а) $\sum_{j=1}^{n} b_j(x,t) \nu_j(x) \neq 0$, б) число $\zeta = -\left(\sum_{j=1}^{n} b_j(x,t)\eta_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j(x,t)\nu_j(x)\right)^{-1}$ не є коренем полінома $A^{(0)}(x, t, \eta + \zeta\nu(x), p)$ змінної $\zeta \in \mathbb{C}$.

З умови 1 випливає, що у випадку, коли всі коефіцієнти $b_j(x,t),\ j = 1,\ldots,n,$ є дійсними, частина б) в умові 2 виконується автоматично.

Зауважимо, що для початково-крайової задачі (1), (2) і (3) (або (4)) „гарні" умови $f \in C(\overline{\Omega})$, $g \in C(\overline{S})$ і $h \in C(\overline{G})$ ще не гарантують того, що її розв'язок u є класичним. Поняття класичного розв'язку буде сформульовано в п. 4. Попередньо зазначимо, що воно природно містить умову $u \in C^{2,1}_{x,t}(\Omega)$, тобто функція u є в Ω двічі неперервно диференційовною за сукупністю змінних $x_1,\ldots,x_n$ і неперервно диференційовною за змінною t. Це випливає, зокрема, з результату Л. Хермандера [37] (теорема 7.9.8). Згідно з ним, навіть коли всі коефіцієнти рівняння (1) є сталими, існує функція $f \in C(\Omega)$ з $\operatorname{supp} f \subset \Omega$ така, що це рівняння має узагальнений розв'язок $u \in C^1(\Omega) \setminus C^{2,1}_{x,t}(\Omega)$ з $\operatorname{supp} u \subset \Omega$. Отже, розглянута задача може мати некласичний розв'язок u у випадку „гарних" правих частин $f \in C(\overline{\Omega})$, $g \equiv 0$ і $h \equiv 0$.

Щоб гарантувати класичність узагальненого розв'язку розглядуваних задач, потрібно на їхні праві частини накласти деякі інші умови. Можна використати простори Гельдера. Зокрема, для задачі (1) – (3) достатньою умовою існування класичного розв'язку буде (див., наприклад, [38, с. 42]) належність функції f простору Гельдера $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ з деяким $\alpha > 0$, неперервність функцій g та h на $\overline{S}$ і $\overline{G}$ відповідно та виконання умови узгодження $g \restriction \Gamma = h \restriction \Gamma$. Для існування класичного розв'язку задачі (1), (2), (4), мабуть, лише неперервності функцій g і h буде недостатньо (див. [2] (гл. 4, теорема 15.1), [8] (§ 3, теорема 5), [9, с. 185]).

У даній роботі ми будемо діяти по-іншому. Сформулюємо умови класичності узагальнених розв'язків задач (1) – (3) та (1), (2), (4) у термінах належності їхніх правих частин f, g та h гільбертовим функціональним просторам Хермандера $\mathcal{B}_{2,\mu}$.

Зауважимо, що випадок $n = 1$, коли $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — плоска область, є особливим і тому потребує окремого розгляду. Ця особливість зумовлена тим, що в цьому випадку умова класичності узагальненого розв'язку формулюється у термінах належності правої частини рівняння до негативних просторів Хермандера, а не до позитивних, як у випадку $n \geq 2$, розглянутому у цій роботі.

3. Простори Хермандера, пов'язані з задачею. Вони є окремим випадком гільбертових функціональних просторів $H^{\mu} := \mathcal{B}_{2,\mu}$, введених і досліджених Л. Хермандером у [11] (п. 2.2), а згодом і Л. Р. Волевичем та Б. П. Панеяхом [13] (§ 2, 3). Наведемо коротко необхідні означення (більш детально див. [35], п. 3).

Показником регулярності функцій (або розподілів), що утворюють простір $H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$, де ціле $k \geq 1$, є вимірна за Борелем функція $\mu\colon \mathbb{R}^k \to (0,\infty)$, яка задовольняє таку умову: існують додатні числа c та l такі, що

$$\frac{\mu(\xi)}{\mu(\eta)} \leq c\,(1 + |\xi - \eta|)^{l} \quad \text{для довільних} \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^k.$$

За означенням комплексний лінійний простір $H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$ складається з усіх повільно зростаючих розподілів $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^k)$, перетворення Фур'є $\widehat{w}$ яких є локально інтегровними за Лебегом функціями, що задовольняють умову

$$\|w\|^2_{H^{\mu}(\mathbb{R}^k)} := \int\limits_{\mathbb{R}^k} \mu^2(\xi)|\widehat{w}(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

(У роботі всі функції та розподіли вважаються комплекснозначними.) Цей простір є гільбертовим відносно введеної норми $\|w\|_{H^{\mu}(\mathbb{R}^k)}$.

Нам знадобиться версія простору $H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$ для довільної відкритої непорожньої множини $V \subset \mathbb{R}^k$. Лінійний простір $H^{\mu}(V)$ складається, за означенням, із звужень $u = w \restriction V$ всіх розподілів $w \in H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$ на множину V. У цьому просторі норму задано формулою

$$\|u\|_{H^{\mu}(V)} := \inf\bigl\{\|w\|_{H^{\mu}(\mathbb{R}^k)} :\ w \in H^{\mu}(\mathbb{R}^k),\ u = w \restriction V\bigr\}.$$

Простір $H^{\mu}(V)$ є гільбертовим відносно цієї норми.

Для зручності позначень покладемо $\gamma := 1/2$. Далі будемо використовувати показники регулярності вигляду

$$\mu_{s,\varphi}(\xi', \xi_k) := \mu(\xi', \xi_k) := \bigl(1 + |\xi'|^2 + |\xi_k|^{2\gamma}\bigr)^{s/2} \varphi\bigl((1 + |\xi'|^2 + |\xi_k|^{2\gamma})^{1/2}\bigr), \tag{5}$$

де $\xi' \in \mathbb{R}^{k-1}$ та $\xi_k \in \mathbb{R}$ — аргументи функції μ. Тут числовий параметр s є дійсним, а функціональний параметр φ належить класу $\mathcal{M}$.

За означенням клас $\mathcal{M}$ складається з усіх вимірних за Борелем функцій $\varphi\colon [1, \infty) \to (0, \infty)$, які задовольняють такі умови:

а) обидві функції φ та $1/\varphi$ обмежені на кожному відрізку $[1, b]$, де $1 < b < \infty$;

б) функція φ повільно змінюється за Й. Карамата на нескінченності, а саме, $\varphi(\lambda r)/\varphi(r) \to 1$ при $r \to \infty$ для кожного $\lambda > 0$.

Теорію повільно змінних функцій (на нескінченності) викладено, наприклад, у монографії [39]. Їх важливим прикладом є функції вигляду

$$\varphi(r) := (\log r)^{q_1} (\log \log r)^{q_2} \ldots (\underbrace{\log \ldots \log}_{k \text{ разів}} r)^{q_k} \quad \text{при} \quad r \gg 1,$$

де параметри $k \in \mathbb{N}$ та $q_1, q_2, \ldots, q_k \in \mathbb{R}$ є довільними.

Нехай $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Розв'язки u початково-крайових задач (1)–(3) і (1), (2), (4) та праві частини f рівняння (1) будемо розглядати в анізотропних гільбертових функціональних просторах Хермандера $H^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega) := H^{\mu}(\Omega)$, де показник μ визначено формулою (5), у якій $k := n + 1$.

Якщо $\varphi(r) \equiv 1$, то $H^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega)$ стає анізотропним гільбертовим простором Соболєва порядку $(s, s\gamma)$; позначимо його через $H^{s,s\gamma}(\Omega)$. Тут s — показник регулярності розподілу $u = u(x, t)$ за просторовою змінною $x \in \Omega$, а $s\gamma$ — показник регулярності за часовою змінною $t \in (0, \tau)$. В загальному випадку, коли $\varphi \in \mathcal{M}$ є довільною, мають місце неперервні і щільні вкладення

$$H^{s_1,s_1\gamma}(\Omega) \hookrightarrow H^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega) \hookrightarrow H^{s_0,s_0\gamma}(\Omega) \quad \text{при} \quad s_0 < s < s_1. \tag{6}$$

У випадку, коли $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, нам будуть потрібні такі простори Хермандера, де $\varphi \in \mathcal{M}$ є зростаючою (в нестрогому сенсі) функцією. У зв'язку з цим зауважимо, що для довільної зростаючої (в нестрогому сенсі) функції $\varphi \in \mathcal{M}$ правильним є неперервне та щільне вкладення $H^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega) \hookrightarrow H^{s,s\gamma}(\Omega)$.

Для зручності формулювання основних результатів введемо локальні аналоги просторів $H^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega)$. Для всіх $s > 0$ і $\varphi \in \mathcal{M}$ позначимо

$$H^{s,s\gamma,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega) := \bigl\{f \in L_2(\Omega) :\ \chi f \in H^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega) \ \text{ для всіх } \ \chi \in C^{\infty}_0(\Omega)\bigr\}.$$

Нам знадобляться також анізотропні простори Хермандера, задані на бічній поверхні $S = \Gamma \times (0, \tau)$ циліндра Ω. До них будуть належати праві частини g крайових умов (3) і (4). Означимо ці простори, використавши спеціальні локальні карти на S (див. [33], п. 1). Нехай $s > 0$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Попередньо для відкритої смуги $\Pi := \mathbb{R}^{n-1} \times (0, \tau)$ розглянемо гільбертові простори $H^{s,s\gamma,\varphi}(\Pi) := H^{\mu}(\Pi)$, де показник μ визначено формулою (5), у якій $k := n$. Довільно виберемо скінченний атлас із C^{∞}-структури на замкненому многовиді Γ. Нехай цей атлас утворено локальними картами $\theta_j : \mathbb{R}^{n-1} \leftrightarrow \Gamma_j$, де $j = 1, \ldots, \lambda$. Тут відкриті множини $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_\lambda$ складають покриття многовиду Γ. Окрім цього, довільно виберемо такі функції $\chi_j \in C^{\infty}(\Gamma)$, $j = 1, \ldots, \lambda$, що $\operatorname{supp} \chi_j \subset \Gamma_j$ і $\sum_{j=1}^{\lambda} \chi_j = 1$ на Γ.

За означенням лінійний простір $H^{s,s\gamma,\varphi}(S)$ складається з усіх функцій $v \in L_2(S)$ на многовиді S таких, що для кожного номера $j \in \{1, \ldots, \lambda\}$ функція

$$v_j(y, t) := \chi_j(\theta_j(y))\, v(\theta_j(y), t)$$

аргументів $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ і $t \in (0, \tau)$ належить до $H^{s,s\gamma,\varphi}(\Pi)$.

У просторі $H^{s,s\gamma,\varphi}(S)$ норму задано формулою

$$\|v\|_{H^{s,s\gamma,\varphi}(S)} := \left(\sum_{j=1}^{\lambda} \|v_j\|^2_{H^{s,s\gamma,\varphi}(\Pi)} \right)^{1/2}.$$

Цей простір є гільбертовим відносно введеної норми і не залежить з точністю до еквівалентності норм від вибору локальних карт і розбиття одиниці на Γ [33] (теорема 1).

Нарешті, введемо простори, до яких належить права частина h початкової умови (2). Це ізотропні гільбертові простори Хермандера $H^{s,\varphi}(G) := H^{\mu}(G)$ з показником $\mu(\xi) := (1 + |\xi|^2)^{s/2} \varphi((1 + |\xi|^2)^{1/2})$ аргументу $\xi \in \mathbb{R}^n$. Їх виділили і систематично використовували В. А. Михайлець та О. О. Мурач у теорії еліптичних крайових задач [19, 20].

Якщо $\varphi \equiv 1$, то означені вище простори стають соболєвськими просторами (анізотропними на Ω і S, або ізотропними на G). У цьому випадку будемо пропускати індекс φ у позначеннях цих і введених нижче просторів.

4. Основні результати. Розглянемо спочатку задачу (1) – (3), яка відповідає крайовій умові Діріхле. Для того щоб існував достатньо регулярний розв'язок u цієї задачі, її праві частини повинні задовольняти деякі умови узгодження (див. [1] (§11) або [2] (розд. 4, § 5)). Тому для довільних параметрів $s \geq 2$ і $\varphi \in \mathcal{M}$ введемо далі гільбертів простір $\mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi}$, елементи (f, g, h) якого будуть задовольняти ці умови (детальніше див. [34] (п. 3) і [35] (п. 4)). У випадку $s = 2$ додатково припустимо, що φ є зростаючою (в нестрогому сенсі) функцією. Позначимо

$$\mathcal{H}_{\mathrm{D}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi} := H^{s-2,(s-2)/2,\varphi}(\Omega) \oplus H^{s-1/2,s/2-1/4,\varphi}(S) \oplus H^{s-1,\varphi}(G).$$

Якщо $s \notin \{2r + 3/2 : r \in \mathbb{N}\}$, то, за означенням, лінійний простір $\mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi}$ складається з усіх вектор-функцій $\big(f, g, h\big) \in \mathcal{H}_{\mathrm{D}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi}$, які задовольняють такі умови узгодження:

$$\partial_t^k g \restriction \Gamma = v_k \restriction \Gamma \quad \text{для всіх} \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{таких, що} \quad 0 \leq k < s/2 - 3/4.$$

Тут функції $v_k = v_k(\cdot, f, h)$ означено рекурентними формулами

$$v_0(x) = h(x),$$

$$v_k(x) = -\sum_{|\alpha|\le 2}\sum_{q=0}^{k-1}\binom{k-1}{q}\partial_t^{k-1-q}a^{\alpha}(x,0)D_x^{\alpha}v_q(x) + \partial_t^{k-1}f(x,0), \tag{7}$$

де $x \in G$ є довільним, а цілі k такі, що $0 \le k < s/2 - 3/4$. Лінійний простір $\mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi}$ наділяється скалярним добутком і нормою з гільбертового простору $\mathcal{H}_{\mathrm{D}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi}$. Простір $\mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi}$ є повним, тобто гільбертовим.

Якщо $s \in \{2r + 3/2 : r \in \mathbb{N}\}$, то означаємо гільбертів простір $\mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi}$ за допомогою інтерполяції

$$\mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi} := \left[\mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{s-2-\varepsilon,(s-2-\varepsilon)/2,\varphi}, \mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{s-2+\varepsilon,(s-2+\varepsilon)/2,\varphi}\right]_{1/2}.$$

Тут число $\varepsilon \in (0, 1/2)$ вибрано довільно, а права частина рівності є результатом інтерполяції зазначеної пари гільбертових просторів з числовим параметром $1/2$. Означений у такий спосіб простір не залежить з точністю до еквівалентності норм від вибору числа ε.

Із результату М. С. Аграновича та М. І. Вішика [1] (теорема 12.1) випливає, що для кожної вектор-функції (f, g, h) із соболєвського простору $\mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{0,0}$ задача (1) – (3) має єдиний розв'язок $u \in H^{2,1}(\Omega)$. Таку функцію u називаємо узагальненим розв'язком цієї задачі із правою частиною $(f, g, h) \in \mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{0,0}$.

Тепер сформулюємо основний результат роботи для задачі (1) – (3). Це умови, записані в термінах належності її правих частин придатним просторам Хермандера, за яких узагальнений розв'язок цієї задачі є класичним.

Попередньо дамо означення класичного розв'язку цієї задачі.

Означення 1. *Узагальнений розв'язок $u \in H^{2,1}(\Omega)$ задачі* (1) – (3) *назвемо класичним, якщо узагальнені частинні похідні $\partial_t u$ і $D_x^{\alpha}u$, для яких $|\alpha| \le 2$, є неперервними в Ω, а сама функція u є неперервною у замкненому циліндрі $\overline{\Omega}$.*

Іншими словами, узагальнений розв'язок u задачі (1) – (3) назвемо її класичним розв'язком, якщо

$$u \in C_{x,t}^{2,1}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}).$$

Теорема 1. *Нехай функція $u \in H^{2,1}(\Omega)$ є узагальненим розв'язком задачі* (1) – (3), *праві частини якої задовольняють умови*

$$f \in H_{\mathrm{loc}}^{1+n/2,\,1/2+n/4,\,\varphi_1}(\Omega), \tag{8}$$

$$(f,\, g,\, h) \in \mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{-1+n/2,\,-1/2+n/4,\,\varphi_2} \tag{9}$$

з деякими функціональними параметрами φ_1 і $\varphi_2 \in \mathcal{M}$ такими, що

$$\int_1^{\infty} \frac{dr}{r\varphi_j^2(r)} < \infty \quad \text{для всіх} \quad j \in \{1, 2\}. \tag{10}$$

При $n = 2$ додатково припускаємо, що φ_2 є зростаючою (*в нестрогому сенсі*) *функцією. Тоді $u(x,t)$ є класичним розв'язком задачі* (1) – (3).

***Зауваження* 1.** Якщо сформулювати аналог теореми 1 для соболєвської шкали (випадок $\varphi_1 \equiv \varphi_2 \equiv 1$), то доведеться замінити умови (8) і (9) на більш сильні: для правих частин задачі виконуються включення

$$f \in H_{\mathrm{loc}}^{1+n/2+\varepsilon_1,\ 1/2+n/4+\varepsilon_1/2}(\Omega), \tag{11}$$

$$(f,\, g,\, h) \in \mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{-1+n/2+\varepsilon_2,\ -1/2+n/4+\varepsilon_2/2}$$

для деяких $\varepsilon_1 > 0$ і $\varepsilon_2 > 0$.

***Зауваження* 2.** З твердження 3(ii) (див. п. 5) випливає, що існують функції $f \notin C(\overline{\Omega})$, які задовольняють умови (8) і (9) (або (13)). Окрім того, можна показати, що серед функцій, підпорядкованих цим умовам, знайдуться ті, які не задовольняють умову Гельдера ні при якому значенні показника $0 < \alpha < 1$ на жодному компакті $K \subset \Omega$.

Перейдемо до розгляду задачі (1), (2), (4), яка відповідає загальній крайовій умові першого порядку. Для цієї задачі умови узгодження правих частин набирають вигляду

$$\partial_t^k g \restriction \Gamma = B_k(v_0, v_1, \ldots, v_k) \restriction \Gamma \quad \text{для всіх} \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{таких, що} \quad 0 \le k < s/2 - 5/4. \tag{12}$$

Тут

$$B_k(v_0, v_1, \ldots, v_k) = \sum_{q=0}^{k} \binom{k}{q} \left(\sum_{j=1}^{n} \partial_t^{k-q} b_j(x,0) D_j v_q(x) + \partial_t^{k-q} b_0(x,0) v_q(x) \right),$$

функції $v_k = v_k(\cdot, f, h)$ означено рекурентними формулами (7), де $x \in G$ є довільним, а цілі k такі, що $0 \le k < s/2 - 5/4$.

Подібно до попередньої задачі для всіх $s \ge 2$ і $\varphi \in \mathcal{M}$ введемо гільбертів простір $\mathcal{Q}_{\mathrm{N}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi}$ (див. [34], п. 3). Позначимо

$$\mathcal{H}_{\mathrm{N}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi} := H^{s-2,(s-2)/2,\varphi}(\Omega) \oplus H^{s-3/2,s/2-3/4,\varphi}(S) \oplus H^{s-1,\varphi}(G).$$

Якщо $s \notin \{2r + 1/2 : r \in \mathbb{N}\}$, то, за означенням, лінійний простір $\mathcal{Q}_{\mathrm{N}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi}$ складається з усіх вектор-функцій $\big(f, g, h\big) \in \mathcal{H}_{\mathrm{N}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi}$, які задовольняють умови узгодження (12). Цей лінійний простір наділяється скалярним добутком і нормою з гільбертового простору $\mathcal{H}_{\mathrm{N}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi}$. Простір $\mathcal{Q}_{\mathrm{N}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi}$ є повним, тобто гільбертовим.

Якщо $s \in \{2r+1/2 : r \in \mathbb{N}\}$, то означаємо простір $\mathcal{Q}_{\mathrm{N}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi}$ за допомогою інтерполяції

$$\mathcal{Q}_{\mathrm{N}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi} := \Big[\mathcal{Q}_{\mathrm{N}}^{s-2-\varepsilon,(s-2-\varepsilon)/2,\varphi},\, \mathcal{Q}_{\mathrm{N}}^{s-2+\varepsilon,(s-2+\varepsilon)/2,\varphi} \Big]_{1/2}.$$

Тут число $\varepsilon \in (0, 1/2)$ вибрано довільно. Означений у такий спосіб простір не залежить з точністю до еквівалентності норм від вибору числа ε.

Зазначимо, що при $s \in [2; 5/2)$ задача (1), (2), (4) не містить умов узгодження та простори $\mathcal{Q}_{\mathrm{N}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi}$ і $\mathcal{H}_{\mathrm{N}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi}$ рівні.

Із результату М. С. Аграновича та М. І. Вішика [1] (теорема 12.1) випливає, що для кожної вектор-функції (f, g, h) із соболєвського простору $\mathcal{H}_{\mathrm{N}}^{0,0}$ задача (1), (2), (4) має єдиний розв'язок $u \in H^{2,1}(\Omega)$. Таку функцію u називаємо узагальненим розв'язком цієї задачі із правою частиною $(f, g, h) \in \mathcal{H}_{\mathrm{N}}^{0,0}$.

Тепер наведемо означення класичного розв'язку задачі (1), (2), (4) та сформулюємо основний результат роботи для цієї задачі.

Означення 2. *Узагальнений розв'язок* $u \in H^{2,1}(\Omega)$ *задачі* (1), (2), (4) *назвемо класичним, якщо узагальнені частинні похідні* $\partial_t u$ *і* $D_x^\alpha u$, *для яких* $|\alpha| \leq 2$, *є неперервними в* Ω, *а функція* u *та її узагальнені частинні похідні* $\partial u/\partial x_j$ *для всіх* $j \in \{1, \ldots, n\}$ *є неперервними у замкненому циліндрі* $\overline{\Omega}$.

Теорема 2. *Нехай функція* $u \in H^{2,1}(\Omega)$ *є узагальненим розв'язком задачі* (1), (2), (4), *праві частини якої задовольняють умови* (8) *і*

$$(f,\, g,\, h) \in \mathcal{Q}_{\mathrm{N}}^{n/2,\, n/4,\, \varphi_2} \tag{13}$$

з деякими функціональними параметрами φ_1 *і* $\varphi_2 \in \mathcal{M}$, *для яких виконується умова* (10). *Тоді* $u(x,t)$ *є класичним розв'язком задачі* (1), (2), (4).

***Зауваження* 3.** Якщо сформулювати аналог теореми 2 для соболєвської шкали ($\varphi_1 \equiv \varphi_2 \equiv 1$), то доведеться замінити умови (8) і (13) на більш сильні: для правих частин задачі виконуються включення (11) і

$$(f,\, g,\, h) \in \mathcal{Q}_{\mathrm{N}}^{n/2+\varepsilon_2,\, n/4+\varepsilon_2/2}$$

для деяких $\varepsilon_1 > 0$ і $\varepsilon_2 > 0$.

5. Доведення результатів. У роботах [34] (п. 3) і [35] (п. 4) показано, що оператори, які відповідають досліджуваним задачам, є ізоморфізмами між придатними парами просторів Хермандера. Доведення теорем 1 і 2 спирається на ці факти та деяку модифікацію теореми вкладення Хермандера [11] (теорема 2.2.7). Для зручності сформулюємо необхідні твердження.

Пов'яжемо із задачею (1) – (3) лінійне відображення

$$\Lambda_{\mathrm{D}} : u \mapsto (Au,\, u\restriction_{\overline{S}}, u(\cdot, 0)), \quad \text{де} \quad u \in C^\infty(\overline{\Omega}). \tag{14}$$

Твердження 1. *Нехай довільно задано параметри: числовий* $s \geq 2$ *і функціональний* $\varphi \in \mathcal{M}$. *У випадку* $s = 2$ *додатково припустимо, що* φ *є зростаючою (в нестрогому сенсі) функцією. Тоді відображення* (14) *продовжується єдиним чином (за неперервністю) до ізоморфізму*

$$\Lambda_{\mathrm{D}} :\ H^{s,s/2,\varphi}(\Omega) \leftrightarrow \mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi}. \tag{15}$$

Пов'яжемо із задачею (1), (2), (4) лінійне відображення

$$\Lambda_{\mathrm{N}} :\ u \mapsto (Au,\, Bu\restriction_{\overline{S}},\, u(\cdot, 0)), \quad \text{де} \quad u \in C^\infty(\overline{\Omega}). \tag{16}$$

Твердження 2. *Нехай довільно задано параметри: числовий* $s \geq 2$ *і функціональний* $\varphi \in \in \mathcal{M}$. *У випадку* $s = 2$ *додатково припустимо, що* φ *є зростаючою (в нестрогому сенсі) функцією. Тоді відображення* (16) *продовжується єдиним чином (за неперервністю) до ізоморфізму*

$$\Lambda_{\mathrm{N}} :\ H^{s,s/2,\varphi}(\Omega) \leftrightarrow \mathcal{Q}_{\mathrm{N}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi}. \tag{17}$$

Наступне твердження (див. [36], лема 8.1) є деякою модифікацією згаданої вище теореми вкладення Хермандера.

Твердження 3. *Нехай* $p \in \mathbb{Z}$, $p \geq 0$, $s := p + 1 + n/2$ *та* $\varphi \in \mathcal{M}$. *Тоді справджуються такі твердження:*

(i) *Якщо* φ *задовольняє умову*

$$\int\limits_1^\infty \frac{dr}{r\,\varphi^2(r)} < \infty, \tag{18}$$

то кожна функція $w \in H^{s,s/2,\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$ *має таку властивість: всі її узагальнені частинні похідні* $D_x^\alpha \partial_t^\beta w(x,t)$ *з* $0 \le |\alpha| + 2\beta \le p$ *є неперервними на* $\mathbb{R}^{n+1}$.

(ii) *Нехай* V — *непорожня відкрита підмножина* $\mathbb{R}^{n+1}$ *і ціле* k *таке, що* $1 \le k \le n$. *Якщо кожна функція* $w \in H^{s,s/2,\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$ *з* $\operatorname{supp} w \subset V$ *задовольняє умову* $\partial^j w/\partial x_k^j \in C(\mathbb{R}^{n+1})$ *для кожного* $j \in \mathbb{Z}$ *з* $0 \le j \le p$, *то* φ *задовольняє умову* (18).

Нам буде потрібний такий наслідок із твердження 3.

***Наслідок* 1.** *Твердження* 3 (i) *залишається правильним, якщо у ньому замінити* $H^{s,s/2,\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$ *на* $H^{s,s/2,\varphi}(\Omega)$ *і* $\mathbb{R}^{n+1}$ *на* $\overline{\Omega}$.

Справді, з означення простору $H^{s,s/2,\varphi}(\Omega)$ випливає, що для кожної функції $u \in H^{s,s/2,\varphi}(\Omega)$ існує така функція $w \in H^{s,s/2,\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$, що $u = w$ в Ω. Тому з твердження 3 (i) випливає, що всі узагальнені частинні похідні $D_x^\alpha \partial_t^\beta u(x,t)$ з $0 \le |\alpha| + 2\beta \le p$ є неперервними на $\overline{\Omega}$.

Перейдемо до доведення основних результатів.

***Доведення теореми* 1.** Спочатку покажемо, що $u \in C(\overline{\Omega})$. З включення (9) та ізоморфізму (15) для $s = 1 + n/2$ випливає включення

$$u \in H^{1+n/2,\ 1/2+n/4,\ \varphi_2}(\Omega).$$

Звідси на підставі наслідку 1, де $p := 0$, робимо висновок, що $u \in C(\overline{\Omega})$.

Тепер покажемо, що з (8) випливає включення $u \in C^{2,1}_{x,t}(\Omega)$. Нехай x_0 — довільна точка множини Ω. Позначимо через Ω_0 довільно вибраний окіл точки x_0 такий, що $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$. Тоді існує така функція $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$, що $\chi = 1$ на множині Ω_0. Розглянемо задачу

$$Au_1 = \chi f, \qquad u_1\big|_S = 0, \qquad u_1\big|_{t=0} = 0. \tag{19}$$

З (8) випливає, що $\chi f \in H^{1+n/2,\,1/2+n/4,\,\varphi_1}(\Omega)$ і χf дорівнює нулю поблизу межі Ω. Тоді за теоремою 4.1 з [36] задача (19) має єдиний розв'язок $u_1 \in H^{3+n/2,\,3/2+n/4,\,\varphi_1}(\Omega)$ (тут замість твердження 1 ми скористались теоремою 4.1 з [36], щоб не перевіряти включення $(\chi f, 0, 0) \in \mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{1+n/2,\,1/2+n/4,0\,\varphi_1}$). На підставі наслідку 1, де $p := 2$, маємо включення

$$\partial_t u_1, \quad D_x^\alpha u_1 \in C(\overline{\Omega}) \quad \text{при} \quad |\alpha| \le 2. \tag{20}$$

Оскільки

$$A(u_1 - u) = Au_1 - Au = \chi f - f = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_0$$

і параболічний оператор A є гіпоеліптичним (див., наприклад, [12], теорема 11.1.11), то $u_1 - u \in C^\infty(\Omega_0)$. З останнього включення і (20) випливає, що узагальнені частинні похідні $\partial_t u$ і $D_x^\alpha u$ з $|\alpha| \le 2$ є неперервними в деякому околі точки x_0. Оскільки x_0 є довільною точкою Ω, то $u \in C^{2,1}_{x,t}(\Omega)$.

Теорему 1 доведено.

***Доведення теореми* 2.** При доведенні теореми 1 було показано, що включення $u \in C^{2,1}_{x,t}(\Omega)$ є наслідком умови (8). Окрім того, з умови (13) випливає на підставі ізоморфізму (17) для $s = 2 + n/2$, що $u \in H^{2+n/2,\ 1+n/4,\ \varphi_2}(\Omega)$. Тому згідно з наслідком 1, де $p := 1$, маємо потрібні включення $u \in C(\overline{\Omega})$ і $\partial u/\partial x_j \in C(\overline{\Omega})$ для кожного $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Література

1. *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи мат. наук. – 1964. – **19**, № 3. – С. 53 – 161.
2. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
3. *Lions J.-L. Magenes E.* Non-homogeneous boundary-value problems and applications. – Vol. II. – Berlin: Springer, 1972. – Vol. II. – xi+242 p.
4. *Ивасишен С. Д.* Матрицы Грина параболических граничных задач. – Киев: Вища шк., 1990. – 200 с.
5. *Eidel'man S. D.* Parabolic equations // Encycl. Math. Sci. Vol. 63. Partial Different. Equat., VI. – Berlin: Springer, 1994. – P. 205 – 316.
6. *Eidel'man S. D., Zhitarashu N. V.* Parabolic boundary value problems. – Basel: Birkhäuser, 1998. – xii+298 p.
7. *Ильин В. А.* О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений // Успехи мат. наук. – 1960. – **15**, № 2. – С. 97 – 154.
8. *Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа// Успехи мат. наук. – 1962. – **17**, № 3. – С. 3 – 146.
9. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа.– М.: Мир, 1968. – 428 с.
10. *Матийчук М. И., Эйдельман С. Д.* О корректности задач Дирихле и Неймана для параболических уравнений второго порядка с коэффициентами из классов Дини // Укр. мат. журн. – 1974. – **26**, № 3. – С. 328 – 337.
11. *Hörmander L.* Linear partial differential operators. – Berlin: Springer, 1963. – 285 p. (Рус. перевод: *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. – Москва: Мир, 1965. – 380 с.)
12. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. – М.: Мир, 1986. – 455 с.
13. *Волевич Л. Р., Панеях Б. П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения // Успехи мат. наук. – 1965. – **20**, № 1. – С. 3 – 74.
14. *Лизоркин П. И.* Пространства обобщенной гладкости // Теория функциональных пространств / Х. Трибель. – М.: Мир, 1986. – С. 381 – 415.
15. *Paneah B.* The oblique derivative problem. The Poincaré problem.– Berlin: Wiley-VCH, 2000. – 348 p.
16. *Triebel H.* The structure of functions. – Basel: Birkhäuser, 2001. – xii+425 p.
17. *Farkas W., Leopold H.-G.* Characterisations of function spaces of generalized smoothness // Ann. mat. pura ed appl. – 2006. – **185**, № 1. – P. 1 – 62.
18. *Nicola F., Rodino L.* Global pseudodifferential calculas on Euclidean spaces. – Basel: Birkhäuser, 2010. – xi+306 p.
19. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* The refined Sobolev scale, interpolation, and elliptic problems // Banach J. Math. Anal. – 2012. – **6**, № 2. – P. 211 – 281.
20. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Hoӷmander spaces, interpolation, and elliptic problems. – Berlin: De Gruyter, 2014. – xiv+297 p.
21. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Interpolation Hilbert spaces between Sobolev spaces // Results Math. – 2015. – **67**, № 1. – P. 135 – 152.
22. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Refined scale of spaces, and elliptic boundary-value problems. II // Ukr. Math. J. – 2006. – **58**, № 3. – P. 398 – 417.
23. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Refined scale of spaces, and elliptic boundary-value problems. III // Ukr. Math. J. – 2007. – **59**, № 5. – P. 744 – 765.
24. *Murach A. A.* Elliptic pseudo-differential operators in a refined scale of spaces on a closed manifold // Ukr. Math. J. – 2007. – **59**, № 6. – P. 874 – 893.
25. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* An elliptic boundary-value problem in a two-sided refined scale of spaces // Ukr. Math. J. – 2008. – **60**, № 4. – P. 574 – 597.
26. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Interpolation with a function parameter and refined scale of spaces // Methods Funct. Anal. and Top. – 2008. – **14**, № 1. – P. 81 – 100.
27. *Los V., Murach A. A.* Parabolic problems and interpolation with a function parameter // – Methods Funct. Anal. and Top. – 2013. – **19**, № 2. – P. 146 – 160.
28. *Лось В. М., Мурач О. О.* Про гладкість розв'язків параболічних мішаних задач // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 2. – С. 219 – 234.

29. *Лось В. Н., Мурач А. А.* Параболические смешанные задачи в пространствах обобщенной гладкости // Доп. НАН України. – 2014. – № 6. – С. 23 – 31.
30. *Лось В. М.* Параболічні мішані задачі для систем Петровського в просторах узагальненої гладкості // Доп. НАН України. – 2014. – № 10. – С. 24 – 32.
31. *Лось В. М.* Класичні розв'язки параболічної мішаної задачі і $2b$-анізотропні простори Хермандера // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. – **12**, № 2. – С. 276 – 290.
32. *Лось В. М.* Мішані задачі для двовимірного рівняння теплопровідності у анізотропних просторах Хермандера // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 5. – С. 645 – 656.
33. *Лось В. М.* Анізотропні простори Хермандера на бічній поверхні циліндра // Нелінійні коливання. – 2015. – **18**, № 2. – С. 226 – 237.
34. *Лось В. М., Мурач О. О.* Теореми про ізоморфізми для деяких параболічних початково-крайових задач у просторах Хермандера // arXiv:1510.06270.
35. *Лось В. М.* Теореми про ізоморфізми для деяких параболічних початково-крайових задач у просторах Хермандера: граничний випадок // Укр. мат. журн. – 2016 – **68**, № 6. – С. 786 – 799.
36. *Los V., Mikhailets V. A., Murach A. A.* An isomorphism theorem for parabolic problems in Hörmander spaces and its applications // arXiv:1511.04688.
37. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье. – М.: Мир, 1986. – 464 с.
38. *Михайлов В.П.* Смешанная и краевая задачи для параболических уравнений и систем // Мат. энциклопедия. – М.: Сов. энцикл., 1985. – Т. 5. – 1248 с.
39. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 144 с.

Одержано 16.12.15