УДК 517.98+515.164.17

К. В. Моравецька (Ін-т прикл. систем. аналізу Нац. техн. ун-ту України „КПІ”, Київ)

ДИФЕРЕНЦІЙОВНІСТЬ БОРЕЛІВСЬКИХ МІР УЗДОВЖ ВЕКТОРНИХ ПОЛІВ НА БАНАХОВИХ МНОГОВИДАХ З РІВНОМІРНОЮ СТРУКТУРОЮ

We analyze the differentiability of Borel measures on Banach manifolds with uniform structure and prove a criterion of weak differentiability.

Рассмотрена дифференцируемость борелевских мер на банаховых многообразиях с равномерной структурой и доказан критерий слабой дифференцируемости.

1. Вступ. У роботах [1, 2] досліджено диференційовність мір уздовж постійних напрямків на локально опуклих просторах і доведено критерій слабкої диференційовності мір. У даній роботі розглядаються борелівські міри на банахових многовидах із рівномірною структурою і досліджується диференційовність таких мір уздовж обмежених векторних полів. Критерій слабкої диференційовності поширюється на вказаний випадок.

Актуальність даної теми зумовлена тим, що в нескінченновимірних просторах немає канонічного способу ототожнення мір і узагальнених функцій через відсутність інваріантної відносно зсувів ненульової міри. Якщо у скінченновимірному випадку диференціальні властивості мір описуються в термінах їх щільностей відносно міри Лебега, то у нескінченновимірному такої можливості немає, і у зв'язку з цим виникає необхідність одночасного розгляду просторів функцій і мір окремо, тобто побудови аналізу мір, паралельного до аналізу функцій. Основна ідея теорії диференційовних мір полягає у перенесенні дії диференціальних операторів безпосередньо на міри.

Диференційовність мір уздовж векторних полів була введена Ю. Л. Далецьким у [3]. Подальші дослідження проведені, зокрема, у [4] як для мір на банахових просторах, так і для мір на гладких банахових многовидах. Диференційовність при цьому визначено через формулу інтегрування частинами для деякого класу гладких функцій. Як буде показано нижче (наслідки 2, 3), при певних умовах цей підхід є еквівалентним підходу, описаному в [2] (гл. 3). При цьому у подальших міркуваннях накладено умову абсолютної неперервності похідної міри відносно початкової, що фактично звело дослідження до випадку сильної диференційовності (див. зауваження 1). У роботі [5] розглянуто ще більш загальний випадок диференційовності, коли замість зсувів мір беруться довільні вимірні перетворення. Однак, як і у [4], більша частина результатів стосується випадку, коли визначено логарифмічну похідну (похідну Радона – Нікодима похідної міри відносно початкової).

Дану роботу в основному присвячено випадку слабкої диференційовності, коли логарифмічну похідну не визначено. Перенесення результатів на банахові многовиди потребує долучення до них додаткової структури.

Банахові многовиди з рівномірною структурою (відповідні означення див. нижче) природним чином виникають у нескінченновимірному аналізі та стохастичній диференціальній геометрії при побудові глобальних розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь [4, с. 177]. Наявність рівномірної структури дозволяє переносити на нескінченновимірний випадок базові результати класичного аналізу [6]. У монографії [7, с. 144] подібне означення розглядається і для випадку ріманових многовидів.

Наведемо тепер основний результат статті, а саме критерій слабкої диференційовності міри уздовж векторного поля на банаховому многовиді з рівномірною структурою.

Теорема 1. *Нехай банахів многовид M з рівномірною структурою допускає розбиття одиниці класу C^1, X — обмежене векторне поле на M, μ — знакозмінна скінченна радонівська міра на $\mathcal{A} = \mathcal{B}(M)$. Міра μ диференційовна за Скороходом уздовж X тоді і тільки тоді, коли існує таке число $\gamma > 0$, що для кожного $A \in \mathcal{A}$ існує $c(A)$ таке, що*

$$\bigl|\mu_t(A) - \mu(A)\bigr| \leq c(A)\,|t| \qquad \forall t \in [-\gamma, \gamma]. \tag{1}$$

Отримано також формулу інтегрування частинами в якості ще одного критерію слабкої диференційовності (наслідок 2).

2. Основні теоретичні відомості та позначення. Нехай M — хаусдорфів банахів многовид класу C^2 з дійсним модельним простором E (E-многовид). Вважаємо також, що M є зв'язним.

Позначимо через $C_b(M)$ та $C_b^{\mathbb{C}}(M)$ банахові простори відповідно дійснозначних та комплекснозначних неперервних обмежених функцій на M з нормою $f \mapsto \|f\| = \sup_{x \in M}\bigl|f(x)\bigr|$.

Через $B_\varepsilon^N(x)$ та $\overline{B}_\varepsilon^N(x)$ будемо позначати відповідно відкриту та замкнену кулю в метричному просторі N з центром у точці x радіуса ε. Для множин будемо використовувати таке позначення: $B_\varepsilon^N(A) = \bigcup_{x \in A} B_\varepsilon^N(x)$.

Наступні означення наводяться відповідно до [6].

Означення 1. *Атлас $\Omega = \bigl\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\bigr\}$ на M називається обмеженим, якщо існує таке число $K > 0$, що відображення склейки $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ для кожної пари карт атласа задовольняє умову*

$$x \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \Longrightarrow \bigl\|(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})'(x)\bigr\| \leq K, \qquad \bigl\|(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})''(x)\bigr\| \leq K.$$

Два обмежених атласи Ω_1 та Ω_2 називаються еквівалентними, якщо атлас $\Omega_1 \cup \Omega_2$ також є обмеженим атласом на M. Якщо на M задано клас еквівалентних обмежених атласів, то кажуть, що на M задано обмежену структуру класу C^2.

Означення 2. *Обмежений атлас Ω називається рівномірним, якщо існує таке $r > 0$, що для будь-якої точки $p \in M$ існує така карта $(U, \varphi) \in \Omega$, що $\varphi(U)$ містить кулю в E з центром у $\varphi(p)$ радіуса r.*

Якщо многовид M має обмежену структуру, і серед еквівалентних атласів, що задають цю структуру, є хоча б один рівномірний атлас, структура називається рівномірною.

Означення 3. *Векторне поле X класу C^1 на многовиді M з обмеженим атласом Ω називається обмеженим, якщо існує число $L > 0$, яке обмежує зверху головну частину X_α кожного локального зображення векторного поля X разом з його похідною*:

$$\forall (U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \Omega \quad \forall x \in \varphi_\alpha(U_\alpha)\colon \bigl\|X_\alpha(x)\bigr\| \leq L, \quad \bigl\|X'_\alpha(x)\bigr\| \leq L.$$

Далі вважаємо, що $\Omega = \bigl\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\bigr\}$ — рівномірний атлас на M. Наявність обмеженої структури дозволяє побудувати на многовиді метрику, узгоджену з вихідною топологією, причому многовид виявляється повним за цією метрикою (див. [6]). Отже, M є повним метричним простором.

Відомо, що метричний простір є паракомпактним [8, с. 99]. При цьому за результатами [9, с. 43] для будь-якого відкритого покриття $\{V_\alpha\}$ існує локально скінченне відкрите покриття

$\{T_\alpha\}$ з тим же набором індексів і таке, що для кожного індексу α справедливим є включення $T_\alpha \subset U_\alpha$. Крім того, M допускає неперервне розбиття одиниці. У випадку, коли простір E гільбертів, многовид M допускає розбиття одиниці класу C^2 [9, с. 49].

Функція $f\colon M \to \mathbb{R}$ належить класу C^1 на M, якщо для кожної карти $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \Omega$ відображення $f \circ \varphi_\alpha^{-1}\colon \varphi_\alpha(U_\alpha) \to \mathbb{R}$ є неперервно диференційовним. Через $C_b^1(M)$ позначимо клас обмежених функцій класу C^1, похідна яких рівномірно обмежена в усіх картах (тобто існує така стала $K > 0$, що для кожної карти $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \Omega$ і кожної точки $x \in U_\alpha$ виконується нерівність $\left\| \bigl(f \circ \varphi_\alpha^{-1}\bigr)'\bigl(\varphi_\alpha(x)\bigr) \right\| \le K$).

Нехай $\mathcal{A} = \mathcal{B}(M)$ — борелівська σ-алгебра на M. Далі під мірами на M будемо розуміти дійснозначні знакозмінні скінченні міри на $\mathcal{A}$. Для міри μ на M існує розклад Хана – Жордана

$$\mu = \mu^+ - \mu^-, \quad \text{де} \quad \mu^+ = \mu(\,\cdot \cap M^+), \quad \mu^- = -\mu(\,\cdot \cap M^-), \quad M = M^+ \cup M^-, \quad M^+ \cap M^- = \varnothing.$$

Простір мір на $\mathcal{A}$ є банаховим з нормою $\mu \mapsto \|\mu\| = |\mu|(M)$ (тут $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ — повна варіація міри μ). Міра μ називається радонівською, якщо для кожної множини $B \in \mathcal{A}$ і кожного $\varepsilon > 0$ існує така компактна множина $K_\varepsilon \subset B$, що $|\mu|(B \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$.

Через $\mathcal{L}^1(\mu)$ будемо позначати клас функцій, $|\mu|$-інтегровних за Лебегом. При цьому $\|f\|_{\mathcal{L}^1(|\mu|)} = \int_M |f|\, d|\mu|$. Для кожної функції $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ символом $\nu = f\,\mu$ позначимо міру, що задається рівністю $\nu(A) = \int_A f\, d\mu \ \ \forall A \in \mathcal{A}$. Тоді виконуються такі властивості:

$$|f\,\mu| = |f|\,|\mu|, \qquad \|f\,\mu\| = \|f\|_{\mathcal{L}^1\left(|\mu|\right)}, \qquad \forall A \in \mathcal{A}\colon \left| \int_A f\, d\mu \right| \le \int_A |f|\, d|\mu|.$$

Для будь-якої міри μ визначимо лінійний функціонал L на $C_b(M)$: $Lf = \int_M f\, d\mu$, $f \in C_b(M)$. Тоді за теоремою 2 [10, с. 284] L є обмеженим і при цьому $\|L\| = \|\mu\|$.

3. Потік обмеженого векторного поля. Далі вважатимемо, що на банаховому многовиді M з рівномірним атласом $\Omega = \bigl\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\bigr\}$ задано обмежене векторне поле X класу C^1.

Розглянемо потік $\Phi(t,x) = \Phi_x(t) = \Phi_t(x)$ векторного поля X, який за результатами [9, с. 96] визначено глобально на $\mathbb{R} \times M$. За результатами [9, с. 97] потік Φ є морфізмом класу C^1 многовиду $\mathbb{R} \times M$ в M. Для кожної карти $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \Omega$ визначимо локальний потік $\Phi^\alpha(t,y) = \varphi \circ \Phi\bigl(t, \varphi^{-1}(y)\bigr)$ на такій підмножині $\mathbb{R} \times \varphi(U_\alpha)$, де права частина має сенс. При цьому для кожного $y \in \varphi_\alpha(U_\alpha)$ потік Φ_y^α визначено на відкритому проміжку $\Delta_y \subset \mathbb{R}$, що містить точку 0, і на цьому проміжку справджується рівність $\dfrac{d}{dt}\,\Phi_y^\alpha(t) = X_\alpha\bigl(\Phi_y^\alpha(t)\bigr)$.

Функцію $f \in C_b(M)$ назвемо диференційовною вздовж векторного поля X, якщо для кожного $x \in M$ функція $f \circ \Phi_x$ є диференційовною на $\mathbb{R}$ (або в нулі, що те ж саме). Будемо позначати $\partial_X f(x) = (f \circ \Phi_x)'(0)$.

Лема 1. *Нехай M — банахів многовид з рівномірною структурою, X — обмежене векторне поле класу C^1 на M з потоком Φ. Тоді існує таке подрібнення $\{V_\alpha\}$ покриття $\{U_\alpha\}$, що $\overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$ для кожного α. Крім того, існують такі сталі a, $b > 0$, що при кожному α потік Φ^α є визначеним на $(-b,b) \times B_a^E\bigl(\varphi_\alpha(V_\alpha)\bigr)$ і набуває значень в $\varphi(U_\alpha)$.*

Доведення. Нехай r — стала з означення 2 для рівномірного атласу Ω. Для кожної карти $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \Omega$ розглянемо множини

$$\widetilde{U}_\alpha = \Big\{ x \in U_\alpha \;\Big|\; \overline{B}^E_{\frac{r}{2}}\big(\varphi_\alpha(x)\big) \subset \varphi_\alpha(U_\alpha) \Big\},$$

$V_\alpha = \widetilde{U}^0_\alpha$ — внутрішність $\widetilde{U}_\alpha$. Тоді $\{V_\alpha\}$ є відкритим покриттям M. Дійсно, для кожної точки $x \in M$ існує така карта $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \Omega$, що

$$\overline{B}^E_{\frac{r}{2}}\big(\varphi_\alpha(x)\big) \subset B^E_r\big(\varphi_\alpha(x)\big) \subset \varphi_\alpha(U_\alpha),$$

тому $x \in \widetilde{U}_\alpha$. Крім того, множина $\varphi_\alpha^{-1}\Big(B^E_{\frac{r}{2}}\big(\varphi_\alpha(x)\big)\Big)$ є відкритою підмножиною U_α в M і містить точку x, тому існує таке $\varepsilon > 0$, що $B^M_\varepsilon(x) \subset \varphi_\alpha^{-1}\Big(B^E_{\frac{r}{2}}\big(\varphi_\alpha(x)\big)\Big)$. Тоді для кожного $y \in B^M_\varepsilon(x)$ виконується включення

$$\varphi_\alpha(y) \in B^E_{\frac{r}{2}}\big(\varphi_\alpha(x)\big) \quad \text{і} \quad \overline{B}^E_{\frac{r}{2}}\big(\varphi_\alpha(y)\big) \subset B^E_r\big(\varphi_\alpha(x)\big) \subset \varphi_\alpha(U_\alpha),$$

звідки випливає, що $B^M_\varepsilon(x) \subset \widetilde{U}_\alpha$. Отже, x — внутрішня точка $\widetilde{U}_\alpha$, а тому міститься в V_α.

Доведемо тепер для кожної карти $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \Omega$ включення $\overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$. Легко побачити, що замикання множини

$$\varphi_\alpha(\widetilde{U}_\alpha) = \big\{ y \in \varphi_\alpha(U_\alpha) \;\big|\; \overline{B}^E_{\frac{r}{2}}(y) \subset \varphi_\alpha(U_\alpha) \big\}$$

належить $\varphi_\alpha(U_\alpha)$. Тоді $\varphi_\alpha^{-1}\big(\overline{\varphi_\alpha(\widetilde{U}_\alpha)}\big)$ — замкнена підмножина U_α, що містить V_α. Тому $\overline{V}_\alpha \subset \subset \varphi_\alpha^{-1}\big(\overline{\varphi_\alpha(\widetilde{U}_\alpha)}\big) \subset U_\alpha$.

Нехай $a = \min\left\{\dfrac{r}{6}, \dfrac{1}{2}\right\}$. Зафіксуємо $x_0 \in \varphi_\alpha(V_\alpha)$ і розглянемо множину $U = B^E_{\frac{r}{2}}(x_0) \subset \subset \varphi_\alpha(U_\alpha)$. За теоремою про середнє [9, с. 22] векторне поле X_α задовольняє на U умову Ліпшиця зі сталою L (з означення 3). Тоді за результатами [9, с. 82] при довільному додатному $b < a/\big(\max\{L,1\}\big)^2$ потік Φ^α векторного поля X_α є визначеним на $(-b,b) \times B^E_a(x_0)$ і набуває значень в $B^E_{\frac{r}{2}}(x_0)$. Зафіксуємо довільне таке b (незалежно від карти). Тоді при кожному α потік Φ^α визначено на $(-b,b) \times B^E_a(x_0)$ для кожного $x_0 \in \varphi_\alpha(V_\alpha)$, тобто він є визначеним на $(-b,b) \times B^E_a\big(\varphi_\alpha(V_\alpha)\big)$ і набуває значень в $B^E_{\frac{r}{2}}\big(\varphi_\alpha(V_\alpha)\big) \subset \varphi(U_\alpha)$.

Лему 1 доведено.

Лема 2. *Для кожного $t \in \mathbb{R}$ похідна функції Φ_t є обмеженою за нормою рівномірно в усіх картах з атласу Ω на M. Тобто для кожного $t \in \mathbb{R}$ існує така стала $A(t) > 0$, що для будь-якої точки $x \in M$ нерівність*

$$\Big\| \big(\varphi \circ \Phi_t \circ \psi^{-1}\big)'\big(\psi(x)\big) \Big\| \le A(t)$$

виконується для кожної пари карт (U, φ), $(V, \psi) \in \Omega$, де $x \in V$, $\Phi_t(x) \in U$.

Доведення. *Крок* 1. Виберемо сталі a і b, існування яких гарантовано лемою 1, і зафіксуємо деяке α. Тоді для кожної пари точок $x,\ y \in B^E_a\big(\varphi_\alpha(V_\alpha)\big)$ можемо використати пропозицію [9, с. 83] для функцій $f_1(t) = \Phi^\alpha(t,x)$ та $f_2(t) = \Phi^\alpha(t,y)$ на $(-b,b)$ при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$. Таким чином, для кожної карти і кожного $t \in (-b,b)$ для всіх $x,\ y \in B^E_a\big(\varphi_\alpha(V_\alpha)\big)$ отримуємо нерівність

$$\left\|\Phi^\alpha(t,x)-\Phi^\alpha(t,y)\right\|\leq\|x-y\|\,e^{L|t|}.$$

Крок 2. Розглянемо деяке $|t|<b$ і зафіксуємо точку $x\in M$. Тоді існує така карта $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$, що $x\in V_\alpha$, а $\Phi_t(x)\in U_\alpha$. При $h\in B_a^E(0)$ маємо $\varphi_\alpha(x)+h\in B_a^E\big(\varphi_\alpha(V_\alpha)\big)$, а тому за доведеним на кроці 1 $\left\|\Phi_t^\alpha\big(\varphi_\alpha(x)+h\big)-\Phi_t^\alpha\big(\varphi_\alpha(x)\big)\right\|\leq\|h\|\,e^{L|t|}$.

Враховуючи існування похідної функції $\varphi_\alpha\circ\Phi_t\circ\varphi_\alpha^{-1}=\Phi_t^\alpha$ в точці $\varphi_\alpha(x)$, одержуємо

$$\Phi_t^\alpha\big(\varphi_\alpha(x)+h\big)-\Phi_t^\alpha\big(\varphi_\alpha(x)\big)=(\Phi_t^\alpha)'\,\big(\varphi_\alpha(x)\big)h+\delta\big(\varphi_\alpha(x),h\big),$$

де $\delta\big(\varphi_\alpha(x),h\big)=o\big(\|h\|\big)$.

Виберемо таку послідовність $\varepsilon_n<a$, що для кожного n з нерівності $\|h\|\leq\varepsilon_n$ випливає нерівність $\left\|\delta\big(\varphi(x),h\big)\right\|\leq\dfrac{1}{n}\,\|h\|$. При цьому для кожного $n\in\mathbb{N}$ отримуємо нерівність

$$\left\|(\Phi_t^\alpha)'\,\big(\varphi_\alpha(x)\big)\right\|=\sup_{\|h\|\leq\varepsilon_n}\frac{\left\|(\Phi_t^\alpha)'\,\big(\varphi_\alpha(x)\big)\,h\right\|}{\|h\|}\leq\sup_{\|h\|\leq\varepsilon_n}\frac{\|h\|\,e^{L|t|}+\left\|\delta\big(\varphi(x),h\big)\right\|}{\|h\|}\leq e^{L|t|}+\frac{1}{n}.$$

Звідси випливає, що при $|t|<b$ для кожного $x\in M$ для карти $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$, де $x\in V_\alpha$, виконується нерівність $\left\|\big(\varphi_\alpha\circ\Phi_t\circ\varphi_\alpha^{-1}\big)'\big(\varphi_\alpha(x)\big)\right\|\leq e^{L|t|}$.

Крок 3. Виберемо довільне $t\in\mathbb{R}$ і зафіксуємо точку $x\in M$. Запишемо t у вигляді суми $m\widehat{b}+\delta$, де $m\in\mathbb{N}$, $|\widehat{b}|<b$, $|\delta|<b$ і числа $\widehat{b}$ та δ одного знаку з t. Розглянемо такий набір карт (U_0,φ_0), $(U_1,\varphi_1),\ldots,(U_m,\varphi_m)$, що $x\in V_0$, $\Phi_\delta(x)\in V_1$, $\Phi_{\delta+\widehat{b}}(x)\in V_2$, … …, $\Phi_{\delta+(m-1)\widehat{b}}(x)\in V_m$. Тоді, оскільки $\widehat{b},\delta<b$, маємо також включення $\Phi_\delta(x)\in U_0$, $\Phi_{\delta+\widehat{b}}(x)\in U_1$, $\Phi_{\delta+2\widehat{b}}(x)\in U_2$, …, $\Phi_{\delta+m\widehat{b}}(x)\in U_m$. Тому значення функції $\varphi_m\circ\Phi_t\circ\varphi_0^{-1}$ у точці $\varphi_0(x)$ можна записати так:

$$\big(\varphi_m\circ\Phi_t\circ\varphi_0^{-1}\big)\big(\varphi_0(x)\big)=\big((\varphi_m\circ\Phi_{\widehat{b}}\circ\varphi_m^{-1})\circ(\varphi_m\circ\varphi_{m-1}^{-1})\circ(\varphi_{m-1}\circ\Phi_{\widehat{b}}\circ\varphi_{m-1}^{-1})\circ$$
$$\circ(\varphi_{m-1}\circ\varphi_{m-2}^{-1})\circ\ldots\circ(\varphi_1\circ\Phi_{\widehat{b}}\circ\varphi_1^{-1})\circ(\varphi_1\circ\varphi_0^{-1})\circ(\varphi_0\circ\Phi_\delta\circ\varphi_0^{-1})\big)\big(\varphi_0(x)\big).$$

Звідси, використовуючи обмеженість атласу Ω і результати кроку 2, отримуємо нерівність

$$\left\|\big(\varphi_m\circ\Phi_t\circ\varphi_0^{-1}\big)'\big(\varphi_0(x)\big)\right\|\leq e^{L|\widehat{b}|}\,K\,e^{L|\widehat{b}|}\,K\,\ldots\,e^{L|\widehat{b}|}\,K\,e^{L|\delta|}=e^{L|t|}K^m.$$

Виберемо тепер довільну пару карт $(U,\varphi),(V,\psi)\in\Omega$, де $x\in V$, $\Phi_t(x)\in U$, і знову використавши обмеженість атласу, отримаємо нерівність $\left\|\big(\varphi\circ\Phi_t\circ\psi^{-1}\big)'\big(\psi(x)\big)\right\|\leq e^{L|t|}K^{m+2}$. Це завершує доведення леми 2, оскільки права частина залежить лише від t.

4. Диференційовність мір уздовж обмежених векторних полів. Нехай на M задано міру μ. Для кожного $t\in\mathbb{R}$ розглянемо зсув міри μ уздовж векторного поля X — нову міру μ_t на $\mathcal{A}$, яка є образом міри μ при відображенні Φ_{-t}: $\mu_t(A)=\mu\big(\Phi_t(A)\big)\ \ \forall A\in\mathcal{A}$. Коректність забезпечується тим, що відображення $\Phi_t\colon M\to M$ є борелівськими.

Означення 4. *Міра μ називається диференційовною за Фоміним (у сильному сенсі) вздовж векторного поля X, якщо для кожної множини $A\in\mathcal{A}$ функція $t\mapsto\mu_t(A)$ є диференційовною на $\mathbb{R}$.*

Сильна диференційовність міри μ еквівалентна тому, що для кожної множини $A \in \mathcal{A}$ існує скінченна границя $\lim_{t\to 0} \dfrac{\mu_t(A) - \mu(A)}{t}$, яку будемо позначати через $d_X\mu(A)$. Функція множини $d_X\mu$ виявляється мірою на $\mathcal{A}$ (див. [2, с. 94]), і її називають сильною похідною (похідною Фоміна) міри μ вздовж векторного поля X. При цьому $d_X\mu(M) = 0$.

Означення 5. *Міра μ називається диференційовною за Скороходом* (*у слабкому сенсі*) *вздовж векторного поля X, якщо для кожної функції $f \in C_b(M)$ функція*

$$F_f(t) = \int\limits_M f\big(\Phi_{-t}(x)\big)\,\mu(dx) = \int\limits_M f\,d\mu_t$$

є диференційовною на $\mathbb{R}$.

Слабка диференційовність міри μ еквівалентна тому, що для кожної функції $f \in C_b(M)$ існує $\lim_{t\to 0} \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_M f\,d(\mu_t - \mu)$. При цьому з теореми О. Д. Александрова випливає (див. [2, с. 96]), що якщо міра μ диференційовна за Скороходом уздовж векторного поля X, то існує така міра ν на $\mathcal{A}$, що для всіх функцій $f \in C_b(M)$

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int\limits_M f\,d(\mu_t - \mu) = F_f'(0) = \int\limits_M f\,d\nu. \tag{2}$$

Вказана міра ν називається похідною Скорохода (слабкою похідною) міри μ вздовж векторного поля X і позначається $d_X\mu$. Однозначність визначення $d_X\mu$ випливає з [11, с. 45].

Із сильної диференційовності випливає слабка, причому відповідні похідні збігаються.

Якщо M — банахів простір, то при сталому векторному полі $X(x) = h$ означення 4 та 5 збігаються з відповідними означеннями [2, с. 94, 95] диференційовності за напрямком.

Для випадку зсувів мір уздовж векторних полів має місце такий аналог леми 1 [1] (доведення аналогічне).

Лема 3. *Нехай $\varepsilon > 0$ — довільне число, m — міра на $\mathcal{A}$, m_t, $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, — зсуви m уздовж векторного поля X. Тоді наступні умови є еквівалентними*:

1) *для будь-якого $A \in \mathcal{A}$ існує таке $c(A) > 0$, що $\big|m_t(A) - m(A)\big| \le c(A)\,|t|$ для всіх $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$*;

2) *існує таке число $C > 0$, що для всіх $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ виконується нерівність $\|m_t - m\| \le C\,|t|$*;

3) *для будь-якого $f \in C_b(M)$ існує таке $d(f) > 0$, що $\left|\displaystyle\int_M f\,d(m_t - m)\right| \le d(f)|t|$ для всіх $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$*;

4) *існує таке $D > 0$, що $\left|\displaystyle\int_M f\,d(m_t - m)\right| \le D\,\|f\|\,|t|$ для всіх $f \in C_b(M)$ і всіх $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.*

Наступна теорема об'єднує у собі результати [1] (лема 2) і [12, с. 160] та є їх узагальненням на випадок диференційовності вздовж векторних полів.

Теорема 2. *Наступні умови є еквівалентними*:

1) *міра μ диференційовна за Скороходом уздовж векторного поля X*;

2) *існує така міра ν на $\mathcal{A}$, що для всіх множин $A \in \mathcal{A}$ і всіх $t \in \mathbb{R}$ виконується рівність*

$$\mu_t(A) = \mu(A) + \int\limits_0^t \nu_s(A)\,ds; \tag{3}$$

3) *існує така міра ν на $\mathcal{A}$, що для всіх функцій $f \in C_b(M)$ виконується рівність*

$$\int\limits_M f(x)\,(\mu_t - \mu)(dx) = \int\limits_0^t \int\limits_M f\big(\Phi_{-s}(x)\big)\,\nu(dx)\,ds, \qquad \forall t \in \mathbb{R}; \tag{4}$$

4) *існує така міра ν на $\mathcal{A}$, що рівність* (4) *виконується для будь-якої обмеженої борелівської функції f на M.*

При цьому міра ν, визначена в умовах 2 – 4, *збігається з похідною Скорохода міри μ.*

Доведення. $1 \Longrightarrow 3$. Нехай міра μ диференційовна за Скороходом уздовж X. Тоді існує така міра ν на $\mathcal{A}$, що для будь-якої функції $f \in C_b(M)$ функція $F_f(t)$ з означення 5 є диференційовною на $\mathbb{R}$, і при цьому для всіх $t_0 \in \mathbb{R}$

$$F_f'(t_0) = F_{f\circ\Phi_{-t_0}}{}'(0) = \int\limits_M f \circ \Phi_{-t_0}\,d\nu, \qquad \big|F_f'(t_0)\big| \le \|f\|\,\|\nu\|.$$

Отже, функції $F_f(t)$ задовольняють умову Ліпшиця на $\mathbb{R}$. Тоді за формулою Ньютона – Лейбніца для всіх $f \in C_b(M)$ і всіх $t \in \mathbb{R}$ отримуємо рівність

$$F_f(t) - F_f(0) = \int\limits_0^t F_f'(s)\,ds.$$

$3 \Longrightarrow 1$. Нехай існує така міра ν на $\mathcal{A}$, що для всіх $f \in C_b(M)$ виконується умова (4). Тобто для кожної функції $f \in C_b(M)$ і кожного числа $t \in \mathbb{R}$

$$F_f(t) - F_f(0) = \int\limits_0^t g_f(s)\,ds, \quad \text{де} \quad g_f(s) = \int\limits_M f \circ \Phi_{-s}\,d\nu,\ F_f(t) = \int\limits_M f\,d\mu_t.$$

Для кожного $f \in C_b(M)$ функція g_f є неперервною на $\mathbb{R}$, тому F_f диференційовна на $\mathbb{R}$, і при цьому $F_f'(t_0) = g_f(t_0)$ $\forall t_0 \in \mathbb{R}$. Отже, $F_f'(0) = g_f(0) = \int_M f\,d\nu$, тобто міра μ слабко диференційовна вздовж векторного поля X, а її похідна Скорохода збігається з мірою ν.

$2 \Longleftrightarrow 4$. Для кожного $A \in \mathcal{A}$ розглянемо індикаторну функцію $f = I_A$. Враховуючи, що

$$\int\limits_M I_A\,d(\mu_t - \mu) = \mu_t(A) - \mu(A), \qquad \int\limits_0^t \int\limits_M I_A\big(\Phi_{-s}(x)\big)\,\nu(dx)\,ds = \int\limits_0^t \nu_s(A)\,ds,$$

переконуємося, що умова 2 еквівалентна виконанню рівності (4) для індикаторних функцій $f = I_A$, $A \in \mathcal{A}$. Залишилося використати теорему Лебега про мажоровану збіжність і лему 2.1.8 [13, том 1], щоб показати, що якщо рівність (4) виконується для всіх індикаторних функцій, то вона виконується і для всіх борелівських обмежених функцій.

$4 \Longrightarrow 3$. Очевидно.

$3 \Longrightarrow 2$. Нехай для деякої міри ν для всіх $f \in C_b(M)$ і всіх $t \in \mathbb{R}$ виконується рівність (4). Зафіксуємо $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ (для $t = 0$ очевидно) і встановимо рівність (3) для всіх $A \in \mathcal{A}$. Для цього розглянемо простір $[0,t]$ (або $[t,0]$ при $t < 0$) з σ-алгеброю $\mathcal{B}\big([0,t]\big)$ та мірою Лебега λ і простір

M з σ-алгеброю $\mathcal{A} = \mathcal{B}(M)$ та мірою ν на $\mathcal{A}$. Тоді на $\mathcal{B}\big([0,t]\big) \otimes \mathcal{B}(M)$ визначено міру $\lambda \otimes \nu$. За теоремою 6.4.2(i) [13, том 2] $\mathcal{B}\big([0,t]\big) \otimes \mathcal{B}(M) = \mathcal{B}\big([0,t] \times M\big)$. Крім того, за пропозицією 3.3.2 [13, том 1] для всіх $s \in [0,t]$ та $B \in \mathcal{B}\big([0,t] \times M\big)$ множина $B_s = \big\{x \in M \bigm| (s,x) \in B\big\}$ належить $\mathcal{A}$, а функція $s \mapsto \nu(B_s)$ є борелівською, і при цьому за теоремою 3.4.1 [13, том 1] для кожної множини $B \in \mathcal{B}\big([0,t] \times M\big)$

$$(\lambda \otimes \nu)(B) = \int\limits_0^t \nu(B_s)\, ds.$$

Розглянемо відображення $\varphi\colon [0,t] \times M \to M,\ \varphi(s,x) = \Phi(-s,x)$. Тоді

$$\varphi^{-1}(A) = \big\{(s,x) \in [0,t] \times M \bigm| x \in \Phi_s(A)\big\}$$

для кожної множини $A \in \mathcal{A}$, отже, $\big(\varphi^{-1}(A)\big)_s = \Phi_s(A)$ при всіх $A \in \mathcal{A}$ і всіх $s \in [0,t]$. Відображення φ є борелівським, тому воно індукує міру m_t на $\mathcal{A}$:

$$\forall A \in \mathcal{A}: \qquad m_t(A) = (\lambda \otimes \nu)\big(\varphi^{-1}(A)\big) = \int\limits_0^t \nu\Big(\big(\varphi^{-1}(A)\big)_s\Big)\, ds = \int\limits_0^t \nu_s(A)\, ds.$$

Для кожної функції $f \in C_b(M)$ функція $f \circ \varphi$ є інтегровною за мірою $\lambda \otimes \nu$ і при цьому

$$\int\limits_M f\, dm_t = \int\limits_{[0,t]\times M} f \circ \varphi\, d(\lambda \otimes \nu). \tag{5}$$

З іншого боку, за теоремою Фубіні [13, том 1] (теорема 3.4.4) маємо

$$\int\limits_{[0,t]\times M} f \circ \varphi\, d(\lambda \otimes \nu) = \int\limits_0^t \int\limits_M f\big(\varphi(s,x)\big)\, \nu(dx)\, ds = \int\limits_0^t \int\limits_M f\big(\Phi_{-s}(x)\big)\, \nu(dx)\, ds.$$

Враховуючи рівність (4), отримуємо

$$\int\limits_{[0,t]\times M} f \circ \varphi\, d(\lambda \otimes \nu) = \int\limits_M f(x)\, (\mu_t - \mu)(dx). \tag{6}$$

З рівностей (5) і (6) для всіх $f \in C_b(M)$ маємо

$$\int\limits_M f\, dm_t = \int\limits_M f\, d(\mu_t - \mu).$$

Звідси за результатами [11, с. 45] міри m_t та $\mu_t - \mu$ збігаються між собою, що і дає рівність (3) для всіх множин $A \in \mathcal{A}$. Оскільки t вибирали довільно, теорему доведено.

***Зауваження* 1.** Подібний критерій має місце і для диференційовності за Фоміним (див. [2, с. 102], доведення для випадку диференційовності вздовж векторного поля аналогічне). Таким чином, сильна диференційовність міри μ еквівалентна її слабкій диференційовності при абсолютно неперервній відносно μ похідній Скорохода $d_X\mu$.

***Наслідок* 1.** *Нехай міра μ є радонівською, $\mathcal{F} \subset C_b(M)$ — деякий клас функцій, що розділяє точки M (тобто для будь-яких різних точок $x,\ y \in M$ існує така функція $f \in \mathcal{F}$, що $f(x) \neq f(y)$). Тоді наступні умови є еквівалентними*:

1) *міра μ диференційовна за Скороходом уздовж X і має радонівську похідну Скорохода*;

2) *існує радонівська міра ν, для якої рівність* (4) *виконується для всіх функцій $f \in \mathcal{F}$*;

3) *існує така радонівська міра ν на M, що для будь-якої функції $f \in \mathcal{F}$ функція $F_f(t) = \int_M f\,d\mu_t$ є диференційовною на $\mathbb{R}$ і при цьому $F_f'(t) = \int_M f\,d\nu_t$.*

Міра ν з пунктів 2, 3 *є похідною Скорохода від μ.*

Доведення. Імплікація $1 \Longrightarrow 3$ безпосередньо випливає з означення слабкої диференційовності.

$3 \Longrightarrow 2$. Повністю повторює доведення імплікації $1 \Longrightarrow 3$ теореми 2.

$2 \Longrightarrow 1$. Повторюючи міркування частини $3 \Longrightarrow 2$ теореми 2, отримуємо, що при кожному фіксованому $t \in \mathbb{R}$ для всіх $f \in \mathcal{F}$ виконується рівність $\int_M f\,dm_t = \int_M f\,d(\mu_t - \mu)$, де міру m_t визначено в теоремі 2. Міра λ є радонівською за результатами [2, с. 26], тому радонівськими є також міри $\lambda \otimes \nu$ — за теоремою 7.6.2 [13, том 2], m_t і μ_t — за теоремою 9.1.1 [13, том 2], а також міра $\mu_t - \mu$. Тоді за лемою 1.2.10 [2] отримуємо $m_t = \mu_t - \mu$, що завершує доведення.

***Зауваження* 2.** При доведенні останніх двох результатів було використано теореми 3.4.1, 3.4.4 та 7.6.2 з [13], сформульовані для невід'ємних мір. Справедливість цих теорем в розглядуваному випадку випливає з розкладу Хана – Жордана для знакозмінної міри та означення добутку знакозмінної і невід'ємної мір: $\lambda \otimes \nu = \lambda \otimes \nu^+ - \lambda \otimes \nu^-$. Зауваження про справедливість теореми Фубіні у випадку знакозмінних мір є у [14, с. 186].

***Наслідок* 2.** *Нехай простір $C_b^1(M)$ розділяє точки многовиду M, а μ та ν — радонівські міри на M. Міра μ є слабко диференційовною вздовж обмеженого векторного поля X і $d_X\mu = \nu$ тоді і тільки тоді, коли для кожного $f \in C_b^1(M)$ має місце рівність*

$$\int_M f\,d\nu = -\int_M \partial_X f\,d\mu. \tag{7}$$

Доведення. Для кожної функції $f \in C_b^1(M)$ і кожного $s \in \mathbb{R}$ функція $f \circ \Phi_s$ належить класу $C_b^1(M)$ (за лемою 2), і при цьому $\partial_X(f \circ \Phi_s) = \partial_X f \circ \Phi_s$. Якщо $f \in C_b^1(M)$, то для кожного $t \in \mathbb{R}$ і кожного $x \in M$ виконується нерівність

$$\left|\frac{f \circ \Phi_t - f}{t}(x)\right| = \Big[\xi \in [0,t]\Big] = (f \circ \Phi_x)'(\xi) \leq \max_{(\varphi,U)\in\Omega,\ y\in\varphi(U)} \left\|\left(f \circ \varphi^{-1}\right)'(y)\right\| C.$$

Тому за теоремою Лебега для кожної функції $f \in C_b^1(M)$ при кожному $s \in \mathbb{R}$ має місце збіжність

$$\frac{1}{t}\int_M f\,d(\mu_{s+t} - \mu_s) = \int_M \frac{f \circ \Phi_{-t} - f}{t}\,d\mu_s \xrightarrow[t\to 0]{} -\int_M \partial_X f\,d\mu_s. \tag{8}$$

$\Longrightarrow$. Необхідна рівність випливає безпосередньо з рівності (2) і умови (8) при $s = 0$.

$\Longleftarrow$. Для кожної функції $f \in C_b^1(M)$ і кожного $s \in \mathbb{R}$, використовуючи умову (8) і рівність (7) для функції $f \circ \Phi_{-s}$, отримуємо збіжність

$$\frac{1}{t}\int\limits_M f\,d(\mu_{s+t}-\mu_s)\xrightarrow[t\to 0]{} -\int\limits_M \partial_X f\,d\mu_s = -\int\limits_M \partial_X(f\circ\Phi_{-s})\,d\mu = \int\limits_M f\circ\Phi_{-s}\,d\nu = \int\limits_M f\,d\nu_s.$$

Клас $C_b^1(M)$ розділяє точки M. Тому за наслідком 1 міра μ є диференційовною за Скороходом уздовж X, а ν — відповідна похідна Скорохода.

Наслідок 2 доведено.

***Зауваження* 3.** Клас $C_b^1(M)$ розділяє точки, зокрема, для випадку банахового простору, а також гільбертового многовиду.

Врахувавши зауваження 1, отримаємо такий критерій і для сильної диференційовності.

***Наслідок* 3.** *Нехай простір $C_b^1(M)$ розділяє точки многовиду M. Радонівська міра μ є сильно диференційовною вздовж обмеженого векторного поля X тоді і тільки тоді, коли існує така функція $h\in\mathcal{L}^1(\mu)$, що для кожного $f\in C_b^1(M)$ має місце рівність*

$$\int\limits_M fh\,d\mu = -\int\limits_M \partial_X f\,d\mu.$$

Сильною похідною при цьому буде радонівська міра $\nu = h\,\mu$.

5. Критерій диференційовності за Скороходом. ***Доведення теореми* 1.** $\Longrightarrow$. Нехай міра μ диференційовна за Скороходом уздовж X. Тоді за теоремою 2 при $\nu = d_X\mu$ для всіх $A\in\mathcal{A}$ і всіх $t\in\mathbb{R}$ виконується рівність $\mu_t(A)=\mu(A)+\int_0^t \nu_s(A)\,ds$. Звідси для всіх $A\in\mathcal{A}$ і $t\in\mathbb{R}$ отримуємо нерівність $\bigl|\mu_t(A)-\mu(A)\bigr|\le |t|\,\|\nu\|$. Отже, можемо вибрати довільне $\gamma>0$ і для кожного $A\in\mathcal{A}$ взяти $c(A)=\|\nu\|$.

$\Longleftarrow$. Нехай міра μ така, що виконується умова (1). За лемою 3 ця умова рівносильна тому, що існує таке $C>0$, що для всіх $t\in[-\gamma,\gamma]$ виконується нерівність $\|\mu_t-\mu\|\le C\,|t|$.

Випадок 1. Міра μ має компактний носій S. Нехай r — стала з означення 2 для рівномірного атласу Ω, а L — стала з означення 3 для векторного поля X. За лемою 1 будуємо підатлас $\bigl\{(V_\alpha,\varphi_\alpha)\bigr\}$, де

$$V_\alpha = \Bigl\{x\in U_\alpha \mid \overline{B}^E_{\frac{r}{2}}\bigl(\varphi_\alpha(x)\bigr)\subset\varphi_\alpha(U_\alpha)\Bigr\}^0,$$

і при цьому $\overline{V_\alpha}\subset U_\alpha$ для кожного α. Крім того, при $a=\min\left\{\dfrac{r}{6},\dfrac{1}{2}\right\}$, $b<a/\bigl(\max\{L,1\}\bigr)^2$ для кожного α потік Φ^α є визначеним на $(-b,b)\times B^E_a\bigl(\varphi_\alpha(V_\alpha)\bigr)$ і набуває значень в $B^E_{\frac{r}{2}}\bigl(\varphi_\alpha(V_\alpha)\bigr)\subset$ $\subset\varphi(U_\alpha)$. Візьмемо b також меншим за γ і позначимо через I_b проміжок $(-b,b)\subset\mathbb{R}$, $\overline{I_b}=[-b,b]$.

Для кожної карти $(U_\alpha,\varphi_\alpha)\in\Omega$ введемо такі позначення: $W_\alpha = B^E_{\frac{a}{2}}\bigl(\varphi_\alpha(V_\alpha)\bigr)$, $T_\alpha = B^E_a\bigl(\varphi_\alpha(V_\alpha)\bigr)$. При цьому $\overline{W}_\alpha\subset B^E_a\bigl(\varphi_\alpha(V_\alpha)\bigr)=T_\alpha\subset\varphi_\alpha(U_\alpha)$, і на $I_b\times T_\alpha$ визначено потік Φ^α. Легко показати, що для кожного α має місце також включення $\varphi_\alpha(\overline{V}_\alpha)\subset W_\alpha$.

Міра μ зосереджена на компакті S. Оскільки Φ є неперервним відображенням, множина $K=\Phi\bigl(\overline{I_b}\times S\bigr)$ також компактна, і для кожного $t\in I_b$ міра μ_t зосереджена на $\Phi_{-t}(S)\subset K$.

Компактною є також множина $\widetilde{K}=\Phi(\overline{I_b}\times K)$, тому існує така скінченна підмножина P множини індексів $\{\alpha\}$, що $\widetilde{K}$ покривається множинами $\bigl\{V_j\mid j\in P\bigr\}$. Розглянемо відкрите покриття $\bigl\{V_j\mid j\in P\bigr\}\cup\bigl\{V_\alpha\setminus\widetilde{K}\mid \alpha\notin P\bigr\}$ многовиду M і візьмемо таке розбиття одиниці $\{h_\alpha\}$ класу C^1, що $\operatorname{supp}h_\alpha\subset V_\alpha$ при $\alpha\in P$ і $\operatorname{supp}h_\alpha\subset V_\alpha\setminus\widetilde{K}$ при $\alpha\notin P$. При цьому для всіх $x\in\widetilde{K}$ виконується рівність $1=\sum_{\alpha\in P}h_\alpha(x)$.

При $t \in I_b \setminus \{0\}$ визначимо міри $n_t = \dfrac{\mu_t - \mu}{t}\Big|_K$, що є звуженнями мір $\dfrac{\mu_t - \mu}{t}$ на K. Розглянемо також на $C_b(K)$ неперервні лінійні функціонали L_t, що відповідають мірам n_t, $t \in I_b \setminus \{0\}$: $L_t f = \displaystyle\int_K f\,dn_t$, $f \in C_b(K)$. При цьому $\|L_t\| = \|n_t\| \le C$ для кожного $t \in$ $\in I_b \setminus \{0\}$, тобто $\{L_t \mid t \in I_b \setminus \{0\}\} \subset \overline{B}_C^{(C_b(K))^*}(0)$. Оскільки K — метричний компакт, то $C_b(K)$ — сепарабельний нормований простір. Тому за теоремою Банаха – Алаоглу $\overline{B}_C^{(C_b(K))^*}(0)$ — компакт у $*$-слабкій топології в $(C_b(K))^*$. Отже, існують послідовність точок $t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ з $I_b \setminus \{0\}$ і лінійний функціонал $L \in \overline{B}_C^{(C_b(K))^*}(0)$ такі, що L — гранична точка послідовності $\{L_{t_n} \mid n \ge 1\}$ в $*$-слабкій топології в $(C_b(K))^*$. Тобто для будь-якої функції $f \in C_b(K)$ має місце збіжність $L_{t_n} f \xrightarrow[n\to\infty]{} Lf$.

За теоремою Ріса [13, том 2, с. 134] існує радонівська міра ν на K така, що $L\,f = \displaystyle\int_K f\,d\nu$ для всіх $f \in C_b(K)$, і при цьому $\|\nu\| = \|L\| \le C$. Зберігши позначення, довизначимо міру ν нулем на всю множину M. При цьому, оскільки ν зосереджена на компакті, вона є щільною в M. Крім того, ν є регулярною за пропозицією 1.2.3 [2], а отже, ν — радонівська міра.

Кожна функція f з класу $C_b^{\mathbb{C}}(K)$ однозначно зображується у вигляді суми $f = u + iv$, де u та v належать $C_b(K)$. Тому будь-який функціонал $l \in (C_b(K))^*$ можемо розглядати і для функцій з класу $C_b^{\mathbb{C}}(K)$: $lf = lu + i\,lv$. Тоді $L_{t_n} f \xrightarrow[n\to\infty]{} Lf$ і для функцій $f \in C_b^{\mathbb{C}}(K)$, тобто

$$\int\limits_K f\,d\left(\frac{\mu_{t_n} - \mu}{t_n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int\limits_K f\,d\nu \qquad \forall f \in C_b^{\mathbb{C}}(K). \tag{9}$$

Розглянемо образи міри ν в картах: для кожного $\alpha \in P$ визначаємо міру $\nu^\alpha = \nu\big|_{U_\alpha} \circ \varphi_\alpha^{-1}$ на $\mathcal{B}(\varphi_\alpha(U_\alpha))$, при цьому носій ν^α зосереджено на $\varphi_\alpha(K \cap U_\alpha)$.

Зафіксуємо деяку карту $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \Omega$ при $\alpha \in P$ і розглянемо міри m_t^α, $t \in I_b$, на $\mathcal{B}(T_\alpha)$, що є образами мір $\mu_t\big|_{\varphi_\alpha^{-1}(T_\alpha)}$ при відображенні φ_α: $m_t^\alpha(A) = \mu_t(\varphi_\alpha^{-1}(A))$, $m^\alpha(A) = m_0^\alpha(A)$, $A \in \mathcal{B}(T_\alpha)$. При цьому, оскільки для кожного $t \in I_b$ міра μ_t зосереджена на множині $\Phi_{-t}(S)$, міра m_t^α зосереджена на множині $T_\alpha \cap \varphi_\alpha(U_\alpha \cap \Phi_{-t}(S)) \subset T_\alpha \cap \varphi_\alpha(U_\alpha \cap K)$.

Нехай $\widetilde{f}$ — функція з $C_b^{\mathbb{C}}(\overline{W}_\alpha \cap \varphi_\alpha(K \cap U_\alpha))$, причому $\widetilde{f}$ набуває нульового значення на $(\overline{W}_\alpha \setminus W_\alpha) \cap \varphi_\alpha(K \cap U_\alpha)$. Тоді відповідна функція $f = \widetilde{f} \circ \varphi_\alpha$ на $\varphi_\alpha^{-1}(\overline{W}_\alpha) \cap K$ дорівнює нулю на $\varphi_\alpha^{-1}(\overline{W}_\alpha \setminus W_\alpha) \cap K$, і її можна неперервно довизначити нулем на весь компакт K. Отримана таким чином функція F належить до класу $C_b^{\mathbb{C}}(K)$, тому для неї виконується умова (9). Враховуючи, що F набуває нульового значення за межами множини $\varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha) \cap K$, і повертаючись до карти, отримуємо

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\varphi_\alpha\left(K \cap \varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)\right)} \widetilde{f}\,d\left(\frac{m_{t_n}^\alpha - m^\alpha}{t_n}\right) = \int\limits_{\varphi_\alpha\left(K \cap \varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)\right)} \widetilde{f}\,d\nu^\alpha. \tag{10}$$

Отже, для будь-якої функції $\widetilde{f} \in C_b^{\mathbb{C}}(\overline{W}_\alpha \cap \varphi_\alpha(K \cap U_\alpha))$, що набуває нульового значення на $(\overline{W}_\alpha \setminus W_\alpha) \cap \varphi_\alpha(K \cap U_\alpha)$, справджується рівність (10).

Покажемо, що існує таке $t_\alpha \in I_b$, що $\Phi_t(\widetilde{K} \cap \overline{V}_\alpha) \subset \varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)$ для всіх $t \in (-t_\alpha, t_\alpha)$. Нехай це не так. Тоді існують такі послідовності $\tau_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ і $\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \widetilde{K} \cap \overline{V}_\alpha$, що

$\Phi(\tau_n, y_n) \notin \varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Завдяки компактності $\widetilde{K} \cap \overline{V}_\alpha$ існує підпослідовність $\{y_{n_k}\}$, збіжна до деякого $y^* \in \widetilde{K} \cap \overline{V}_\alpha$. Відображення Φ є неперервним на $\mathbb{R} \times M$, тому $\Phi(\tau_{n_k}, y_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} \Phi(0, y^*) = y^* \in \overline{V}_\alpha$. Але $\varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)$ — відкрита множина, тому, оскільки $\Phi(\tau_{n_k}, y_{n_k}) \notin \varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)$ при всіх k, і границя $y^* \notin \varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)$. Отримали суперечність з включенням $\overline{V}_\alpha \subset \varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)$. Отже, шукане t_α існує. Позначимо через I_α проміжок $(-t_\alpha, t_\alpha)$, тоді $\Phi\big(I_\alpha \times (\widetilde{K} \cap \overline{V}_\alpha)\big) \subset \varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)$.

Нехай l — дійснозначний обмежений лінійний функціонал на E. Для кожного $s \in I_\alpha$ розглянемо функцію $\widetilde{\psi_s} \colon T_\alpha \cap \varphi_\alpha(\widetilde{K} \cap U_\alpha) \to \mathbb{C}$:

$$\widetilde{\psi_s}(x) = \exp\Big(i\, l\big(\Phi_{-s}^\alpha(x)\big)\Big)\, (h_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1})\big(\Phi_{-s}^\alpha(x)\big).$$

Зафіксуємо деяке $s \in I_\alpha$. Оскільки $\operatorname{supp} h_\alpha \subset V_\alpha$, функція $\widetilde{h}_\alpha = h_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1} \colon \varphi_\alpha(U_\alpha) \to \mathbb{R}$ є нульовою за межами $\varphi_\alpha(V_\alpha)$, а функція $\widetilde{\psi_s}$ — за межами $\varphi_\alpha\big(\Phi_s(V_\alpha)\big)$. Розглянемо звуження функції $\widetilde{\psi_s}$ на множину $\overline{W}_\alpha \cap \varphi_\alpha(K \cap U_\alpha)$. При цьому, оскільки $s \in I_\alpha$, маємо

$$K \cap \Phi_s(V_\alpha) = \Phi_s\big(\Phi_{-s}(K) \cap V_\alpha\big) \subset \varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha).$$

Тому якщо $x \in (\overline{W}_\alpha \setminus W_\alpha) \cap \varphi_\alpha(K \cap U_\alpha)$, то $x \notin \varphi_\alpha\big(K \cap \Phi_s(V_\alpha)\big)$. Але $x \in \varphi_\alpha(K \cap U_\alpha)$, а отже, $x \notin \varphi_\alpha\big(\Phi_s(V_\alpha)\big)$ і $\widetilde{\psi_s}(x) = 0$. Тоді для функції $\widetilde{\psi_s}$ справджується рівність (10). Оскільки $s + t_n \in I_\alpha$ при n, більших за деяке N, маємо

$$\Phi_s(\widetilde{K} \cap \overline{V}_\alpha) \subset \varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha), \qquad \Phi_{s+t_n}(\widetilde{K} \cap \overline{V}_\alpha) \subset \varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha) \quad \forall n > N. \tag{11}$$

Запишемо функціонали з лівої частини рівності (10) для функції $\widetilde{\psi_s}$:

$$\int\limits_{\varphi_\alpha\left(K \cap \varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)\right)} \widetilde{\psi_s}\, d\left(\frac{m_{t_n}^\alpha - m^\alpha}{t_n}\right) =$$

$$= \frac{1}{t_n}\left[\;\int\limits_{\Phi_{t_n}\left(K \cap \varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)\right)} \widetilde{\psi_s} \circ \varphi_\alpha \circ \Phi_{-t_n}\, d\mu - \int\limits_{K \cap \varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)} \widetilde{\psi_s} \circ \varphi_\alpha\, d\mu\right]. \tag{12}$$

Міра μ зосереджена на S, тому в другому інтегралі можемо звузити множину інтегрування до $S \cap \varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)$. Перетворимо тепер і перший інтеграл при $n > N$. Оскільки $\operatorname{supp} \psi_s \subset \subset \varphi_\alpha\big(\Phi_s(V_\alpha)\big)$, то $\operatorname{supp}(\widetilde{\psi_s} \circ \varphi_\alpha \circ \Phi_{-t_n}) \subset \Phi_{s+t_n}(V_\alpha)$, і множину інтегрування можна замінити її перетином з $\Phi_{s+t_n}(V_\alpha)$, що рівний $\Phi_{s+t_n}\big(V_\alpha \cap \Phi_{-s}(K)\big)$ (оскільки $\Phi_s\big(V_\alpha \cap \Phi_{-s}(K)\big) \subset \subset \varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)$ за умовою (11)). Зазначимо, що $\widetilde{\psi_s} \circ \varphi_\alpha \circ \Phi_{-t_n} = \widetilde{\psi_{s+t_n}} \circ \varphi_\alpha$ на множині, де обидві частини мають сенс. Оскільки $\Phi_{s+t_n}\big(V_\alpha \cap \Phi_{-s}(K)\big) \subset \varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)$ при $n > N$, вказана рівність справджується і на множині $\Phi_{s+t_n}\big(V_\alpha \cap \Phi_{-s}(K)\big)$. Отже, перший інтеграл можна брати з підінтегральною функцією $\widetilde{\psi_{s+t_n}} \circ \varphi_\alpha$. Врахуємо тепер, що міра μ зосереджена на S, і звузимо множину $\Phi_{t_n}(K)$ до S. Нарешті, оскільки $\operatorname{supp} \widetilde{\psi_{s+t_n}} \circ \varphi_\alpha \subset \Phi_{s+t_n}(V_\alpha)$, знову використовуючи включення (11), розширюємо $\Phi_{s+t_n}(V_\alpha) \cap S$ до множини $\varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha) \cap S$, на якій підінтегральна функція також має сенс. Отже, рівність (12) при $n > N$ продовжується:

$$\int\limits_{\varphi_\alpha\left(K\cap\varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)\right)} \widetilde{\psi_s}\, d\left(\frac{m_{t_n}^\alpha - m^\alpha}{t_n}\right) = \frac{1}{t_n}\int\limits_{S\cap\varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)} (\widetilde{\psi_{s+t_n}} - \widetilde{\psi_s})\circ\varphi_\alpha\, d\mu =$$

$$= \int\limits_{\varphi_\alpha\left(S\cap\varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)\right)} \frac{\widetilde{\psi_{s+t_n} - \widetilde{\psi_s}}}{t_n}\, dm^\alpha. \qquad (13)$$

Функції $\widetilde{\psi_u}(x)$ при кожному фіксованому $x \in T_\alpha \cap \varphi_\alpha(\widetilde{K}\cap U_\alpha)$ є диференційовними по u на I_α, і при цьому для кожного $p \in I_\alpha$

$$\frac{\partial}{\partial u}\Big|_{u=p}\widetilde{\psi_u}(x) = -\exp\Big(il\big(\Phi_{-p}^\alpha(x)\big)\Big)\Big[i\widetilde{h_\alpha}\big(\Phi_{-p}^\alpha(x)\big)l\Big(X_\alpha\big(\Phi_{-p}^\alpha(x)\big)\Big) + \widetilde{h_\alpha}'\big(\Phi_{-p}^\alpha(x)\big)X_\alpha\big(\Phi_{-p}^\alpha(x)\big)\Big].$$

Тоді

$$\left(\frac{\widetilde{\psi_{s+t_n} - \widetilde{\psi_s}}}{t_n}\right)(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\partial}{\partial u}\Big|_{u=s}\widetilde{\psi_u}(x)$$

для кожного $x \in \varphi_\alpha\big(S\cap\varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)\big)$, і, крім того, при всіх $n > N$ виконується нерівність

$$\left|\left(\frac{\widetilde{\psi_{s+t_n} - \widetilde{\psi_s}}}{t_n}\right)(x)\right| \le \sup_{\xi\in I_\alpha}\left|\frac{\partial}{\partial u}\Big|_{u=\xi}\widetilde{\psi_u}(x)\right| \le \|l\|\, L + \max_{z\in A}\big\|\widetilde{h_\alpha}'(z)\big\|\, L,$$

де $A = \Phi^\alpha\Big(\overline{I_\alpha}\times\varphi_\alpha\big(S\cap\varphi_\alpha^{-1}(\overline{W}_\alpha)\big)\Big)$ — компакт, а тому вказаний максимум існує. Отже, за теоремою Лебега з рівності (13) маємо

$$\int\limits_{\varphi_\alpha\left(K\cap\varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)\right)} \widetilde{\psi_s}\, d\left(\frac{m_{t_n}^\alpha - m^\alpha}{t_n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int\limits_{\varphi_\alpha\left(S\cap\varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)\right)} \frac{\partial}{\partial u}\Big|_{u=s}\widetilde{\psi_u}(x)\, m^\alpha(dx).$$

З іншого боку, для функції ψ_s виконується умова (10), тому отримуємо рівність

$$\int\limits_{\varphi_\alpha\left(S\cap\varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)\right)} \frac{\partial}{\partial u}\Big|_{u=s}\widetilde{\psi_u}(x)\, m^\alpha(dx) = \int\limits_{\varphi_\alpha\left(K\cap\varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)\right)} \widetilde{\psi_s}\, d\nu^\alpha. \qquad (14)$$

Оскільки ми брали довільне $s \in I_\alpha$, рівність (14) виконується для всіх $s \in I_\alpha$. Для кожного $x \in \varphi_\alpha\big(K\cap\varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)\big)$ функція $\psi_s(x)$ є неперервною по s на I_α і, крім того, скрізь на області визначення $\big|\psi_s(x)\big| \le 1$. Тоді за теоремою Лебега права частина рівності (14) є неперервною на I_α, а тому інтегровною відносно міри Лебега λ.

Функція $\dfrac{\partial}{\partial u}\Big|_{u=s}\widetilde{\psi_u}(x)$ є неперервною за сукупністю аргументів на $I_\alpha\times\varphi_\alpha\big(S\cap\varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)\big)$. Дійсно, $\exp\Big(i\,l\big(\Phi_{-s}^\alpha(x)\big)\Big)$, $\widetilde{h_\alpha}\big(\Phi_{-s}^\alpha(x)\big)$, $l\Big(X_\alpha\big(\Phi_{-s}^\alpha(x)\big)\Big)$ є неперервними числовими функціями. А неперервність функції $\widetilde{h_\alpha}'\big(\Phi_{-s}^\alpha(x)\big)X_\alpha\big(\Phi_{-s}^\alpha(x)\big)$ випливає з того, що, по-перше, $X_\alpha\big(\Phi_{-s}^\alpha(x)\big)$ є неперервною функцією на $I_\alpha\times W_\alpha$, обмеженою за нормою сталою L. А по-друге, функція $\widetilde{h_\alpha}$ належить класу C^1 на $\varphi_\alpha(U_\alpha)$, а тому $\widetilde{h_\alpha}' : \varphi_\alpha(U_\alpha) \to L(E,\mathbb{R})$ неперервна і лінійний оператор

$\widetilde{h_\alpha}'\big(\Phi^\alpha_{-s}(x)\big)$ є неперервно залежним від сукупності аргументів s і x на $I_\alpha \times W_\alpha$. Тоді функція $\dfrac{\partial}{\partial u}\Big|_{u=s} \widetilde{\psi_u}(x)$ є інтегровною відносно міри $\lambda \otimes m^\alpha$ на множині $I_\alpha \times \varphi_\alpha\big(S \cap \varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)\big)$, де λ — міра Лебега на $\mathbb{R}$. Тому за теоремою Фубіні [13, том 1] (теорема 3.4.4) можна коректно зінтегрувати ліву частину виразу (14) на проміжку $[0,t]$ при кожному $t \in I_\alpha$ і при цьому замінити порядок інтегрування. Таким чином, зінтегрувавши обидві частин рівності (14), для кожного $t \in I_\alpha$ отримаємо рівність

$$\int\limits_0^t \int\limits_{\varphi_\alpha\left(K\cap\varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)\right)} \widetilde{\psi_s}\, d\nu^\alpha\, ds = \int\limits_{\varphi_\alpha\left(S\cap\varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)\right)} \widetilde{\psi_u}(x)\Big|_0^t\, m^\alpha(dx) =$$

$$= \int\limits_{\varphi_\alpha\left(S\cap\varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)\right)} \widetilde{\psi_t}\, dm^\alpha \quad \int\limits_{\varphi_\alpha\left(S\cap\varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)\right)} \widetilde{\psi_0}\, dm^\alpha. \tag{15}$$

Враховуючи, що $\operatorname{supp}\widetilde{\psi_0} \subset \varphi_\alpha(V_\alpha)$, а $\operatorname{supp}\widetilde{\psi_t} \subset \varphi_\alpha\big(\Phi_t(V_\alpha)\big)$ при кожному $t \in I_\alpha$, множину інтегрування другого інтеграла звужуємо до множини $\varphi_\alpha\big(S\cap\varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)\big)\cap\varphi_\alpha(V_\alpha) = \varphi_\alpha(S\cap V_\alpha)$, а першого — до множини

$$\varphi_\alpha\big(S \cap \varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)\big) \cap \varphi_\alpha\big(\Phi_t(V_\alpha)\big) = \varphi_\alpha\big(\Phi_t(V_\alpha) \cap S)\big)$$

(оскільки $\Phi_t(V_\alpha) \cap S) \subset \varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)$ за умовою (11)). Тоді перший інтеграл перетворюється так:

$$\int\limits_{\varphi_\alpha\left(S\cap\varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)\right)} \widetilde{\psi_t}\, dm^\alpha = \int\limits_{\varphi_\alpha\left(\Phi_t(V_\alpha)\cap S\right)} \widetilde{\psi_t}\, dm^\alpha = \int\limits_{\Phi_t(V_\alpha)\cap S} \widetilde{\psi_0} \circ \varphi_\alpha \circ \Phi_{-t}\, d\mu =$$

$$= \int\limits_{V_\alpha\cap\Phi_{-t}(S)} \widetilde{\psi_0} \circ \varphi_\alpha\, d\mu_t = \int\limits_{\varphi_\alpha\left(V_\alpha\cap\Phi_{-t}(S)\right)} \widetilde{\psi_0}\, dm_t^\alpha.$$

Врахуємо тепер, що міри μ_t та μ зосереджені відповідно на $\Phi_{-t}(S)$ та S, і розширимо обидві множини інтегрування до $\varphi_\alpha(K \cap V_\alpha)$. Таким чином, рівність (15) продовжується:

$$\int\limits_0^t \int\limits_{\varphi_\alpha\left(K\cap\varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)\right)} \widetilde{\psi_s}\, d\nu^\alpha\, ds =$$

$$= \int\limits_{\varphi_\alpha\left(V_\alpha\cap\Phi_{-t}(S)\right)} \widetilde{\psi_0}\, dm_t^\alpha - \int\limits_{\varphi_\alpha(S\cap V_\alpha)} \widetilde{\psi_0}\, dm^\alpha = \int\limits_{\varphi_\alpha(V_\alpha\cap K)} \widetilde{\psi_0}\, d(m_t^\alpha - m^\alpha). \tag{16}$$

Перетворимо тепер ліву частину рівності (16). Врахуємо спочатку, що при кожному $s \in \in [0,t] \subset I_\alpha$ носій $\widetilde{\psi_s}$ зосереджено на $\varphi_\alpha\big(\Phi_s(V_\alpha)\big)$ і $\varphi_\alpha\big(K \cap \Phi_s(V_\alpha)\big) \subset \varphi_\alpha\big(K \cap \varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)\big)$ за умовою (11). Тому у внутрішніх інтегралах можемо звузити множини інтегрування до $\varphi_\alpha\big(K \cap \Phi_s(V_\alpha)\big)$ і при цьому замінити підінтегральну функцію функцією $\widetilde{\psi_0} \circ \Phi^\alpha_{-s}$. Розглядаємо зсуви міри ν^α вздовж векторного поля X_α на множині $\varphi_\alpha(\widetilde{K}\cap V_\alpha)$, тобто для кожного $s \in I_\alpha$ розглядаємо міру $\nu_s^\alpha = \nu^\alpha\big|_{\Phi_s^\alpha\left(\varphi_\alpha(\widetilde{K}\cap V_\alpha)\right)} \circ \Phi_s^\alpha$ на $\mathcal{B}\big(\varphi_\alpha(\widetilde{K}\cap V_\alpha)\big)$ з носієм на $\varphi_\alpha\big(\Phi_{-s}(K)\cap V_\alpha\big)$. Тоді у внутрішніх інтегралах перейдемо також до мір ν_s^α:

$$\int\limits_0^t \int\limits_{\varphi_\alpha\left(K\cap\varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)\right)} \widetilde{\psi_s}\, d\nu^\alpha\, ds = \int\limits_0^t \int\limits_{\varphi_\alpha\left(K\cap\Phi_s(V_\alpha)\right)} \widetilde{\psi_0}\circ\Phi^\alpha_{-s}\, d\nu^\alpha\, ds =$$

$$= \int\limits_0^t \int\limits_{\varphi_\alpha\left(\Phi_{-s}(K)\cap V_\alpha\right)} \widetilde{\psi_0}\, d\nu^\alpha_s\, ds = \int\limits_0^t \int\limits_{\varphi_\alpha(\widetilde{K}\cap V_\alpha)} \widetilde{\psi_0}\, d\nu^\alpha_s\, ds.$$

Отже, враховуючи умову (16), остаточно отримуємо рівність

$$\int\limits_0^t \int\limits_{\varphi_\alpha(\widetilde{K}\cap V_\alpha)} \widetilde{\psi_0}\, d\nu^\alpha_s\, ds = \int\limits_{\varphi_\alpha(V_\alpha\cap K)} \widetilde{\psi_0}\, d(m^\alpha_t - m^\alpha) \qquad \forall t\in I_\alpha. \tag{17}$$

Зафіксуємо тепер деяке число $t\in I_\alpha$ і розглянемо для нього клас функцій $N = $ $=$ л.о.$\big\{\exp\big(i\,l(x)\big)\ \big|\ l\in M^*\big\}$ над полем $\mathbb{C}$, який є підмножиною класу $C_b^{\mathbb{C}}\big(\varphi_\alpha(\overline{V}_\alpha\cap\widetilde{K})\big)$. Оскільки рівність (17) виконується для функції $\widetilde{\psi_0}(x) = \exp\big(i\,l(x)\big)\,\widetilde{h_\alpha}(x)$ при довільному виборі функціонала $l\in E^*$, для кожної функції f з класу N виконується рівність

$$\int\limits_0^t \int\limits_{\varphi_\alpha(\widetilde{K}\cap V_\alpha)} f\,\widetilde{h_\alpha}\, d\nu^\alpha_s\, ds = \int\limits_{\varphi_\alpha(K\cap V_\alpha)} f\,\widetilde{h_\alpha}\, d(m^\alpha_t - m^\alpha). \tag{18}$$

Клас N є підалгеброю класу $C_b^{\mathbb{C}}\big(\varphi_\alpha(\overline{V}_\alpha\cap\widetilde{K})\big)$ комплекснозначних неперервних функцій на компакті $\varphi_\alpha(\overline{V}_\alpha\cap\widetilde{K})$ в E. При цьому він містить одиничну функцію, а для кожної функції $f\in N$ функція $\overline{f}$ також належить N. Крім того, з теореми Хана – Банаха випливає, що клас N розділяє точки простору $\varphi_\alpha(\overline{V}_\alpha\cap\widetilde{K})$. Тоді за теоремою Стоуна – Вейєрштрасса множина N є щільною в $C_b^{\mathbb{C}}\big(\varphi_\alpha(\overline{V}_\alpha\cap\widetilde{K})\big)$. Тому, використовуючи теорему Лебега про мажоровану збіжність, граничним переходом отримуємо, що для всіх функцій $f\in C_b^{\mathbb{C}}\big(\varphi_\alpha(\overline{V}_\alpha\cap\widetilde{K})\big)$ і всіх $t\in I_\alpha$ виконується рівність (18).

Аналогічні міркування можна провести для всіх карт $(U_\alpha,\varphi_\alpha)\in\Omega$ при $\alpha\in P$. Тобто для кожного $\alpha\in P$ існує таке $t_\alpha\in I_b$, що для всіх функцій $f\in C_b^{\mathbb{C}}\big(\varphi_\alpha(\overline{V}_\alpha\cap\widetilde{K})\big)$ і всіх $t\in I_\alpha$ виконується рівність (18), де $\nu^\alpha_s = \nu^\alpha\big|_{\Phi^\alpha_s\left(\varphi_\alpha(\widetilde{K}\cap V_\alpha)\right)}\circ\Phi^\alpha_s,\ \operatorname{supp}\nu^\alpha_s\subset\varphi_\alpha\big(\Phi_{-s}(K)\cap V_\alpha\big)$.

Розглянемо $\tau = \min\{t_\alpha\mid\alpha\in P\}$. Введемо при $s\in(-\tau,\tau)$ міри $\nu_s = \nu\circ\Phi_s$ на $\mathcal{A}$. Тоді для кожної функції $f\in C_b(M)$ і для кожного $t\in(-\tau,\tau)$ з рівності (18) одержуємо

$$\int\limits_M f\, d(\mu_t-\mu) = \int\limits_K f\, d(\mu_t-\mu) = \sum_{j\in P}\int\limits_{K\cap V_j} h_j f\, d(\mu_t-\mu) =$$

$$= \sum_{j\in P}\int\limits_{\varphi_j(K\cap V_j)} (f\circ\varphi_j^{-1})\,\widetilde{h}_j\, d(m^j_t - m^j) = \sum_{j\in P}\int\limits_0^t \int\limits_{\varphi_j(\widetilde{K}\cap V_j)} (f\circ\varphi_j^{-1})\widetilde{h}_j\, d\nu^j_s\, ds =$$

$$= \sum_{j\in P}\int\limits_0^t \int\limits_{\Phi^j_s\left(\varphi_j(\widetilde{K}\cap V_j)\right)} (f\circ\varphi_j^{-1}\circ\Phi^j_{-s})\,(\widetilde{h}_j\circ\Phi^j_{-s})\, d\nu^j\, ds = \Big[\nu^j = \nu\big|_{U_\alpha}\circ\varphi_j^{-1}\Big] =$$

$$= \sum_{j\in P}\int\limits_0^t \int\limits_{\Phi_s(\widetilde{K}\cap V_j)} (f\circ\Phi_{-s})\,(h_j\circ\Phi_{-s})\,d\nu\,ds = \sum_{j\in P}\int\limits_0^t \int\limits_{\widetilde{K}\cap V_j} f\,h_j\,d\nu_s\,ds =$$

$$= [\operatorname{supp} h_j \subset V_j] = \sum_{j\in P}\int\limits_0^t \int\limits_{\widetilde{K}} f\,h_j\,d\nu_s\,ds = \int\limits_0^t \int\limits_M f\,d\nu_s\,ds = \int\limits_0^t \int\limits_M f\circ\Phi_{-s}\,d\nu\,ds.$$

Отримали рівність (4) для всіх $f\in C_b(M)$ і всіх $t\in(-\tau,\tau)$. Зрозуміло, що вона виконується і для $t, |t|\geq\tau$. Щоб показати це, достатньо записати t у вигляді $t = k\,\dfrac{\tau}{2}+\delta$, де $k\in\mathbb{Z}$, $|\delta|<1$, $\delta<\dfrac{\tau}{2}$ і одного знаку з t, і використати попередній результат для функцій $f\circ\Phi_{-p\frac{\tau}{2}}$, $0\leq p\leq |k|$. Отже, рівність (4) виконується для всіх $f\in C_b(M)$ і всіх $t\in\mathbb{R}$. Тоді за теоремою 2 міра μ диференційовна за Скороходом уздовж X, а ν — її слабка похідна.

Таким чином, ми переконалися, що якщо міра μ зосереджена на компакті S і для неї виконується умова (1), то вона диференційовна вздовж векторного поля X і її похідна Скорохода ν є радонівською мірою, що зосереджена на компакті $K=\Phi\big(\overline{I_b}\times S\big)$, де $I_b=(-b,b)$ при деякому b, меншому за сталу. Оскільки ми брали довільне таке b, то можемо взяти його як завгодно малим, і внаслідок єдиності слабкої похідної отримана міра ν буде тією ж самою. Отже, похідна Скорохода ν насправді зосереджена на компакті S, як і міра μ. Крім того, якщо C — така стала, що для кожного дійсного t виконується нерівність $\|\mu_t-\mu\|\leq C\,|t|$, то $\|\nu\|\leq C$.

Випадок 2. Міра μ є довільною. Доведення цього випадку є майже повністю аналогічним наведеному у статті [1]. Скрізь у доведенні відображення $(s,x)\mapsto x+sh$ природно узагальнюється відображенням $x\mapsto\Phi(s,h)$.

***Зауваження* 4.** З доведення другого випадку умови достатності теореми 1 випливає також те, що слабка похідна міри μ є радонівською мірою.

Отже, має місце такий наслідок.

***Наслідок* 4.** *Якщо за умов теореми* 1 *радонівська міра* μ *є слабко диференційовною вздовж векторного поля* X, *то її слабка похідна також є радонівською мірою.*

***Зауваження* 5.** У випадку, коли M є банаховим простором, простір E збігається з M і в рівномірному атласі маємо лише одну карту $(U,\varphi)=(M,id)$, а тому розбиття одиниці не потребується. Таким чином, для банахового простору теорема 1 виконується і без умови, що M допускає розбиття одиниці.

***Зауваження* 6.** Використовуючи лему 3, можна переформулювати теорему 1.

Автор висловлює подяку своєму науковому керівнику професору Ю. В. Богданському за постановку задач та цінні поради і зауваження щодо написання даної роботи.

Література

1. *Богачев В. И.* О дифференцируемости мер по Скороходу // Теория вероятностей и ее применения. – 1988. – **33**, № 2. – С. 348 – 354.
2. *Богачев В. И.* Дифференцируемые меры и исчисление Маллявэна. – М.; Ижевск: Регул. и хаот. динамика, 2008. – 544 с.
3. *Далецкий Ю. Л.* Стохастическая дифференциальная геометрия // Успехи мат. наук. – 1983. – **38**, № 3. – С. 87 – 111.
4. *Далецкий Ю. Л., Белопольская Я. И.* Стохастические уравнения и дифференциальная геометрия. – Киев: Вища шк., 1989. – 295 с.

5. *Smolyanov O. G., Weizsaecker H.* Differentiable families of measures // J. Funct. Anal. – 1993. – **118**. – P. 454 – 476.
6. *Богданский Ю. В.* Банаховы многообразия с ограниченной структурой и формула Гаусса – Остроградского // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 10. – С. 1299 – 1313.
7. *Gliklikh Yu. E.* Global and stochastic analysis with applications to mathematical physics. – Springer, 2011. – 436 p.
8. *Бурбаки Н.* Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов. Словарь. – М.: Наука, 1975. – 408 с.
9. *Ленг С.* Введение в теорию дифференцируемых многообразий. – М.: Мир, 1967. – 204 с.
10. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы : В 3 т. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – Т. 1. – 895 с.
11. *Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А.* Вероятностные распределения в банаховых пространствах. – М.: Наука, 1985. – 368 с.
12. *Скороход А. В.* Интегрирование в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1975. – 231 с.
13. *Богачев В. И.* Основы теории меры : В 2 т. – М.; Ижевск: Регул. и хаот. динамика, 2003. – Т. 1. – 544 с. Т. 2. – 576 с.
14. *Bogachev V. I.* Measure theory: In 2 vol. – Springer, 2006. – Vol. 1. – 500 p.

Одержано 26.01.16