УДК 519.21

А. Ю. Пилипенко, М. В. Танцюра (Ін-т математики НАН України, Київ)

ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА ДЛЯ ЗЛІЧЕННИХ СИСТЕМ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

We consider infinite systems of stochastic differential equations used to describe the motion of interacting particles in random media. It is assumed that mass of each particle tends to zero and the density of particles infinitely increases in a proper way. It is proved that the sequence of the corresponding measure-valued processes converges in distribution. We also prove existence and uniqueness of a strong solution for the limit equation.

Рассматриваются бесконечные системы стохастических дифференциальных уравнений, задающие движение взаимодействующих частиц в случайной среде. Доказана предельная теорема для последовательности решений в случае, когда масса каждой частицы стремится к нулю, а плотность частиц неограниченно возрастает. Также доказана теорема существования и единственности сильного решения для предельного уравнения.

1. Вступ. Нехай $\{\xi_i,\, i \geq 1\}$ — послідовність незалежних, однаково розподілених випадкових величин. Розглянемо послідовність систем стохастичних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} &dX_i^n(t) = a(X_i^n(t), \mu^n(t))dt + dw_i(t), \quad t \in [0,T], \\ &X_i^n(0) = \xi_i, \\ &\mu^n(t) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \delta_{X_i^n(t)}, \quad t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Розв'язок системи (1.1) для фіксованого n будемо інтерпретувати як рух системи взаємодіючих частинок у випадковому середовищі. При цьому будемо вважати, що кожна частинка має масу n^{-1}, випадкову величину $X_i^n(t)$ будемо інтерпретувати як положення i-ї частинки в момент t, $\mu_n(t)$ — як розподіл мас системи в момент t.

Відомо [12, 14, 15], що якщо коефіцієнти рівняння (1.1) задовольняють природні умови гладкості, то послідовності $\{X_i^n(\cdot)\}$, $\{\mu^n(\cdot)\}$ збігаються за ймовірністю (в певних функціональних просторах), до того ж границі є єдиним розв'язком систем рівнянь Маккіна – Власова

$$\begin{aligned} &dX_i(t) = a(X_i(t), \mu(t))dt + dw_i(t), \quad t \in [0,T], \\ &X_i(0) = \xi_i, \end{aligned} \tag{1.2}$$

де $\mu(t)$ — розподіл випадкової величини $X_i(t)$.

Мірозначний процес $\mu(t)$ в деякому сенсі є розв'язком рівняння

$$\begin{aligned} &\partial_t \mu(t) = -\partial_x (a(\cdot, \mu(t))\mu(t)) + \frac{1}{2}\Delta\mu(t), \\ &\mu_0 = m, \end{aligned} \tag{1.3}$$

де m — розподіл випадкової величини ξ_i.

Зауважимо, що початковий розподіл $\mu^n(0)$ збігається з емпіричною мірою $n^{-1}\sum_{i=1}^n \delta_{\xi_i}$. Відомо, що $\mu^n(0) \to m$, $n \to \infty$, майже напевно в топології слабкої збіжності. У випадку, коли m — скінченна, але не обов'язково ймовірнісна міра, розв'язок рівнянь (1.2), (1.3) також нескладно отримати як границю розв'язків системи (1.1), де $\{\xi_i, i \geq 0\}$ — послідовність незалежних, однаково розподілених випадкових величин з розподілом $\dfrac{m(du)}{m(\mathbb{R})}$, $\mu^n(0) = m(\mathbb{R}) n^{-1}\sum_{i=1}^n \delta_{\xi_i}$,

$\mu^n(t) = m(\mathbb{R})n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\delta_{X_i^n(t)}$. Але для випадку, коли $m(\mathbb{R}) = \infty$, такий підхід, звісно, не підходить. Природним узагальненням емпіричної міри, яке можна поширити і на σ-скінченні міри, є випадкова міра вигляду $n^{-1}N_{n\,m}(du)$, де $N = N_{nm}$ — пуассонівська точкова міра з мірою Леві $n\,m(du)$. Дійсно, якщо m є скінченною, то пуассонівська міра N майже напевно має скінченну кількість атомів та умовний розподіл N за умови $N(\mathbb{R}) = k$ збігається з $\sum_{i=1}^{k}\delta_{\xi_i}$, де $\{\xi_i,\, i \geq 0\}$ — послідовність незалежних випадкових величин, що мають розподіл $\dfrac{m(du)}{m(\mathbb{R})}$.

Запишемо аналог рівняння (1.1) за припущення, що початковий розподіл є нормованою пуассонівською точковою мірою. Нехай $m(du)$ — локально скінченна міра на $\mathbb{R}$ (з нескінченною масою), μ_n — пуассонівська точкова міра з мірою Леві $n\,m(du)$, $\mu_n = \sum_i \delta_{u_i^n}$.

Розглянемо послідовність систем стохастичних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} &dX_i^n(t) = a(X_i^n(t), \mu^n(t))dt + dw_i(t), \quad t \in [0,T], \quad i \in \mathbb{Z}, \\ &X_i^n(0) = u_i^n, \\ &\mu^n(t) = n^{-1}\sum_{i\in\mathbb{Z}}\delta_{X_i^n(t)}, \quad t \in [0,T], \\ &\mu^n(0) = n^{-1}\mu_n = n^{-1}\sum_i \delta_{u_i^n}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Метою даної роботи є дослідження граничної поведінки послідовності розв'язків (1.4).

Опишемо коротку структуру статті. В пункті 2 ми наведено теорему існування слабкого розв'язку для (1.4) у випадку, коли коефіцієнт переносу є неперервною та обмеженою функцією. Зауважимо, що (1.4) є зліченною системою стохастичних диференціальних рівнянь і теореми про існування сильного розв'язку та теореми про існування та єдиність слабкого розв'язку є серйозними проблемами. У пункті 3 встановлено передкомпактність розподілів розв'язків (1.4). У пункті 4 охарактеризовано граничні точки послідовності розв'язків рівнянь (1.4). Спочатку для граничного мірозначного процесу $\mu(t)$, $t \geq 0$, встановлюється певне диференціальне рівняння в частинних похідних, а потім доводиться, що процес $\mu(t)$, $t \geq 0$, можна отримати із системи стохастичних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} &d\psi_t(x) = a(\psi_t(x), \mu(t))dt + dw(t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0,T], \\ &\mu(t) = \mathrm{E}m \circ \psi_t(\cdot)^{-1}, \\ &\psi_0(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Тут $m \circ \psi_t(\cdot)^{-1}$ — образ (необмеженої) міри m під дією випадкового відображення $\psi_t(\cdot)$. Зазначимо, що якби m була ймовірнісною мірою, то $\mathrm{E}m\circ\psi_t(\cdot)^{-1}$ було б розподілом випадкової величини $\psi_t(\xi)$, де ξ — незалежна від вінерівського процесу випадкова величина з розподілом m. Тобто в даному випадку останнє рівняння співпало б з (1.2).

У пункті 5 встановлено теорему існування та єдиності розв'язку рівняння (1.5) у випадку, коли коефіцієнт переносу є достатньо гладким. Як наслідок єдиності границі (1.4), отримано слабку збіжність довільних розв'язків $\mu_n(t)$ до процесу з (1.5) (див. пункт 6). Якщо ж розв'язки (1.4) є сильними, то вдається отримати не лише збіжність за ймовірністю мірозначних процесів, але і положення окремих частинок (строге формулювання див. в теоремі 6.3).

2. Рівняння руху нескінченної системи взаємодіючих частинок. Позначимо через $\mathfrak{M}$ множину локально скінченних мір на $\mathbb{R}$, через $C_c(\mathbb{R})$ множину неперервних функцій з компактним носієм. Введемо на множині $\mathfrak{M}$ топологію τ грубої збіжності :

$$\nu_n \to \nu, \quad n \to \infty \;\Leftrightarrow\; \forall f \in C_c(\mathbb{R})\colon \int_{\mathbb{R}} f(x)\nu_n(dx) \to \int_{\mathbb{R}} f(x)\nu(dx). \tag{2.1}$$

Відомо, що для довільної щільної в $C_c(\mathbb{R})$ в топології рівномірної збіжності послідовності $\{f_n, n \geq 1\} \subset C_c^2(R)$ метрика

$$\rho(\nu_1, \nu_2) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \left(\left| \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\nu_1(dx) - \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\nu_2(dx) \right| \wedge 1 \right)$$

є метризацією топології τ.

***Зауваження* 2.1.** $(\mathfrak{M}, \rho)$ є повним сепарабельним метричним простором (див. [10, с. 40]).

Розглянемо нескінченну систему стохастичних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} &dX_i(t) = a(X_i(t), \mu(t))dt + dw_i(t), \quad t \in [0,T], \quad i \in \mathbb{Z}, \\ &\mu(t) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \delta_{X_i(t)}, \quad t \in [0,T], \\ &\mu(0) = \mu, \quad X_i(0) = u_i, \quad i \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

де міра $\mu = \sum_i \delta_{u_i}$ є пуассонівською точковою мірою з мірою Леві m, вінерівські процеси $\{w_i(\cdot),\ i \in \mathbb{Z}\}$ незалежні в сукупності і незалежні від μ.

У статті [9] доведено таку теорему.

Теорема 2.1. *Припустимо, що функція a обмежена та неперервна за сукупністю змінних і існує така стала $L > 0$, що*

$$\limsup_{k\to\infty} m([-k,k])/k^L < \infty. \tag{2.3}$$

Тоді існує слабкий розв'язок рівняння (2.2).

3. Передкомпактність послідовності розв'язків допграничних систем стохастичних диференціальних рівнянь. Нехай $\{w_i(\cdot), i \in \mathbb{Z}\}$ — незалежні вінерівські процеси, $\{u_i^n,\ i \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ — такі випадкові величини, що для довільного натурального n міра $\mu_n = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \delta_{u_i^n}$ є пуассонівською точковою мірою з інтенсивністю $nm(dx)$, де m — деяка σ-скінченна міра. Будемо припускати, що міри $\{\mu_n, n \geq 1\}$ незалежні від вінерівських процесів $\{w_i(\cdot), i \in \mathbb{Z}\}$.

Мета даного пункту — довести слабку передкомпактність мірозначних процесів $\{\mu^n(\cdot), n \geq 1\}$, які є деякими (слабкими) розв'язками нескінченної системи стохастичних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} &dX_i^n(t) = a(X_i^n(t), \mu^n(t))dt + dw_i(t), \quad t \in [0,T], \quad i \in \mathbb{Z}, \\ &\mu^n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i\in\mathbb{Z}} \delta_{X_i^n(t)}, \quad t \in [0,T], \\ &X_i^n(0) = u_i^n, \quad \mu^n(0) = \frac{1}{n}\mu_n. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Далі будемо припускати, що m — така міра на $\mathbb{R}$, що

$$\exists C_m > 0 \quad \forall [a,b] \subset \mathbb{R} \colon m([a,b]) \le C_m(b-a+1). \tag{3.2}$$

Ми розглядаємо слабкі розв'язки (3.1) і не припускаємо, що розв'язок єдиний. Взагалі кажучи, при різних n випадкові процеси $\{X_i^n(\cdot)\}_{n\ge1}$ можуть бути задані на різних імовірнісних просторах і вінерівські процеси $w_i(\cdot)$ залежать від номера серії n.

Теорема 3.1. *Припустимо, що функція* $a\colon \mathbb{R}\times\mathfrak{M}\to\mathbb{R}$ *є обмеженою та неперервною за сукупністю змінних. Тоді послідовність* $\{\mu^n(\cdot), n\ge 1\}$ *є слабко відносно компактною як послідовність випадкових елементів в* $C([0,T],\mathfrak{M})$.

Доведення. Достатньо перевірити такі дві умови (див. [3], наслідок 3.7.4):

1) для довільного $\varepsilon>0$ та $t\in[0,T]\cap\mathbb{Q}$ існує компакт $\Gamma_{\varepsilon,t}\subset\mathfrak{M}$ такий, що

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{P}(\mu^n(t)\in\Gamma_{\varepsilon,t}) \ge 1-\varepsilon; \tag{3.3}$$

2) для довільного $\varepsilon>0$ існує $\delta>0$ таке, що

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{P}(\omega_{\mu^n(\cdot)}(\delta)\ge\varepsilon) \le \varepsilon. \tag{3.4}$$

Легко бачити, що для довільної послідовності $\{c_n, n\in\mathbb{N}\}$ множина

$$\{\mu\in\mathfrak{M} \mid \forall n\ge 1 \;\; \mu([-n,n])\le c_n\}$$

є компактом в $(\mathfrak{M},\rho)$.

Позначимо

$$p_w(t,x) = \mathrm{P}\left(\sup_{s\in[0,t]} w(s)\ge x\right) = 2\int_{x\vee 0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-y^2/2t\right)dy, \quad x\in\mathbb{R}, \tag{3.5}$$

де w — стандартний вінерівський процес.

Для довільного відрізка $[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R}$ та числа $x\in\mathbb{R}$ будемо позначати через $d([\alpha,\beta],x)$ евклідову відстань від точки x до відрізка $[\alpha,\beta]$.

Щоб перевірити умову (3.3), нам потрібна така лема.

Лема 3.1. *Для довільного відрізка математичне сподівання значень міри* $\mu^n(t)$ *цього відрізка є обмеженим рівномірно по* $n\in\mathbb{N}$ *та* $t\in[0,T]$. *Більш того,*

$$\forall[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R} \quad \forall t\in[0,T] \quad \forall n\ge 1\colon$$
$$\mathrm{E}\,\mu^n(t,[\alpha,\beta]) \le \int_{\mathbb{R}} p_w(T, d([\alpha-\|a\|_\infty T, \beta+\|a\|_\infty T], x))m(dx). \tag{3.6}$$

Доведення. Маємо $\mu^n(0)=n^{-1}\mu_n$, де μ_n є пуассонівською точковою мірою з мірою Леві $nm(dx)$. Легко бачити, що для довільних i,n та довільного відрізка $[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R}$

$$\mathrm{P}\big(\exists t\in[0,T]\colon X_i^n(t)\in[\alpha,\beta]|\Im_0\big) \le p_w\big(T, d([\alpha-\|a\|_\infty T, \beta+\|a\|_\infty T], X_i^n(0))\big).$$

Тому

$$\mathrm{E}\,\mu^n(t,[\alpha,\beta]) = \frac{1}{n}\sum_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{E}\Big(\mathrm{P}(X_i^n(t)\in[\alpha,\beta]|\Im_0)\Big) \le$$

$$\le \mathrm{E}\sum_{i\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n} p_w(T, d([\alpha - \|a\|_\infty T, \beta + \|a\|_\infty T], X_i^n(0))) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} p_w(T, d([\alpha - \|a\|_\infty T, \beta + \|a\|_\infty T], x)) m(dx) < +\infty.$$

З (3.2) випливає, що права частина (3.6) є скінченною.

Лему 3.1 доведено.

З леми 3.1 випливає, що для довільного $k \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{E}\,\mu^n(t,[-k,k]) \le \int\limits_{\mathbb{R}} p_w\big(T, d([-k - \|a\|_\infty T, k + \|a\|_\infty T], x)\big) m(dx) =: C_k < +\infty. \tag{3.7}$$

Позначимо $M_\varepsilon = \{\nu \in \mathfrak{M} \mid \forall k \ge 1\ \nu([-k,k]) \le 2^k C_k/\varepsilon\}$. Для довільного $\varepsilon > 0$ множина M_ε є компактом в $\mathfrak{M}$. Тепер з (3.7) та нерівності Чебишова випливає, що

$$\mathrm{P}(\mu^n(t) \notin M_\varepsilon) \le \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{P}(\mu^n(t,[-k,k]) \ge 2^k C_k/\varepsilon) \le \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Отже, умову (3.3) виконано.

Для перевірки умови (3.4) потрібна така лема.

Лема 3.2. *Нехай $f \in C_c^2(\mathbb{R})$ — двічі неперервно диференційовна функція з компактним носієм. Тоді послідовність розподілів $\langle f, \mu^n(\cdot)\rangle$ в $C([0,T])$ є передкомпактною.*

Доведення. Для довільної міри λ та функції f будемо позначати

$$\langle f, \lambda\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\lambda(dx). \tag{3.8}$$

Нехай $0 \le t_0 \le t \le T$. З оцінки леми 3.1 випливає допустимість застосування формули Іто до $\langle f, \mu(t)\rangle = \sum_i f(X_i^n(t))$. Маємо

$$d(\langle f, \mu^n(t)\rangle - \langle f, \mu^n(t_0)\rangle)^4 = d\left(\frac{1}{n}\sum_{i\in\mathbb{Z}}\big(f(X_i^n(t)) - f(X_i^n(t_0))\big)\right)^4 =$$

$$= 4(\langle f, \mu^n(t)\rangle - \langle f, \mu^n(t_0)\rangle)^3 \left(\frac{1}{n}\sum_{i\in\mathbb{Z}} f'(X_i^n(t)) a(X_i^n(t), \mu^n(t)) + \frac{1}{2n}\sum_{i\in\mathbb{Z}} f''(X_i^n(t))\right) dt +$$

$$+6(\langle f, \mu^n(t)\rangle - \langle f, \mu^n(t_0)\rangle)^2 \frac{1}{n}\sum_{i\in\mathbb{Z}} f'(X_i^n(t))^2 dt +$$

$$+4(\langle f, \mu^n(t)\rangle - \langle f, \mu^n(t_0)\rangle)^3 \frac{1}{n}\sum_{i\in\mathbb{Z}} f'(X_i^n(t)) dw_i(t). \tag{3.9}$$

Отже,

$$\mathrm{E}(\langle f, \mu^n(t)\rangle - \langle f, \mu^n(t_0)\rangle)^4 =$$

$$= \mathrm{E}\int_{t_0}^{t} 4(\langle f, \mu^n(s)\rangle - \langle f, \mu^n(t_0)\rangle)^3 \left\langle f'(\cdot)a(\cdot, \mu^n(s)) + \frac{1}{2}f''(\cdot),\ \mu^n(s)\right\rangle ds +$$

$$+ \mathrm{E}\int_{t_0}^{t} 6(\langle f, \mu^n(s)\rangle - \langle f, \mu^n(t_0)\rangle)^2 \left\langle \left(f'(\cdot)\right)^2,\ \mu^n(s)\right\rangle ds.$$

Застосувавши нерівність Гельдера, отримаємо

$$\mathrm{E}(\langle f, \mu^n(t)\rangle - \langle f, \mu^n(t_0)\rangle)^4 \leq \int_{t_0}^{t} 4\left(\mathrm{E}(\langle f, \mu^n(s)\rangle - \langle f, \mu^n(t_0)\rangle)^4\right)^{3/4} \times$$

$$\times \left(\mathrm{E}\left\langle f'(\cdot)a(\cdot, \mu^n(s)) + \frac{1}{2}f''(\cdot),\ \mu^n(s)\right\rangle^4\right)^{1/4} ds +$$

$$+ 6\int_{t_0}^{t} \left(\mathrm{E}(\langle f, \mu^n(s)\rangle - \langle f, \mu^n(t_0)\rangle)^4\right)^{1/2} \left(\mathrm{E}\left\langle \left(f'(\cdot)\right)^2,\ \mu^n(s)\right\rangle^2\right)^{1/2} ds. \tag{3.10}$$

З міркувань, аналогічних доведенню леми 3.1, та припущень щодо функції f випливає, що всі доданки у правій частині (3.10) обмежені рівномірно по n. Тому з (3.10) одержимо

$$\mathrm{E}(\langle f, \mu^n(t)\rangle - \langle f, \mu^n(t_0)\rangle)^4 \leq C_1|t - t_0|, \tag{3.11}$$

де C_1 не залежить від $t_0,\ t,\ n$.

Підставивши (3.11) у праву частину (3.10), отримаємо

$$\exists C_2 \quad \forall n \quad \forall t_0, t \in [0, T]\colon\ \mathrm{E}(\langle f, \mu^n(t)\rangle - \langle f, \mu^n(t_0)\rangle)^4 \leq C_2|t - t_0|^{3/2}.$$

Отже, за достатньою умовою передкомпактності Колмогорова послідовність розподілів $\langle f, \mu^n(\cdot)\rangle$ є передкомпактною.

Лему 3.2 доведено.

Щоб завершити доведення теореми, перевіримо умову (3.4):

$$\rho(\mu^n(t_1), \mu^n(t_2)) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^m}\Big(\big|\langle f_m, \mu^n(t_1)\rangle - \langle f_m, \mu^n(t_2)\rangle\big| \wedge 1\Big) \leq$$

$$\leq \sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^m}\big(\omega_{\langle f_m, \mu^n(\cdot)\rangle}(|t_1 - t_2|) \wedge 1\big).$$

Тепер умова (3.4) випливає з леми 3.2 і теореми 2.8.2 з [5].

Теорему 3.1 доведено.

4. Характеризація граничних точок послідовності розв'язків. У даному пункті буде доведено, що довільна гранична точка $\mu(\cdot)$ послідовності $\{\mu^n(\cdot),\ n \geq 1\}$ задовольняє певне рівняння в частинних похідних (теорема 4.1) та є в деякому сенсі розподілом розв'язку певного стохастичного диференціального рівняння (теорема 4.2).

Позначимо через $C_c^{2,1}(\mathbb{R}\times[0,T])$ множину функцій $f=f(x,t)\colon \mathbb{R}\times[0,T]\to\mathbb{R}$ з компактним носієм, що є неперервно диференційовними по t і двічі неперервно диференційовними по x. Далі для $f\in C_c^{2,1}(\mathbb{R}\times[0,T])$ будемо позначати через $\operatorname{supp} f$ найменшу замкнену множину M таку, що

$$\forall x\notin M \quad \forall t\in[0,T]\colon f(x,t)=0.$$

За формулою Іто для $f\in C_c^{2,1}(\mathbb{R}\times[0,T])$ маємо співвідношення

$$d\langle f(\cdot,t),\mu^n(t)\rangle=\left\langle f_t'(\cdot,t)+f_x'(\cdot,t)a(\cdot,\mu^n(t))+\frac{1}{2}f_{xx}''(\cdot,t),\,\mu^n(t)\right\rangle dt+$$
$$+\frac{1}{n}\sum_{i\in\mathbb{Z}}f_x'(X_i^n(t),t)dw_i(t). \tag{4.1}$$

Лема 4.1. *Нехай виконано припущення теореми* 3.1. *Тоді для довільної* $f\in C_c^{2,1}(\mathbb{R}\times[0,T])$

$$\mathrm{E}\sup_{t\in[0,T]}\left(\frac{1}{n}\sum_{i\in\mathbb{Z}}\int\limits_0^t f_x'(X_i^n(s),s)dw_i(s)\right)^2\to 0,\quad n\to\infty.$$

Доведення. Оскільки вінерівські процеси $\{w_i(\cdot),\,i\in\mathbb{Z}\}$ є незалежними, то

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i\in\mathbb{Z}}\int\limits_0^t f_x'(X_i^n(s),s)dw_i(s)\right)^2=\mathrm{E}\,\frac{1}{n^2}\sum_{i\in\mathbb{Z}}\int\limits_0^t\big(f_x'(X_i^n(s),s)\big)^2ds\le$$
$$\le\frac{\|f'\|_\infty^2}{n}\frac{1}{n}\,\mathrm{E}\Big|\big\{i\in\mathbb{Z}\mid\exists s\in[0,T]\colon X_i^n(s)\in\operatorname{supp}f\big\}\Big|. \tag{4.2}$$

Як і при доведенні леми 3.1, можна перевірити, що послідовність

$$\left\{\frac{1}{n}\,\mathrm{E}\Big|\big\{i\in\mathbb{Z}\mid\exists s\in[0,T]\colon X_i^n(s)\in\operatorname{supp}f\big\}\Big|,\ n\ge 1\right\}$$

є обмеженою. Тепер лема випливає з (4.2) та нерівності Колмогорова для мартингалів.

Лему 4.1 доведено.

Нехай підпослідовність $\{n_k,\,k\ge1\}$ і мірозначний процес $\{\mu(t),\,t\in[0,T]\}$ такі, що $\mu^{n_k}(\cdot)$ слабко збігається до $\mu(\cdot)$, як послідовність випадкових елементів в $C([0,T],\mathfrak{M})$. З теореми Скорохода про спільний імовірнісний простір випливає, що існує ймовірнісний простір і визначені на ньому випадкові елементи $\{\tilde\mu^{n_k}(t),\,\tilde w_i^{n_k}(t),\,k\ge1,\,i\in\mathbb{Z},\,t\in[0,T]\}$ і $\{\tilde\mu(t),\,t\in[0,T]\}$ такі, що для довільного $k\ge1$ випадковий елемент $\{\tilde\mu^{n_k}(t),\,\tilde w_i^{n_k}(t),\,i\in\mathbb{Z},\,t\in[0,T]\}$ має такий же розподіл, як $\{\mu^{n_k}(t),\,w_i(t),\,i\in\mathbb{Z},\,t\in[0,T]\}$, і

$$\tilde\mu^{n_k}(\cdot)\xrightarrow{\mathrm{P}_1}\tilde\mu(\cdot),\quad k\to\infty, \tag{4.3}$$

як випадкові елементи в $C([0,T],\mathfrak{M})$, тобто

$$\sup_{t\in[0,T]}\rho\big(\tilde\mu^{n_k}(t),\tilde\mu(t)\big)\xrightarrow{\mathrm{P}_1}0,\quad k\to\infty.$$

Далі для спрощення позначень будемо писати n замість n_k і w_i^n замість $\tilde w_i^{n_k}$.

Лема 4.2. *Нехай виконано припущення теореми* 3.1. *Тоді для довільного* $f \in C_c^{2,1}(\mathbb{R}\times[0,T])$ *і довільного* $t \in [0,T]$

$$\int\limits_0^t \left\langle \left(f'_s(\cdot,s) + f'_x(\cdot,s)a(\cdot,\tilde{\mu}^n(s)) + \frac{1}{2}f''_{xx}(\cdot,s)\right),\, \tilde{\mu}^n(s)\right\rangle ds \overset{\mathrm{P}_1}{\to}$$

$$\overset{\mathrm{P}_1}{\to} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} \left\langle \left(f'_s(\cdot,s) + f'_x(\cdot,s)a(\cdot,\tilde{\mu}(s)) + \frac{1}{2}f''_{xx}(\cdot,s)\right),\, \tilde{\mu}(s)\right\rangle ds, \quad n\to\infty.$$

Доведення. Оцінимо різницю

$$\left| \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} \left\langle \left(f'_s(\cdot,s) + f'_x(\cdot,s)a(\cdot,\tilde{\mu}^n(s)) + \frac{1}{2}f''_{xx}(\cdot,s)\right),\, \tilde{\mu}^n(s)\right\rangle ds - \right.$$

$$\left. - \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} \left\langle \left(f'_s(\cdot,s) + f'_x(\cdot,s)a(\cdot,\tilde{\mu}(s)) + \frac{1}{2}f''_{xx}(\cdot,s)\right),\, \tilde{\mu}(s)\right\rangle ds \right| \le$$

$$\le \left| \int\limits_0^t \big\langle \big(f'_x(\cdot,s)(a(\cdot,\tilde{\mu}^n(s)) - a(\cdot,\tilde{\mu}(s)))\big),\, \tilde{\mu}^n(s)\big\rangle ds \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_0^t \left\langle \left(f'_s(\cdot,s) + f'_x(\cdot,s)a(\cdot,\tilde{\mu}(s)) + \frac{1}{2}f''_{xx}(\cdot,s)\right),\, \tilde{\mu}^n(s) - \tilde{\mu}(s)\right\rangle ds \right|. \tag{4.4}$$

Оскільки з імовірністю 1 має місце рівномірна збіжність $\tilde{\mu}^n(\cdot) \overset{[0,T]}{\rightrightarrows} \tilde{\mu}(\cdot)$, $n\to\infty$, то для майже кожного ω існує компакт $K(\omega) \subset \mathfrak{M}$ такий, що $\{\tilde{\mu}^n(t,\omega),\, \mu(t,\omega) \mid t\in[0,T],\, n \ge 1\} \subset K(\omega)$. Оскільки $\operatorname{supp} f \times K(\omega)$ є компактом, то неперервна функція a є рівномірно неперервною на $\operatorname{supp} f \times K(\omega)$. Отже, перший доданок у правій частині (4.4) не перевищує

$$\sup_{x\in\operatorname{supp} f}\sup_{s\in[0,T]} \big|a(x,\tilde{\mu}^n(s)) - a(x,\tilde{\mu}(s))\big| \|f'_x\|_\infty \sup_{s\in[0,T]} \tilde{\mu}^n(s,\operatorname{supp} f) \to 0, \quad n\to\infty,$$

бо

$$\sup_{x\in\operatorname{supp} f}\sup_{s\in[0,T]} \big|a(x,\tilde{\mu}^n(s)) - a(x,\tilde{\mu}(s))\big| \to 0, \quad n\to\infty,$$

і

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sup_{s\in[0,T]} \tilde{\mu}^n(s,\operatorname{supp} f) \le \sup_{s\in[0,T]} \tilde{\mu}(s,\operatorname{supp} f) < \infty. \tag{4.5}$$

Оскільки для довільного фіксованого $s\in[0,T]$

$$h(\cdot) := f'_x(\cdot,s)a(\cdot,\mu(s)) + \frac{1}{2}f''_{xx}(\cdot,s) + f'_s(\cdot,s) \in C_c(\mathbb{R}),$$

то

$$\forall s \in [0,T] : \langle h, \tilde{\mu}^n(s) \rangle \to \langle h, \tilde{\mu}(s) \rangle, \quad n \to \infty,$$

до того ж

$$\big|\langle h, \mu(s) \rangle\big| \le \left(\|f'_s\|_\infty + \|f'_x\|_\infty \|a\|_\infty + \frac{1}{2}\|f''_{xx}\|_\infty \right) \sup_{s\in[0,T]} \tilde{\mu}(s, \operatorname{supp} f).$$

З (4.5) випливає, що $\big\{ \sup_{s\in[0,T]} \tilde{\mu}^n(s, \operatorname{supp} f),\, n \ge 1 \big\}$ є обмеженою послідовністю. Тому, застосувавши теорему Лебега про мажоровану збіжність, отримаємо збіжність інтегралів у другому доданку з правої частини (4.4). Отже, права частина (4.4) прямує до 0 при $n \to \infty$.

Лему 4.2 доведено.

З (4.1), лем 4.1, 4.2 та того, що $\mu^n(0) \xrightarrow{\mathrm{P}} m,\ n \to \infty$, випливає таке твердження.

Теорема 4.1. *Припустимо, що функція a обмежена та неперервна за сукупністю змінних. Нехай $\mu(\cdot)$ — довільна слабка гранична точка послідовності $\{\mu^n(\cdot),\, n \ge 1\}$, що розглядається як послідовність випадкових елементів простору $C([0,T], \mathfrak{M})$. Тоді для довільної $f \in C_c^{2,1}(\mathbb{R} \times \times [0,T])$*

$$\langle \mu(t), f(\cdot,t) \rangle = \langle m, f(\cdot,0) \rangle +$$

$$+ \int_0^t \left\langle \left(f'_s(\cdot,s) + f'_x(\cdot,s) a(\cdot,\mu(s)) + \frac{1}{2} f''_{xx}(\cdot,s) \right), \mu(s) \right\rangle ds, \quad t \in [0,T]. \tag{4.6}$$

***Зауваження* 4.1.** Рівність (4.6) виконується майже напевно також для випадкових елементів f зі значеннями у просторі $C_c^{2,1}(\mathbb{R} \times [0,T])$, де топологію задано таким чином: $g_n \to g$, $n \to \infty$, в $C_c^{2,1}(\mathbb{R} \times [0,T])$ тоді і тільки тоді, коли існує таке $K > 0$, що $\bigcup_{n=1}^\infty \operatorname{supp} g_n \subset [-K, K]$ і

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n - g\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \|(g_n)'_t - g'_t\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \|(g_n)'_x - g'_x\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \|(g_n)''_{xx} - g''_{xx}\|_\infty = 0.$$

Справді, для довільної невипадкової функції f існує множина Ω_f міри 1 така, що для довільного $\omega \in \Omega_f$ виконується рівність (4.6). Нехай $\{f_n, n \ge 1\}$ — щільна підмножина в $C_c^{2,1}(\mathbb{R} \times [0,T])$. Позначимо $\Omega_1 = \bigcap_{n=1}^\infty \Omega_{f_n}$. Тоді Ω_1 є множиною міри 1 і для довільних $\omega \in \Omega_1$ і $n \in \mathbb{N}$ рівність (4.6) виконується для функції f_n. Нехай тепер f є випадковим елементом у просторі $C_c^{2,1}(\mathbb{R} \times [0,T])$. Тоді для довільного фіксованого $\omega \in \Omega_1$ функція $f(\cdot,\omega)$ є границею деякої підпослідовності функцій $\{f_{n_k},\, k \ge 1\}$, для яких (4.6) виконано. Перейшовши до границі $k \to \infty$, отримаємо, що (4.6) виконано для $\omega \in \Omega_1$.

Нашою подальшою метою є встановлення зв'язку (4.6) із певним стохастичним диференціальним рівнянням.

Нехай $\varphi_{st}(x),\ s \le t,\ x \in \mathbb{R}$, — розв'язок рівняння

$$\begin{aligned} d\varphi_{st}(x) &= a(\varphi_{st}(x), \mu(t))dt + dw(t), \quad t \in [s,T], \\ \varphi_{ss}(x) &= x, \end{aligned} \tag{4.7}$$

де $w(\cdot)$ — незалежний від $\mu(\cdot)$ вінерівський процес. Тут $\mu(\cdot)$ взято з теореми 4.1.

Позначимо $A(x,t) = a(x, \mu(t)),\ \mathrm{E}_w$ — математичне сподівання за вінерівською мірою.

Лема 4.3. *Припустимо, що функція a неперервна за сукупністю змінних і для майже всіх ω функція $A = A(x,t)$ є диференційовною по x, причому функція $A'_x(x,t)$ обмежена. Якщо $g \in C_c^2(\mathbb{R})$, то для довільного фіксованого $S \in [0,T]$ функція f вигляду*

$$f(x,t) = \mathrm{E}_w\, g(\varphi_{tS}(x)), \quad t \in [0,S], \tag{4.8}$$

задовольняє співвідношення

$$\forall t \in [0,S] \colon \langle \mu(t), f(\cdot,t)\rangle = \langle m, f(\cdot,0)\rangle.$$

***Зауваження* 4.2.** Далі буде доведено, що міри $\mu(t)$, $t \in [0,T]$, є невипадковими.

***Зауваження* 4.3.** З теореми 1.7.12 [11] маємо, що існує розв'язок рівняння

$$\begin{aligned} &f'_t(x,t) + f'_x(x,t)A(x,t) + \frac{1}{2} f''_{xx}(x,t) = 0, \quad t \in [s,S), \quad x \in \mathbb{R}, \\ &f(x,S) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{4.9}$$

і з оберненого рівняння Колмогорова випливає, що розв'язок (4.9) задовольняє рівність (4.8). Однак функція f, що визначена в (4.8), не задовольняє умови теореми 4.1, оскільки не має компактного носія. Для доведення леми достатньо показати, що (4.6) виконується також для функції f з (4.8).

***Зауваження* 4.4.** Для виконання припущень щодо функції A достатньо, щоб функція a була неперервно диференційовною по x, неперервною за сукупністю змінних і

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \sup_{\mu\in\mathfrak{M}} |a'_x(x,\mu)| < +\infty.$$

***Доведення леми* 4.3.** Перевіримо збіжність інтеграла майже напевно

$$\Big\langle |f(\cdot,t)|,\, \mu(t) \Big\rangle = \int_{\mathbb{R}} |f(x,t)| \mu(t,dx) < +\infty \tag{4.10}$$

для функції f з (4.8). Оцінимо

$$|f(x,t)| \le \mathrm{E}_w\, |g(\varphi_{tS}(x))| \le \|g\|_\infty\, \mathrm{P}(\varphi_{tS}(x) \in \operatorname{supp} g). \tag{4.11}$$

Нехай $\operatorname{supp} g \subset [-R,R]$. З (4.11) та нерівності Чебишова для довільного $|x| \ge R$ та $p \ge 1$ отримаємо

$$|f(x,t)| \le \|g\|_\infty\, \mathrm{P}(|\varphi_{tS}(x) - x| \ge |x| - R) \le \|g\|_\infty \frac{\mathrm{E}_w(R + 1 + |\varphi_{tS}(x) - x|)^p}{(1+|x|)^p}. \tag{4.12}$$

Оскільки $|\varphi_{tS}(x) - x| \le |w(S) - w(t)| + \|a\|_\infty |S-t|$, то

$$|f(x,t)| \le \|g\|_\infty \frac{\mathrm{E}_w\big(R + 1 + |w(S) - w(t)| + \|a\|_\infty |S-t|\big)^p}{(1+|x|)^p} = \|g\|_\infty \frac{K(S,p,\|g\|_\infty)}{(1+|x|)^p}, \tag{4.13}$$

де функція K залежить лише від S, p, $\|g\|_\infty$. Оскільки

$$\mathrm{E} \int_{\mathbb{R}} |f(x,t)| \mu(t,dx) = \int_{\mathbb{R}} |f(x,t)| (\mathrm{E}\, \mu(t,dx)), \tag{4.14}$$

то з (3.2), (3.6) і (4.13) випливає, що інтеграл в (4.14) скінченний. Тепер за теоремою Фубіні інтеграл в (4.10) є скінченним майже напевно.

Нехай $q(\cdot) \in C^2(\mathbb{R}, [0,1])$ — парна функція з носієм в $[-1,1]$ така, що $q(0) = 1$.

Визначимо послідовність функцій $\{h_n,\ n \geq 1\}$:

$$h_n(x) = 1\!\!\mathrm{I}_{|x|\leq n} + q(x-n)1\!\!\mathrm{I}_{x>n} + q(x+n)1\!\!\mathrm{I}_{x<-n} \tag{4.15}$$

і послідовність $\{f_n,\ n \geq 1\}$:

$$f_n(x,t) = h_n(x)f(x,t). \tag{4.16}$$

Для довільного натурального n функція f_n належить $C_c^{2,1}(\mathbb{R} \times [0,T])$, тому (4.6) виконано для f_n. Очевидно, функції f_n збігаються поточково до f, тому для доведення леми достатньо обґрунтувати граничний перехід в (4.6).

З (4.10) та теореми Лебега про мажоровану збіжність випливає, що

$$\langle f_n(\cdot,t), \mu(t)\rangle \xrightarrow{\mathrm{P}_1} \langle f(\cdot,t), \mu(t)\rangle, \quad n \to \infty,$$

для довільного $t \in [0,S]$.

Використавши (4.9), перетворимо підінтегральний вираз у правій частині (4.6):

$$\frac{\partial f_n(x,s)}{\partial s} + \frac{\partial f_n(x,s)}{\partial x}A(x,s) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_n(x,s)}{\partial x^2} =$$

$$= h_n(x)f'_s(x,s) + (h_n(x)f'_x(x,s) + h'_n(x)f(x,s))A(x,s) + \frac{1}{2}(h_n(x)f''_{xx}(x,s) +$$

$$+ 2h'_n(x)f'_x(x,s) + h''_{xx}(x)f(x,s)) =$$

$$= h'_n(x)f(x,s)A(x,s) + h'_n(x)f'_x(x,s) + \frac{1}{2}h''_n(x)f(x,s).$$

Оскільки функція $A(x,t)$ неперервно диференційовна по x, то функція $\varphi_{tT}(x)$ неперервно диференційовна по x в середньоквадратичному сенсі (див. [8], теорема 2.8.1), до того ж похідна $\dfrac{\partial \varphi_{tS}(x)}{\partial x}$ задовольняє рівняння

$$\frac{\partial \varphi_{tS}(x)}{\partial x} = 1 + \int\limits_t^S A'_x(\varphi_{tu}(x), u)\frac{\partial \varphi_{tu}(x)}{\partial x}du.$$

Тепер з леми Гронуолла – Беллмана випливає, що

$$\left|\frac{\partial \varphi_{tS}(x)}{\partial x}\right| \leq e^{\|A'_x\|_\infty (S-t)} \leq e^{\|A'_x\|_\infty S}.$$

Звідси

$$|f'_x(x,s)| = \left|\frac{d}{dx}\,\mathrm{E}_w\, g(\varphi_{sS}(x))\right| =$$

$$= \left|\mathrm{E}_w\left(g'(\varphi_{sS}(x))\frac{\partial \varphi_{sS}(x)}{\partial x}\right)\right| \leq \mathrm{E}_w|g'(\varphi_{sS}(x))|e^{\|A'_x\|_\infty S}. \tag{4.17}$$

Як і при доведенні (4.13), можна перевірити, що

$$\forall p \geq 1: \ \mathrm{E}_w |g'(\varphi_{sS}(x))| \leq \|g'\|_\infty \frac{K(S,p,\|g\|_\infty)}{(1+|x|)^p}. \tag{4.18}$$

Тому з (4.12), (4.14), (4.17), (4.18) випливає, що для довільного $p \geq 1$

$$\left| \int_0^t \int_{|x|\in(n,n+1)} \left(h_n'(x) f(x,s) A(x,s) + h_n'(x) f_x'(x,s) + \frac{1}{2} h_n''(x) f(x,s) \right) \mu(s,dx) \right| \leq$$

$$\leq \|q'\|_\infty \int_0^t \int_{|x|\in(n,n+1)} \left(\|A_x'\|_\infty |f(x,s)| + e^{\|A_x'\|_\infty S} \|g'\|_\infty \frac{K(S,p,\|g\|_\infty)}{(1+|x|)^p} \right) \mu(s,dx)\, ds +$$

$$+ \frac{1}{2} \|q''\|_\infty \int_0^t \int_{|x|\in(n,n+1)} |f(x,s)| \mu(s,dx)\, ds. \tag{4.19}$$

Аналогічно доведенню (4.10) можна перевірити, що для $p \geq 2$

$$\mathrm{E} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|x|)^p} \mu(s,dx) < +\infty. \tag{4.20}$$

З (4.10), (4.20) та теореми Лебега про мажоровану збіжність випливає, що права частина (4.19) прямує до 0 майже напевно при $n \to \infty$. Оскільки $f_n(x,s) = f(x,s)$ для $|x| \leq n$, то з (4.9) випливає, що

$$\int_{|x|\notin(n,n+1)} \left(\frac{\partial f_n(x,s)}{\partial s} + \frac{\partial f_n(x,s)}{\partial x} A(x,s) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_n(x,s)}{\partial x^2} \right) \mu(s,dx) = 0.$$

Отже,

$$\int_0^t \left\langle \left(\frac{\partial f_n(\cdot,s)}{\partial s} + \frac{\partial f_n(\cdot,s)}{\partial x} A(\cdot,s) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_n(\cdot,s)}{\partial x^2} \right),\, \mu(s) \right\rangle ds \overset{\mathrm{P}_1}{\to}$$

$$\overset{\mathrm{P}_1}{\to} \int_0^t \left\langle \left(f_s'(\cdot,s) + f_x'(\cdot,s) A(\cdot,s) + \frac{1}{2} f_{xx}''(\cdot,s) \right),\, \mu(s) \right\rangle ds, \quad n \to \infty.$$

Перейшовши до границі в рівнянні (4.6), для функції f_n отримаємо, що (4.6) виконано і для функції f.

Лему 4.3 доведено.

Позначимо через $\lambda \circ f^{-1}$ образ міри λ при відображенні f.

Теорема 4.2. *Нехай* $\mu(\cdot)$ *— довільна слабка гранична точка послідовності* $\{\mu^n(\cdot), n \geq 1\}$, *що розглядається як послідовність випадкових елементів простору* $C([0,T],\mathfrak{M})$. *Припустимо, що виконуються умови теореми* 4.1 *та леми* 4.3. *Позначимо* $\varphi_t(x) = \varphi_{0t}(x)$, *де* $\varphi_{0t}(x)$ *— розв'язок рівняння* (4.7). *Тоді*

$$\forall t \in [0,T]: \mu(t) = \mathrm{E}_w \big(m \circ \varphi_t(\cdot)^{-1} \big).$$

***Зауваження* 4.5.** Функція $\varphi_t(x)$ вимірна по (t, x, ω).

***Доведення теореми* 4.2.** Зафіксуємо довільне $S \in [0, T]$. З леми 4.3 випливає, що для довільного $g \in C_c^2(\mathbb{R})$ для $f(x,t) := \mathrm{E}_w\, g(\varphi_{tS}(x)),\ t \in [0, S]$, має місце співвідношення

$$\langle \mu(S), g\rangle = \langle \mu(S), f(\cdot, S)\rangle = \langle \mu(0), f(\cdot, 0)\rangle = \langle m, f(\cdot, 0)\rangle = \langle m, \mathrm{E}_w\, g(\varphi_S(x))\rangle =$$

$$= \mathrm{E}_w \int\limits_{\mathbb{R}} g(\varphi_S(x)) m(dx) = \mathrm{E}_w \int\limits_{\mathbb{R}} g(y) \left(m \circ \varphi_S(\cdot)^{-1}\right)(dy) = \langle \mathrm{E}_w\, m \circ \varphi_S(\cdot)^{-1}, g(\cdot)\rangle.$$

Отже,

$$\forall g \in C_c^2(\mathbb{R})\colon \langle \mu(S), g(\cdot)\rangle = \Big\langle\, \mathrm{E}_w\, m \circ \varphi_S(\cdot)^{-1}, g(\cdot)\Big\rangle.$$

Звідси $\mu(S) = \mathrm{E}_w(m \circ \varphi_S(\cdot)^{-1})$.

Теорему 4.2 доведено.

5. Існування та єдиність сильного розв'язку граничного рівняння. Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{aligned} &d\psi_t(x) = a(\psi_t(x), \nu(t))dt + dw(t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, T],\\ &\nu(t) = \mathrm{E}\, m \circ \psi_t(\cdot)^{-1},\\ &\psi_0(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

У даному пункті буде доведено теорему існування слабкого розв'язку рівняння (5.1) та теорему існування та єдиності сильного розв'язку рівняння (5.1).

Позначимо

$$\mathfrak{M}_C = \{m \in \mathfrak{M}\colon \forall [a,b] \subset \mathbb{R}\colon m([a,b]) \le C(b - a + 1)\}, \qquad \mathfrak{M}_\infty = \bigcup_{C>0} \mathfrak{M}_C.$$

Введемо клас функцій

$$F = \big\{f \in C^1(\mathbb{R}) \mid \mathrm{supp}\ f \subset [-1, 1],\ \|f\|_\infty \le 1,\ \|f'\|_\infty \le 1\big\}. \tag{5.2}$$

Введемо метрику на $\mathfrak{M}_\infty$:

$$\rho_\infty(\mu, \nu) = \sup_{r \in \mathbb{R}} \sup_{f \in F} \left| \int\limits_{\mathbb{R}} f(x + r)(\mu(dx) - \nu(dx)) \right|.$$

Теорема 5.1. *Припустимо, що*:

1) *функція* $a\colon \mathbb{R} \times \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ *є обмеженою та неперервною за сукупністю змінних*;
2) $\forall C > 0\ \exists L_C > 0\ \forall \mu \in \mathfrak{M}_C\ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}\colon |a(x_1, \mu) - a(x_2, \mu)| \le L_C |x_1 - x_2|$;
3) $m \in \mathfrak{M}_\infty$.

Тоді існує слабкий розв'язок рівняння (5.1).

Теорема 5.2. *Припустимо, що*:

1) *функція* $a\colon \mathbb{R} \times \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ *є обмеженою та неперервною за сукупністю змінних*;
2) $\forall C > 0\ \exists L_C > 0\ \forall \mu \in \mathfrak{M}_C\ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}\colon$

$$|a(x_1, \mu) - a(x_2, \mu)| \le L_C |x_1 - x_2|;$$

3) $\exists K > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall \mu, \nu \in \mathfrak{M}_\infty$:

$$|a(x,\mu) - a(x,\nu)| \leq K\rho_\infty(\mu,\nu);$$

4) $m \in \mathfrak{M}_\infty$.

Тоді існує єдиний сильний розв'язок (5.1).

***Зауваження* 5.1.** Всі міркування даного пункту мають місце і для рівняння

$$\begin{aligned} &d\tilde{\psi}_t(x) = a(\tilde{\psi}_t(x), \tilde{\nu}(t))dt + dw(t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0,T], \\ &\tilde{\nu}(t) = \mathrm{E}_w\, m \circ \tilde{\psi}_t(\cdot)^{-1}, \\ &\tilde{\psi}_0(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Отже, за припущень теореми 5.2 існує єдиний сильний розв'язок рівнянь (5.1) та (5.3). Процес $\{\psi_t(x),\, x \in \mathbb{R},\, t \in [0,T]\}$ з рівняння (5.1) є вимірним відносно вінерівської фільтрації, отже, пара $\{(\psi_t(x),\, \nu(t)),\, x \in \mathbb{R},\, t \in [0,T]\}$ також задовольняє рівняння (5.3). З єдиності розв'язків випливає, що вони збігаються, а з теорем 4.2 та 5.2 маємо, що довільна слабка гранична точка послідовності $\{\mu^n(\cdot),\, n \geq 1\}$ є невипадковою і єдиним чином визначається з рівняння (5.1).

Для доведення теорем потрібно кілька допоміжних лем, які дають апріорні оцінки властивостей розв'язку (5.1). Позначимо

$$M(t) = \sup_{s \leq t} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi_s(x) - x|.$$

Легко бачити, що якщо $X(u,t)$ — розв'язок рівняння (5.1), то

$$M(t) \leq \sup_{s \leq t} |w(s)| + t\|a\|_\infty. \tag{5.4}$$

Наступна лема дає апріорні оцінки на міри $\{\nu(t),\, t \in [0,T]\}$ і дозволяє застосовувати припущення 2 теорем 5.1 та 5.2 з наперед відомою сталою C.

Лема 5.1. *Якщо* $\{\psi_t(x),\, \nu(t),\, x \in \mathbb{R},\, t \in [0,T]\}$ — *розв'язок рівняння* (5.1), *то існує стала* $N = N(\|a\|_\infty, T, C_m)$, *яка залежить лише від* $\|a\|_\infty$, T, C_m, *така, що*

$$\nu(t) \in \mathfrak{M}_N \quad \forall t \in [0,T]. \tag{5.5}$$

Доведення. З (5.1) випливає, що для довільного відрізка $[\alpha,\beta]$

$$\nu(t,[\alpha,\beta]) = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{P}(\psi_t(x) \in [\alpha,\beta]) m(dx).$$

З (5.1) випливає, що для $u \notin [\alpha - \|a\|_\infty T,\ \beta + \|a\|_\infty T]$

$$\mathrm{P}(\psi_t(x) \in [\alpha,\beta]) \leq p_w\big(T, d(x,[\alpha,\beta]) - \|a\|_\infty T\big).$$

Звідси маємо

$$\nu(t,[\alpha,\beta]) \leq m([\alpha - \|a\|_\infty T - 1, \beta + \|a\|_\infty T + 1])+$$
$$+\sum_{n\geq 2} p_w(T,n-1) m([\beta + \|a\|_\infty T + n - 1, \beta + \|a\|_\infty T + n])+$$

$$+\sum_{n\geq 2} p_w(T,n-1)m([\alpha-\|a\|_\infty T-n,\alpha-\|a\|_\infty T-n+1])\leq$$

$$\leq C_m(\beta-\alpha+2\|a\|_\infty T+2)+4\sum_{n\geq 2} p_w(T,n-1). \tag{5.6}$$

Отже, $\nu(t,[\alpha,\beta])\leq N(\beta-\alpha+1)$, де $N=N(\|a\|_\infty,T,C_m)=C_m(\beta-\alpha+2\|a\|_\infty T+2)+$ $+4\sum_{n\geq 2} p_w(T,n-1)$.

Лему 5.1 доведено.

Наступна лема містить апріорну оцінку на коефіцієнт ліпшицевості по x функції $\psi_t(x)$.

Лема 5.2. *Існує стала $D=D(\|a\|_\infty,T,C_m,L)$, яка залежить лише від $\|a\|_\infty$, T, C_m, L, така, що довільний розв'язок $\{\psi_t(x),\, \nu(t),\, x\in\mathbb{R},\, t\in[0,T]\}$ рівняння* (5.1) *задовольняє співвідношення*

$$\forall t\in[0,T]\quad \forall x_1,x_2\in\mathbb{R}\colon |\psi_t(x_1)-\psi_t(x_2)|\leq D|u_1-u_2|. \tag{5.7}$$

Доведення. Оскільки $\psi_t(x)$ — розв'язок рівняння (5.1), то

$$|\psi_t(x_1)-\psi_t(x_2)|\leq|x_1-x_2|+\int\limits_0^t\big|a(\psi_s(x_1),\nu(s))-a(\psi_s(x_2),\nu(s))\big|ds\leq$$

$$\leq|x_1-x_2|+L_N\int\limits_0^t|\psi_s(x_1)-\psi_s(x_2)|ds.$$

Отже, за лемою Гронуолла – Беллмана

$$|\psi_t(x_1)-\psi_t(x_2)|\leq|x_1-x_2|e^{L_N t}\leq|x_1-x_2|e^{L_N T}.$$

Лему 5.2 доведено.

Наступна лема містить послідовність випадкових процесів, що повинні збігатися до розв'язку рівняння (5.1), і встановлює передкомпактність послідовності розподілів цих процесів.

Лема 5.3. *Нехай $\{\psi_t^n(x),\, \nu^n(t),\, w^n(t),\, t\in[0,T],\, x\in\mathbb{R}\}$ — розв'язки рівнянь*

$$\begin{aligned}
&d\psi_t^n(x)=a(\psi_t^n(x),\nu^n(t))dt+dw^n(t),\quad u\in\mathbb{R},\quad t\in[0,T],\\
&\nu^n(t)=\mathrm{E}\,m_n\circ\psi_t^n(\cdot)^{-1},\\
&\psi_0^n(x)=u,\quad u\in\mathbb{R},
\end{aligned} \tag{5.8}$$

де $m_n(dx)=1\!\!\mathrm{I}_{[-n,n]}(x)m(dx)$. Позначимо через λ_m^n розподіл звуження $\psi_t^n(x)$ на $[0,T]\times$ $\times[-m,m]$, що розглядається як випадковий елемент в $C([0,T]\times[-m,m])$. Тоді для довільного $m\in\mathbb{N}$ множина ймовірнісних мір $\{\lambda_m^n,\ n\geq 1\}$ є щільною в $C([0,T]\times[-m,m])$.

***Зауваження* 5.2.** Для доведення існування слабкого розв'язку можна побудувати послідовність наближень до розв'язку методом Пікара, довести їх слабку передкомпактність та перевірити, що довільна гранична точка задовольняє рівняння (5.8). В лемі 5.3 ми не припускаємо єдиності розв'язку рівняння (5.8).

***Зауваження* 5.3.** Не обмежуючи загальності можна вважати, що для рівняння (5.8) сталі D та N з лем 5.1 та 5.2 такі ж, як і для рівняння (5.1).

***Доведення леми* 5.3.** Для доведення передкомпактності $\{\lambda_m^n,\, n \geq 1\}$ достатньо перевірити дві умови (див. [5], теорема 8.2):

1) $\forall \varepsilon > 0\ \exists R > 0\ \forall n \geq 1\colon\ \mathrm{P}(|\psi^n(0,0)| \geq R) \leq \varepsilon$,

2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta \in (0,1)\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\colon\ \mathrm{P}(\omega_{\psi^n_\cdot(\cdot)}(\delta) \geq \varepsilon) \leq \varepsilon$, де

$$\omega_{\psi^n_\cdot(\cdot)}(\delta) = \sup_{|x_1 - x_2| \leq \delta} \sup_{|t_1 - t_2| \leq \delta} |\psi^n(x_1, t_1) - \psi^n(x_2, t_2)|$$

— модуль неперервності. З (5.1) маємо $\psi_0(0) = 0$, отже, умову 1 виконано. З леми 5.2 випливає, що

$$\begin{aligned} |\psi_{t_1}^n(x_1) - \psi_{t_2}^n(x_2)| &\leq |\psi_{t_1}^n(x_1) - \psi_{t_1}^n(x_2)| + |\psi_{t_1}^n(x_2) - \psi_{t_2}^n(x_2)| \leq \\ &\leq D|u_1 - u_2| + |w^n(t_1) - w^n(t_2)| + \|a\|_\infty |t_1 - t_2|. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Отже, умову 2 виконано.

Лему 5.3 доведено.

***Доведення теореми* 5.1.** З леми 5.3 випливає, що існує підпослідовність $\{\psi_t^{n_1(k)}(x),\, t \in \in [0,T],\, x \in [-1,1]\}_{k \geq 1}$, яка є слабко збіжною в $C([0,T] \times [-1,1])$. Аналогічно, існує підпослідовність $\{\psi_t^{n_2(k)}(x),\, t \in [0,T],\, x \in [-2,2]\}_{k \geq 1}$, яка є слабко збіжною в $C([0,T] \times [-2,2])$, і т. д. Діагональним методом виберемо підпослідовність $\{\psi_t^{n(k)}(x),\, t \in [0,T],\, x \in \mathbb{R}\}_{k \geq 1}$, яка є слабко збіжною в $C([0,T] \times [-i,i])$ для довільного $i \geq 1$, тобто $\{\psi_t^{n(k)}(x),\, t \in [0,T],\, x \in \mathbb{R}\}_{k \geq 1}$ є збіжною в топології рівномірної збіжності на компактних множинах. За теоремою Скорохода про спільний імовірнісний простір існують імовірнісний простір і випадкові елементи $\{(w^{n(k)}(t),\, \psi_t^{n(k)}(x)),\, t \in [0,T],\, x \in \mathbb{R}\}_{k \geq 1}$ на ньому такі, що ця пара випадкових елементів збігається майже напевно до $\{(w(t),\, \psi_t(x)),\, t \in [0,T],\, x \in \mathbb{R}\}$. Оскільки

$$\forall k \geq 1\colon\ \sup_{s \leq t} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi_t^{n(k)}(x) - x| \leq \|a\|_\infty t + \sup_{s \leq t} |w^{n(k)}(s)|,$$

то

$$\sup_{s \leq t} \sup_{u \in \mathbb{R}} |\psi_s(x) - x| \leq \|a\|_\infty t + \sup_{s \leq t} |w(s)|.$$

Звідси, як і при доведенні леми 5.1, для довільного $t \in [0,T]$ міра

$$\nu(t) = \mathrm{E}(m \circ \psi_t(\cdot)^{-1}) \in \mathfrak{M}_N.$$

Доведемо, що

$$\forall t \in [0,T]\colon \nu^{n(k)}(t) \to \nu(t), \quad k \to \infty,$$

у просторі $(\mathfrak{M}, \rho)$. Для цього достатньо перевірити, що

$$\forall f \in C_c(\mathbb{R})\colon\ \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) \nu^{n(k)}(t, dx) \to \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) \nu(t, dx), \quad k \to \infty.$$

Оцінимо різницю

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) \nu^{n(k)}(t, dx) - \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) \nu(t, dx) \right| =$$

$$= \mathrm{E}\left|\int_{\mathbb{R}} f(\psi_t^{n(k)}(x))m_{n(k)}(dx) - \int_{\mathbb{R}} f(\psi_t(x))m(dx)\right| =$$

$$= \mathrm{E}\left|\int_{\mathbb{R}} f(\psi_t^{n(k)}(x))1\!\!1_{|x|<n(k)}m(dx) - \int_{\mathbb{R}} f(\psi_t(x))m(dx)\right| \leq$$

$$\leq \mathrm{E}\int_{\mathbb{R}} \left|f(\psi_t^{n(k)}(x))1\!\!1_{|x|<n(k)} - f(\psi_t(x))\right|m(dx). \tag{5.10}$$

Нехай $\operatorname{supp} f \subset [-R, R]$. Тоді якщо $|x| \geq R + \|a\|_\infty T + \sup_{s\in[0,T]}|w(s)| + 1$, то існує k_0 (взагалі кажучи, випадкове) таке, що для довільного $k \geq k_0$ маємо $\psi_t^{n(k)}(x) \notin \operatorname{supp} f$, отже, $f(\psi_t^{n(k)}(x)) = 0$ і, аналогічно, $f(\psi_t(x)) = 0$. Звідси для $k \geq k_0$

$$\left|f(\psi_t^{n(k)}(x))1\!\!1_{|x|<n(k)} - f(\psi_t(x))\right| \leq 2\|f\|_\infty 1\!\!1_{|x|\leq R+\|a\|_\infty T+\sup_{s\in[0,T]}|w(s)|+1}.$$

Отже, функція

$$P(x) = 2\|f\|_\infty 1\!\!1_{|x|\leq R+\|a\|_\infty T+\sup_{s\in[0,T]}|w(s)|+1}$$

є інтегровною мажорантою і за теоремою Лебега про мажоровану збіжність

$$\xi_k := \int_{\mathbb{R}} \left|f(\psi_t^{n(k)}(x))1\!\!1_{|x|<n(k)} - f(\psi_t(x))\right|m(dx) \overset{\mathrm{P}_1}{\to} 0, \quad k \to \infty. \tag{5.11}$$

Оскільки для всіх k та майже всіх ω

$$\xi_k \leq \int_{\mathbb{R}} 2\|f\|_\infty 1\!\!1_{|x|\leq R+\|a\|_\infty T+\sup_{s\in[0,T]}|w(s)|+\sup_{s\in[0,T]}|w^{n(k)}(s)|}m(dx),$$

то $\sup_{k\geq 1}\mathrm{E}\,\xi_k^2 < \infty$. Отже, послідовність $\{\xi_k, k \geq 1\}$ є рівномірно інтегровною і

$$\mathrm{E}\int_{\mathbb{R}} \left|f(\psi_t^{n(k)}(x))1\!\!1_{|x|<n(k)} - f(\psi_t(x))\right|m(dx) = \mathrm{E}\,\xi_k \to 0, \quad k \to \infty.$$

Отже, права частина (5.10) прямує до 0 при $k \to \infty$, тобто $\nu^{n(k)}(t) \to \nu(t),\ k \to \infty$. Тепер за теоремою Лебега про мажоровану збіжність

$$\int_0^t a(\psi_t^{n(k)}(x), \nu^{n(k)}(s))ds \to \int_0^t a(\psi_t(x), \nu(s))ds, \quad k \to \infty.$$

Тому, перейшовши до границі $k \to \infty$ в рівнянні (5.8), отримаємо, що $\{\psi_t(x),\ \nu(t),\ x \in \mathbb{R},\ t \in \in [0, T]\}$ є слабким розв'язком рівняння (5.1).

Теорему 5.1 доведено.

***Доведення теореми* 5.2.** Оскільки існування слабкого розв'язку вже доведено, то достатньо довести потраєкторну єдиність розв'язку. Тоді існування та єдиність сильного розв'язку будуть випливати з теореми Ямада – Ватанабе.

Нехай $\{\varphi_t(x),\, \mu(t),\, x \in \mathbb{R},\, t \in [0,T]\}$ та $\{\psi_t(x),\, \nu(t),\, x \in \mathbb{R},\, t \in [0,T]\}$ — два розв'язки рівнянь (5.1). Віднявши відповідні рівняння (5.1) та скориставшись лемою 5.1, отримаємо

$$|\varphi_t(x) - \psi_t(x)| = \left| \int\limits_0^t \big(a(\varphi_s(x), \mu(s)) - a(\psi_s(x), \nu(s)) \big) ds \right| \leq$$

$$\leq L_N \int\limits_0^t |\varphi_s(x) - \psi_s(x)| ds + K \int\limits_0^t \rho_\infty(\mu(s), \nu(s)) ds, \tag{5.12}$$

де N — стала з леми 5.1. Оцінимо $\rho_\infty(\mu(s), \nu(s))$:

$$\rho_\infty(\mu(s), \nu(s)) = \sup_{r \in \mathbb{R}} \sup_{f \in F} \left| \int\limits_{\mathbb{R}} f(x + r)(\mu(s, dx) - \nu(s, dx)) \right| \leq$$

$$\leq \sup_{r \in \mathbb{R}} \sup_{f \in F} \mathrm{E} \int\limits_{\mathbb{R}} |f(\varphi_s(x) + r) - f(\psi_s(x) + r)| m(du).$$

З теореми Лагранжа маємо оцінку

$$|f(\varphi_s(x) + r) - f(\psi_s(x) + r)| \leq \|f'\|_\infty |\varphi_s(x) - \psi_s(x)|.$$

З того, що $\operatorname{supp} f \subset [-1, 1]$, та з (5.4) випливає, що

$$|f(\varphi_s(x) + r) - f(\psi_s(x) + r)| \leq \|f'\|_\infty |\varphi_s(x) - \psi_s(x)| 1\!\!1_{|x + r| \leq \|a\|_\infty T + \sup_{[0,T]} |w| + 1}.$$

Звідси і з означення метрики ρ_∞ маємо

$$\rho_\infty(\mu(s), \nu(s)) \leq \mathrm{E} \sup_{r \in \mathbb{R}} \int\limits_{-r - \|a\|_\infty T - \sup_{[0,T]} |w| - 1}^{-r + \|a\|_\infty T + \sup_{[0,T]} |w| + 1} |\varphi_s(x) - \psi_s(x)| m(dx) \leq$$

$$\leq \mathrm{E} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi_s(x) - \psi_s(x)| C_m \left(2\|a\|_\infty T + 2 \sup_{[0,T]} |w| + 3 \right).$$

Застосувавши нерівність Коші, отримаємо

$$\big(\rho_\infty(\mu(s), \nu(s))\big)^2 \leq C_m^2\, \mathrm{E} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi_s(x) - \psi_s(x)| \right)^2 \mathrm{E} \left(2\|a\|_\infty T + 2 \sup_{[0,T]} |w| + 3 \right)^2.$$

Позначимо $V = (CN \vee K)^2,\ C_2 = \mathrm{E}\left(2\|a\|_\infty T + 2\sup_{[0,T]} |w| + 3\right)^2$. Тепер з (5.12) випливає, що

$$\mathrm{E} \sup_{s \in [0,t]} \sup_{u \in \mathbb{R}} |\varphi_s(x) - \psi_s(x)|^2 \leq$$

$$\leq 2VT \int\limits_0^t \mathrm{E} \sup_{s_1 \in [0,s]} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi_{s_1}(x) - \psi_{s_1}(x)|^2 ds + 2VT \int\limits_0^t \sup_{s_1 \in [0,s]} \big(\rho_\infty(\mu(s_1), \nu(s_1))\big)^2 ds \leq$$

$$\leq 2VT(1 + C_2 C_m^2) \int\limits_0^t \mathrm{E} \sup_{s_1 \in [0,s]} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi_{s_1}(x) - \psi_{s_1}(x)|^2 ds.$$

Отже, за лемою Гронуолла – Беллмана

$$\forall t \in [0,T]: \ \mathrm{E} \sup_{s \in [0,t]} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi_s(x) - \psi_s(x)|^2 = 0,$$

тобто розв'язок рівняння (5.1) є потраєкторно єдиним. З теореми Ямада – Ватанабе випливає існування та єдиність сильного розв'язку.

Теорему 5.2 доведено.

6. Граничні теореми. Основними результатами даного пункту є граничні теореми про збіжність мірозначних процесів $\mu^n(\cdot)$ з рівняння (3.1) до мірозначного процесу $\nu(\cdot)$ з рівняння (5.1) та про збіжність траєкторій випадкових процесів $\{X_i^n(\cdot)\}_{n\geq 1}$.

З теорем 4.2 та 5.2 випливає таке твердження.

Теорема 6.1. *Нехай* $\{\mu^n(\cdot),\ X_i^n(\cdot),\ i \in \mathbb{Z}\}$ — *довільні розв'язки рівнянь* (3.1). *Припустимо, що*:

1) *функція* $a\colon \mathbb{R} \times \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ *є обмеженою та неперервною за сукупністю змінних*;

2) *функція* $a = a(x,\mu)$ *є неперервно диференційовною по* x, *до того ж* $\forall C > 0\ \exists L_C > 0$ $\forall \mu \in \mathfrak{M}_C\ \forall x \in \mathbb{R}\colon |a_x'(x,\mu)| \leq L_C$;

3) $\exists K > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall \mu, \nu \in \mathfrak{M}_\infty\colon |a(x,\mu) - a(x,\nu)| \leq K\rho_\infty(\mu,\nu)$;

4) $m \in \mathfrak{M}_\infty$.

Тоді послідовність мірозначних випадкових процесів $\{\mu^n(\cdot),\ n \geq 1\}$ *слабко збігається в* $C([0,T],\mathfrak{M})$ *до невипадкового мірозначного процесу* $\nu(\cdot)$, *який єдиним чином визначається з рівняння* (5.1).

***Зауваження* 6.1.** Нам невідомо чи існує єдиний сильний розв'язок рівнянь (3.1) за припущень теореми 6.1.

Доведення. Теорема 6.1 випливає з теорем 4.2, 5.2 та наступної леми.

Лема 6.1. *Припустимо, що виконано умови теореми* 6.1. *Нехай* $\mu(\cdot)$ — *довільна слабка гранична точка послідовності випадкових елементів* $\{\mu^n(\cdot),\ n \geq 1\}$ *у просторі* $C([0,T],\mathfrak{M})$. *Тоді з імовірністю* 1 *для всіх* $t \in [0,T]$ *міра* $\mu(t)$ *належить* $\mathfrak{M}_C$, *де*

$$C = C_m + 2\|a\|_\infty T + 2 \int\limits_{\beta + \|a\|_\infty T}^{\infty} p_w(T, x - \beta - \|a\|_\infty T) m(dx).$$

Тут сталу C_m *взято з рівності* (3.2).

Доведення. Зафіксуємо довільний відрізок $[\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}$.

Легко бачити, що для довільного $t \in [0,T]$

$$\mu^n(t,[\alpha,\beta]) \leq \frac{1}{n}\mu^n([\alpha - \|a\|_\infty T, \beta + \|a\|_\infty T]) +$$

$$+ \frac{1}{n} \sum_{i: u_i^n > \beta + \|a\|_\infty T} 1\!\!\mathrm{I}_{\inf_{[0,T]} w_i(t) < \beta + \|a\|_\infty T - u_i^n} + \frac{1}{n} \sum_{i: u_i^n < \alpha - \|a\|_\infty T} 1\!\!\mathrm{I}_{\sup_{[0,T]} w_i(t) > \alpha - \|a\|_\infty T - u_i^n}. \quad (6.1)$$

Оскільки μ^n є пуассонівською точковою мірою з інтенсивністю $nm(dx)$, то

$$\frac{1}{n}\mu^n([\alpha - \|a\|_\infty T, \beta + \|a\|_\infty T]) \to m([\alpha - \|a\|_\infty T, \beta + \|a\|_\infty T]).$$

Зафіксуємо довільне $B > \beta + \|a\|_\infty T$. Позначимо $I = [\beta + \|a\|_\infty T, B]$,

$$\rho(dx) = \frac{1}{m(I)} 1\!\!\mathrm{I}_I(x) m(dx).$$

Нехай $\{u_i, i \geq 1\}$ — незалежні, однаково розподілені випадкові величини з розподілом ρ, а $N(\cdot)$ — пуассонівський процес з інтенсивністю 1, незалежний від $\{u_i, i \geq 1\}$ та $w(\cdot)$. Тоді [13] (теорема 2.1.16)

$$S_n(I) := \frac{1}{n} \sum_{i: u_i^n \in I} 1\!\!\mathrm{I}_{\inf_{[0,T]} w_i(t) < \beta + \|a\|_\infty T - u_i^n} \stackrel{d}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N(nm(I))} 1\!\!\mathrm{I}_{\inf_{[0,T]} w_i(t) < \beta + \|a\|_\infty T - u_i}.$$

Отже (див. [13], § 3.1.1),

$$\mathrm{E}\, S_n(I) = \mathrm{E}\, N(nm(I))\ E\frac{1}{n} 1\!\!\mathrm{I}_{\inf_{[0,T]} w_1(t) < \beta + \|a\|_\infty T - u_1} =$$

$$= \int\limits_{\beta + \|a\|_\infty T}^{B} p_w(T, x - \beta - \|a\|_\infty T) m(dx) \to$$

$$\to \int\limits_{\beta + \|a\|_\infty T}^{\infty} p_w(T, x - \beta - \|a\|_\infty T) m(dx), \quad B \to \infty.$$

Оцінимо дисперсію, скориставшись результатами [13] (§ 3.1.1):

$$\mathrm{D}\, S_n(I) = \mathrm{E}\, N(nm(I))\, \mathrm{D}\, \frac{1}{n} 1\!\!\mathrm{I}_{\inf_{[0,T]} w_1(t) < \beta + \|a\|_\infty T - u_1} +$$

$$+ \mathrm{D}\, M(nm(I)) \left(\mathrm{E}\, \frac{1}{n} 1\!\!\mathrm{I}_{\inf_{[0,T]} w_1(t) < \beta + \|a\|_\infty T - u_1} \right)^2 =$$

$$= nm(I)\, \mathrm{E} \left(\frac{1}{n} 1\!\!\mathrm{I}_{\inf_{[0,T]} w_1(t) < \beta + \|a\|_\infty T - u_1} \right)^2 =$$

$$= \frac{m(I)}{n} \int\limits_{\beta + \|a\|_\infty T}^{B} p_w(T, x - \beta - \|a\|_\infty T) m(dx) \to$$

$$\to \frac{m(I)}{n} \int\limits_{\beta + \|a\|_\infty T}^{+\infty} p_w(T, x - \beta - \|a\|_\infty T) m(dx), \quad B \to +\infty.$$

Отже, для довільного $n \geq 1$

$$\mathrm{E}\, \frac{1}{n} \sum_{i: u_i^n > \beta + \|a\|_\infty T} 1\!\!\mathrm{I}_{\inf_{[0,T]} w_i(t) < \beta + \|a\|_\infty T - u_i^n} = \int\limits_{\beta + \|a\|_\infty T}^{\infty} p_w(T, x - \beta - \|a\|_\infty T) m(dx)$$

і

$$\mathrm{D}\int\limits_{\beta+\|a\|_\infty T}^{\infty} p_w(T, x-\beta-\|a\|_\infty T)m(dx)\to 0, \quad n\to\infty.$$

Аналогічні співвідношення мають місце і для другої суми у правій частині рівності (6.1). Тому якщо $\mu(\cdot)$ є слабкою граничною точкою послідовності $\mu^n(\cdot)$, то

$$\mu(t,[\alpha,\beta]) \le m([\alpha-\|a\|_\infty T, \beta+\|a\|_\infty T]) + 2\int\limits_{\beta+\|a\|_\infty T}^{\infty} p_w(T, x-\beta-\|a\|_\infty T)m(dx).$$

Лему 6.1 доведено.

Для теореми про збіжність траєкторій окремих частинок потрібні будуть деякі додаткові умови.

Нехай $\left\{\mu_i = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \delta_{u_{i,j}}\right\}$ — незалежні пуассонівські точкові міри з інтенсивністю m. Покладемо $\mu^n = \sum_{i=1}^n \mu_i$. Тоді μ^n є пуассонівською точковою мірою з інтенсивністю $nm(dx)$. Нехай $\{w_{i,j}(\cdot),\, i\in\mathbb{N},\, j\in\mathbb{Z}\}$ — незалежні вінерівські процеси, до того ж $\{w_{i,j}(\cdot),\, i\in\mathbb{N},\, j\in\mathbb{Z}\}$ незалежні від $\{\mu_i,\, i\ge 1\}$. Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{aligned} &dX^n_{i,j}(t) = a(X^n_{i,j}(t),\, \mu^n(t))dt + dw_{i,j}(t), \quad t\in[0,T], \quad i=\overline{1,n}, \quad j\in\mathbb{Z}, \\ &\mu^n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\sum_{j\in\mathbb{Z}} \delta_{X^n_{i,j}(t)}, \quad t\in[0,T], \\ &X^n_{i,j}(0) = u_{i,j}, \quad i=\overline{1,n}, \quad j\in\mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Зазначимо, що розв'язок $\mu^n(\cdot)$ рівняння (6.2) має такий же розподіл, як $\mu^n(\cdot)$ з рівняння (3.1), якщо має місце єдиність розв'язків рівнянь (6.2) та (3.1). Існування та єдиність сильного розв'язку рівняння (6.2) дає, наприклад, така теорема (див. [9]).

Теорема 6.2. *Припустимо, що*:

1) $m\in\mathfrak{M}_\infty$;

2) *функція* a *обмежена та неперервна за сукупністю змінних*;

3) *функція* a *має властивість скінченності радіуса взаємодії*:

$$\exists d>0 \quad \forall x\in\mathbb{R} \quad \forall \nu\in\mathfrak{M}\colon a(x,\nu) = a(x, \nu I_{(x-d,x+d)}).$$

Тоді існує єдиний сильний розв'язок рівняння (6.2).

Наступна теорема дає достатні умови збіжності траєкторій окремих частинок.

Теорема 6.3. *Припустимо, що виконано умови теореми* 6.1 *та для довільного* $n\ge 1$ *існує єдиний сильний розв'язок рівняння* (6.2). *Тоді*:

1) $\mu^n(\cdot) \xrightarrow{\mathrm{P}} \mu(\cdot)$, $n\to\infty$, *в* $C([0,T],(\mathfrak{M},\rho))$;

2) $\lim_{n\to\infty}\sup_{0\le t\le T} \mathrm{E}(X^n_{i,j}(t) - \psi_{i,j}(u_{i,j},t))^2 = 0$, *де* $\psi_{i,j}(\cdot,\cdot)$ — *розв'язок рівняння*

$$\begin{aligned} &d\psi_{i,j}(x,t) = a(\psi_{i,j}(x,t),\mu(t))dt + dw_{i,j}(t), \quad x\in\mathbb{R}, \quad t\in[0,T], \\ &\mu(t) = \mathrm{E}\, m\circ\psi_{i,j}(\cdot,t)^{-1}, \\ &\psi_{i,j}(x,0) = x, \quad x\in\mathbb{R}. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Доведення. Оскільки мірозначний процес $\mu(\cdot)$ є детермінованим, то із слабкої збіжності випливає збіжність за ймовірністю, тобто $\mu^n(\cdot) \xrightarrow{\mathrm{P}} \mu(\cdot),\ n \to \infty$, як випадкові елементи в $C([0,T],\mathfrak{M})$. Випадковий процес $X^n_{i,j}(\cdot)$ задовольняє рівність

$$X^n_{i,j}(t) = u_{i,j} + \int\limits_0^t a(X^n_{i,j}(s), \mu^n(s))ds + w_{i,j}(t),$$

а $\psi_{i,j}(u_{i,j},\cdot)$ — рівність

$$\psi_{i,j}(t) = u_{i,j} + \int\limits_0^t a(\psi_{i,j}(s), \mu(s))ds + w_{i,j}(t).$$

Отже, друга частина теореми випливає з теореми 2.8.2 [8].

Теорему 6.3 доведено.

***Приклад* 6.1.** Нехай

$$a(x,\mu) = g_1\left(\int\limits_{\mathbb{R}} g_2(y-x)\mu(dy)\right),$$

до того ж

1) функція g_1 належить $C^1(\mathbb{R})$, функції $g_1,\ g_1'$ є обмеженими,

2) функція g_2 належить $C^1_c(\mathbb{R})$.

Для такої функції a виконано всі припущення теорем 6.1 та 6.2.

Перевіримо, що виконується умова 2 теореми 6.1. Позначимо

$$C = \sup_{x\in\mathbb{R}} |g_2(x)| \vee |g_2'(x)| \vee |g_2''(x)|.$$

Здиференціювавши інтеграл за параметром, отримаємо

$$a_x'(x,\mu) = \left(g_1\left(\int\limits_{\mathbb{R}} g_2(y-x)\mu(dy)\right)\right)_x' = -g_1'\left(\int\limits_{\mathbb{R}} g_2(y-x)\mu(dy)\right)\int\limits_{\mathbb{R}} g_2'(y-x)\mu(dy).$$

Звідси

$$|a_x'(x,\mu)| \le \|g_1'\|_\infty \|g_2'\|_\infty \mu(\operatorname{supp} g_2).$$

Отже, умову 2 теореми 6.1 виконано.

Перевіримо, що виконується умова 3 теореми 6.1. Оцінимо

$$|a(x,\mu_1) - a(x,\mu_2)| = \left| g_1\left(\int\limits_{\mathbb{R}} g_2(y-x)\mu_1(dy)\right) - g_1\left(\int\limits_{\mathbb{R}} g_2(y-x)\mu_2(dy)\right)\right| =$$

$$= |g_1'(\theta)| \left|\int\limits_{\mathbb{R}} g_2(y-x)(\mu_1(dy) - \mu_2(dy))\right|. \qquad (6.4)$$

Нехай $\{h_i,\ 1\le i\le n\} \subset C^1_c(\mathbb{R},[0,1])$ — такі функції, що

$$\forall y \in \operatorname{supp} g_2 : \ \sum_{i=1}^{n} h_i(y) = 1, \tag{6.5}$$

та

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad \exists u \in \mathbb{R} : \ \operatorname{supp} h_i \subset [u, u+2].$$

Позначимо $H = \max\{\|h_i\|_\infty, \ \|h_i'\|_\infty, \ 1 \leq i \leq n\}$. Тоді з (6.4) і (6.5) випливає, що

$$|a(x, \mu_1) - a(x, \mu_2)| \leq \|g_1'\|_\infty \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{\mathbb{R}} g_2(y - x) h_i(y)(\mu_1(dy) - \mu_2(dy)) \right|.$$

Легко бачити, що для довільного i

$$|g_2(x - y) h_i(y)| \leq CH, \qquad \left| \big(g_2(x - y) h_i(y)\big)_y' \right| \leq 2CH.$$

Тепер з означення $\rho_\infty(\mu_1, \mu_2)$ випливає, що

$$\forall \ i \in \{1, \ldots, n\} : \ \left| \int_{\mathbb{R}} g_2(y - x) h_i(y)(\mu_1(dy) - \mu_2(dy)) \right| \leq 2CH \rho_\infty(\mu_1, \mu_2).$$

Отже,

$$|a(x, \mu_1) - a(x, \mu_2)| \leq 2nCH \|g_1\|_\infty \rho_\infty(\mu_1, \mu_2).$$

Безпосередньо з означення функції $a(\cdot, \cdot)$ випливає, що виконано й інші припущення теорем 6.1 та 6.2.

Література

1. *Veretennikov A. Yu.* On strong solutions and explicit formulas for solutions of stochastic integral equations // Mat. Sb. – 1980. – **111(153)**, № 3. – P. 434 – 452.
2. *Скороход А. В.* Исследования по теории случайных процессов. – Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1961.
3. *Ethier S. N., Kurtz T. G.* Markov processes: characterization and convergence // Wiley Ser. Probab. and Math. Statistics. – 2005.
4. *Ватанабэ С., Икэда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. – М.: Наука, 1986.
5. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. – М., 1977. – 352 с.
6. *Kunita H.* Stochastic flows and stochastic differential equations. – Cambridge Univ. Press, 1997. – Vol. 24.
7. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967.
8. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. – Киев: Наук. думка, 1968.
9. *Pilipenko A., Tantsiura M.* On the strong existence and uniqueness to a solution of a countable system of SDEs with measurable drift // Theory Stochast. Process. – 2014. – **19(35)**, № 2. – P. 52 – 63.
10. *Dawson D.* Measure-valued markov processes // Ecole d'Ete de Probabilites de Saint-Flour XXI-1991: Lect. Notes Math. – Berlin: Springer, 1993. – **1541**. – P. 1 – 260.
11. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968.
12. *McKean H. P.* A class of Markov processes associated with nonlinear parabolic equations // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1966. – **56**. – P. 1907 – 1911.
13. *Mikosch Th.* Non-life insurance mathematics: an introduction with the Poisson process. – Springer Sci. & Business Media, 2009.
14. *Gatner J.* On the McKean – Vlasov limit for interacting diffusions // Math. Nachr. – 1988. – **137**. – P. 197 – 248.
15. *Sznitman A. S.* Topics in propagation of chaos // Ecole d'Ete de Probabilites de Saint-Flour XIX-1989: Lect. Notes Math. – Berlin: Springer, 1991. – **1464**. – P. 165 – 251.

Одержано 12.04.16