УДК 517.9

А. В. Дворник, В. І. Ткаченко (Ін-т математики НАН України, Київ)

МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ ТА НЕФІКСОВАНИМИ МОМЕНТАМИ ІМПУЛЬСНОЇ ДІЇ

We study the existence and asymptotic stability of piecewise continuous almost periodic solutions for systems of differential equations with delay and nonfixed times of impulsive action that can be regarded as mathematical models of neural networks.

Установлены условия существования и асимптотической устойчивости кусочно-непрерывных почти периодических решений систем дифференциальных уравнений с запаздыванием и нефиксированными моментами импульсного воздействия, которые могут рассматриваться как математические модели нейронных сетей.

1. Вступ. Розглянемо систему диференціальних рівнянь із запізненням та нефіксованими моментами імпульсної дії

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)f(x(t)) +$$
$$+ C(t)g(x(t-h)) + \gamma(t), \qquad t \neq \tau_k(x(t)), \tag{1}$$

$$x(t+0) - x(t) = D_k x(t) + I_k(x(t)) + g_k, \qquad t = \tau_k(x(t)), \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $h = \mathrm{const} > 0$, $A(t) = \{a_{ij}(t)\}$, $B(t) = \{b_{ij}(t)\}$ і $C(t) = \{c_{ij}(t)\}$ — матричнозначні функції $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, f і g — функції $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Імпульсна дія відбувається при досягненні розв'язками поверхонь $\Gamma_k = \{(t,x) \colon t = \tau_k(x)\}, k \in \mathbb{Z}$, які рівномірно відокремлені одна від іншої.

Останнім часом з'явилося багато робіт, присвячених вивченню майже періодичних систем з імпульсною дією у фіксовані моменти часу (див., наприклад, [1 – 7]).

Ми використовуємо означення кусково-неперервних майже періодичних функцій у сенсі робіт [3, 8]. Точки розривів цих функцій збігаються з точками імпульсної дії $\{\tau_k(x)\}$. Оскільки моменти імпульсної дії системи (1), (2) залежать від розв'язків, різні розв'язки мають різні моменти розривів. Також у системах з нефіксованими моментами імпульсної дії може виникати так званий феномен биття, тобто розв'язок може перетинати поверхню $t = \tau_k(x)$ кілька разів чи навіть нескінченну кількість разів [3, 9].

У роботах [10, 11] для вивчення існування та стійкості майже періодичних розв'язків звичайних диференціальних рівнянь з нефіксованими моментами імпульсної дії застосовується метод зведення до системи з фіксованими моментами імпульсної дії. Оскільки розв'язки рівнянь із запізненням не завжди однозначно продовжуються вліво, метод зведення не застосовується до систем із запізненням та нефіксованими моментами імпульсної дії.

Використавши підхід роботи [12] (див. також [13]), ми побудуємо деяке відображення у просторі майже періодичних послідовностей зі значеннями в $\mathbb{R}^n$. Нерухома точка цього відображення відповідає майже періодичному розв'язку імпульсної системи (1), (2).

Означення стійкості для рівнянь з нефіксованими моментами імпульсної дії враховує відмінність точок розриву різних розв'язків рівняння. Ми використовуємо адаптоване до рівнянь із запізненням означення з робіт [14, 15].

До систем вигляду (1), (2) належать системи, які описують математичні моделі нейронних мереж із запізненням та нефіксованими моментами імпульсної дії:

$$\dot{x}_i(t) = -a_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^{n}\Big\{b_{ij}(t)f_j(x_j(t)) +$$

$$+c_{ij}(t)g_j(x_j(t-h))\Big\} + \gamma_i(t),\ t \neq \tau_k(x(t)),$$

$$x_i(t+0) - x_i(t) = \sum_{j=0}^{n} d_{ij(k)}x_j(t) + I_{ik}(x(t)) + g_{ik},\ t = \tau_k(x(t)).$$

Тут $x = (x_1, \ldots, x_n)$, функція $x_i(t)$ відповідає стану i-го нейрона в момент часу t, $a_i(t) > 0$ — коефіцієнт саморегуляції i-го нейрона, невід'ємні функції $b_{ij}(t)$ та $c_{ij}(t)$ визначають ступінь зв'язку між i- та j-м елементами в момент часу t, зовнішні впливи на i-й елемент визначено функцією $\gamma_i(t)$.

Скалярна функція $f_j(x_j(t))$ означає активацію j-го елемента в момент часу t, скалярна функція $g_j(x_j(t-h))$ — активацію, що залежить від дії з запізненням на стан x_j.

Зауважимо, що майже періодичні розв'язки моделей нейронних мереж із фіксованими моментами імпульсної дії вивчалися в роботах [16 – 19].

2. Основні означення та попередні результати. Нехай $(X, \|.\|_X)$ — банахів простір із нормою $\|.\|_X$, $\mathbb{R}$ та $\mathbb{Z}$ — множини дійсних та цілих чисел відповідно. Позначимо через $\|.\|$ норму в $\mathbb{R}^n$ чи відповідну норму у просторі матриць. Будемо розглядати простір $\mathcal{PC}(J, X)$, $J \subset \mathbb{R}$, усіх обмежених кусково-неперервних функцій $x\colon J \to X$ таких, що:

i) множина $\{\tau_j \in J : \tau_{j+1} > \tau_j,\ j \in \mathbb{Z}\}$ моментів розривів x не має скінченних граничних точок;

ii) $x(t)$ є неперервною зліва: $x(\tau_j - 0) = x(\tau_j)$ та існує $\lim_{t\to\tau_j+0} x(t) = x(\tau_j + 0)$.

Будемо використовувати норму $\|x\|_{PC} = \sup_{t\in J}\|x(t)\|_X$ у просторі $\mathcal{PC}(J, X)$.

Означення 1. *Ціле число p називається ε-майже періодом послідовності $\{x_k\}$, $x_k \in X$, якщо $\|x_{k+p} - x_k\|_X < \varepsilon$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$. Послідовність $\{x_k\}$ називається майже періодичною, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує відносно щільна множина її ε-майже періодів.*

Множина $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ відносно щільна, якщо існує таке додатне число l, що кожний відрізок дійсної осі довжини l містить принаймні одне число, яке належить $\mathcal{A}$.

Означення 2. *Строго зростаюча послідовність $\{\tau_k\}$ дійсних чисел має рівномірно майже періодичні послідовності різниць, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує відносно щільна множина ε-майже періодів, спільних для всіх послідовностей $\{\tau_k^j\}$, де $\tau_k^j = \tau_{k+j} - \tau_k$, $j \in \mathbb{Z}$.*

Як показано у [20], послідовність $\{\tau_k\}$ має рівномірно майже періодичні послідовності різниць тоді і тільки тоді, коли $\tau_k = ak + c_k$, де $\{c_k\}$ — майже періодична послідовність, a — додатне число.

Означення 3. *Функція $\varphi \in \mathcal{PC}(\mathbb{R}, X)$ називається W-майже періодичною, якщо*:

i) *строго зростаюча послідовність $\{\tau_k\}$ моментів розриву функції $\varphi(t)$ має рівномірно майже періодичні послідовності різниць*;

ii) *для довільного $\varepsilon > 0$ існує додатне число $\delta = \delta(\varepsilon)$ таке, що якщо точки t' і t'' належать одному інтервалу неперервності і $|t' - t''| < \delta$, то $\|\varphi(t') - \varphi(t'')\|_X < \varepsilon$;*

iii) *для довільного* $\varepsilon > 0$ *існує відносно щільна множина* Γ ε*-майже періодів таких, що якщо* $\tau \in \Gamma$, *то* $\|\varphi(t+\tau) - \varphi(t)\|_X < \varepsilon$ *для всіх* $t \in \mathbb{R}$, *які задовольняють умову* $|t - \tau_k| \geq \varepsilon$, $k \in \mathbb{Z}$.

Нагадаємо, що неперервна функція $\psi \colon \mathbb{R} \to X$ майже періодична за Бором, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує відносно щільна множина Γ ε-майже періодів таких, що якщо $\tau \in \Gamma$, то $\|\psi(t+\tau) - \psi(t)\|_X < \varepsilon$ для всіх $t \in \mathbb{R}$.

Будемо використовувати таку лему з [12], яка є узагальненням леми 7 з [8, с. 288].

Лема 1. *Нехай строго зростаюча послідовність дійсних чисел* $\{\tau_j\}$ *має рівномірно майже періодичні послідовності різниць, послідовність* $\{B_j\}, B_j \in X$, *є майже періодичною і функція* $\varphi(t) \colon \mathbb{R} \to X$ *є* W*-майже періодичною. Тоді для довільного* $\varepsilon > 0$ *існує таке* $l = l(\varepsilon) > 0$, *що для довільного інтервалу* J *довжини* l *існують таке* $r \in J$ *і ціле* $q \in J$, *що виконуються нерівності*

$$|\tau_{i+q} - \tau_i - r| < \varepsilon, \qquad \|B_{i+q} - B_i\|_X < \varepsilon, \quad i \in \mathbb{Z},$$

і

$$\|\varphi(t+r) - \varphi(t)\|_X < \varepsilon, \quad t \in \mathbb{R}, \qquad |t - \tau_j| > \varepsilon, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Будемо розглядати систему (1), (2) з такими умовами:

(H_1) Матричнозначні функції $A(t), B(t)$ і $C(t)$ та векторнозначна функція $\gamma(t)$ майже періодичні за Бором. Будемо позначати $\sup_t \|A(t)\| = A_0$, $\sup_t \|B(t)\| = B_0$, $\sup_t \|C(t)\| = C_0$, $\sup_t \|\gamma(t)\| = \gamma_0$.

(H_2) Позначимо $U_\rho = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| \leq \rho\}$, де ρ — деяке додатне число. Припустимо, що послідовність $\{\tau_k\}$ неперервних функцій $\tau_k \colon U_\rho \to \mathbb{R}$ має рівномірно майже періодичні послідовності різниць рівномірно відносно $x \in U_\rho$ і існує $\theta > 0$ таке, що $\inf_x \tau_{k+1}(x) - \sup_x \tau_k(x) \geq \theta$ для всіх $x \in U_\rho$ і $k \in \mathbb{Z}$.

(H_3) Послідовності $(n \times n)$-матриць $\{D_j\}$ та векторів $\{g_j\}$ є майже періодичними, $\sup_j \|g_j\| = g_*$.

(H_4) Послідовність $\{I_j(x)\}$ вектор-функцій $U_\rho \to \mathbb{R}^n$ є майже періодичною рівномірно відносно $x \in U_\rho$.

Означення 4. *Функція* $x(t) \in \mathcal{PC}([t_0 - h, t_0 + \alpha], \mathbb{R}^n)$, *де* $\alpha > 0$, *є розв'язком системи* (1), (2), *якщо виконуються такі умови*:

(i) *множина*

$$T = \{t \in [t_0, t_0 + \alpha],\ t = \tau_k(x(t)) \text{ для деякого } k\}$$

точок імпульсної дії скінченна (*можливо, порожня*);

(ii) $x(t)$ *неперервна при всіх* $t \in (t_0, t_0 + \alpha] \setminus T$;

(iii) $x(t)$ *неперервно диференційовна при всіх* $t \in (t_0, t_0 + \alpha] \setminus T$, *за винятком скінченної множини точок;*

(iv) *похідна зліва функції* $x(t)$ *існує і задовольняє систему* (1) *для всіх* $t \in (t_0, t_0 + \alpha] \setminus T$;

(v) *для* $t \in T$ *функція* $x(t)$ *задовольняє умову* (2).

Якщо додатково функція $x(t)$ *задовольняє умову*

$$x(t_0 + \theta) = \varphi(\theta), \quad \theta \in [-h, 0], \qquad \varphi \in \mathcal{PC}([-h, 0], \mathbb{R}^n), \tag{3}$$

то вона є розв'язком початкової задачі (1)–(3).

Функція $x(t)$ є розв'язком системи (1), (2) на нескінченному інтервалі, якщо вона є розв'язком на кожному обмеженому підінтервалі.

Припускаємо, що розв'язки системи (1), (2) неперервні зліва.

Також припускаємо, що у множині U_ρ розв'язки системи (1), (2) не мають биття з поверхнями $t = \tau_j(x)$, іншими словами, розв'язки перетинають кожну поверхню не більше одного разу. Достатні умови відсутності биття наведено у [21].

Означення 5. *Розв'язок $x_0(t)$ системи* (1), (2), *який при всіх $t \geq t_0 - h$ належить U_ρ і $\tau_j(x_0(t_0)) \neq t_0, j \in \mathbb{Z}$, називається стійким за Ляпуновим, якщо для довільних $\varepsilon > 0$ і $\eta > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon, \eta)$ таке, що для довільного іншого розв'язку $x(t)$ з початковими значеннями з U_ρ і*

$$\|x_0(\theta) - x(\theta)\| < \delta, \qquad \theta \in [t_0 - h, t_0], \qquad |\theta - \tau_j^0| > \delta,$$

виконується $\|x_0(t) - x(t)\| < \varepsilon$ для всіх $t \geq t_0$ таких, що $|t - \tau_j^0| > \eta$, де τ_j^0 — моменти часу, при яких розв'язок $x_0(t)$ перетинає поверхні $t = \tau_j(x)$, $j \in \mathbb{Z}$.

Розв'язок $x_0(t)$ називається асимптотично стійким, якщо він стійкий і існує $\delta_0 > 0$ таке, що для кожних $\varepsilon > 0, \eta > 0$ існує $T = T(\varepsilon, \eta) > 0$ таке, що для будь-якого іншого розв'язку $x(t)$ системи з початковими значеннями з U_ρ і

$$\|x_0(\theta) - x(\theta)\| < \delta_0, \qquad \theta \in [t_0 - h, t_0], \qquad |\theta - \tau_j^0| > \delta_0,$$

виконується $\|x_0(t) - x(t)\| < \varepsilon$ для $t \geq t_0 + T$ і $|t - \tau_j^0| > \eta$.

Поряд із системою (1), (2) розглянемо лінійну однорідну систему

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad t \neq \tau_j, \tag{4}$$

$$x(\tau_j + 0) - x(\tau_j) = D_j x(\tau_j), \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{5}$$

де $\tau_j = \tau_j(0)$. Позначимо через $X(t, s)$ фундаментальний розв'язок лінійної системи без імпульсів (4). Він задовольняє співвідношення $X(\tau, \tau) = I$, $X(t, s)X(s, \tau) = X(t, \tau)$, $t, s, \tau \in \mathbb{R}$.

Означимо еволюційний оператор для системи (4), (5) як

$$U(t, s) = X(t, s), \quad \text{якщо} \quad \tau_k < s \leq t \leq \tau_{k+1},$$

та

$$U(t, s) = X(t, \tau_k)(I + D_k)X(\tau_k, \tau_{k-1}) \ldots (I + D_m)X(\tau_m, s), \tag{6}$$

якщо $\tau_{m-1} < s \leq \tau_m < \tau_{m+1} < \ldots < \tau_k < t \leq \tau_{k+1}$.

Означення 6. *Система* (4), (5) *називається експоненціально стійкою з показником $\beta > 0$ та коефіцієнтом $M \geq 1$, якщо*

$$\|U(t, s)\| \leq M e^{-\beta(t-s)}, \quad t \geq s.$$

Лема 2. *Нехай імпульсна система* (4), (5) *є експоненціально стійкою з додатними сталими β та M. Тоді існує $\delta_0 > 0$ таке, що збурена система*

$$\frac{du}{dt} = \tilde{A}(t)u, \quad t \neq \tilde{\tau}_j, \tag{7}$$

$$\Delta u|_{t=\tilde{\tau}_j} = u(\tilde{\tau}_j + 0) - u(\tilde{\tau}_j) = \tilde{D}_j u(\tilde{\tau}_j), \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{8}$$

при

$$\max\left\{\sup_j|\tau_j-\tilde\tau_j|,\ \sup_j\|D_j-\tilde D_j\|,\ \sup_t\|A(t)-\tilde A(t)\|\right\}=\delta_1\le\delta_0$$

є також експоненціально стійкою з деякими сталими $\beta_1\le\beta$ та $M_1\ge M$, а саме еволюційний оператор $\tilde U(t,s)$ збуреної системи (7), (8) *задовольняє нерівність*

$$\|\tilde U(t,s)\|\le M_1e^{-\beta_1(t-s)},\quad t\ge s.$$

Доведення. Позначимо $\mathcal{J}=\cup_j(\max(\tau_{j-1},\tilde\tau_{j-1}),\min(\tau_j,\tilde\tau_j)]$. Запишемо систему (7), (8) у вигляді

$$\frac{du}{dt}=A(t)u+(\tilde A(t)-A(t))u,\quad t\ne\tau_j,\quad t\ne\tilde\tau_j,$$
$$u(\tau_j+0)=(I+D_j)u(\tau_j)-D_ju(\tau_j),$$
$$u(\tilde\tau_j+0)=(I+\tilde D_j)u(\tilde\tau_j),\quad j\in\mathbb{Z}.$$

За методом варіації довільної сталої

$$u(t)=U(t,t_0)u_0+\int\limits_{t_0}^{t}U(t,s)(\tilde A(s)-A(s))u(s)ds+$$
$$+\sum_{t_0<\tilde\tau_j<t}U(t,\tilde\tau_j+0)\tilde D_ju(\tilde\tau_j)-\sum_{t_0<\tau_j<t}U(t,\tau_j+0)D_ju(\tau_j). \tag{9}$$

Зауважимо, що $U(t,\tilde\tau_j+0)=U(t,\tilde\tau_j)$ та $u(\tau_j)=u(\tau_j+0)$. Припустимо, що $\tilde\tau_j\ge\tau_j$, і перетворимо різницю

$$U(t,\tilde\tau_j+0)\tilde D_ju(\tilde\tau_j)-U(t,\tau_j+0)D_ju(\tau_j)=$$
$$=U(t,\tilde\tau_j)\left(\tilde D_j\tilde X(\tilde\tau_j,\tau_j)-X(\tilde\tau_j,\tau_j)D_j\right)u(\tau_j)=$$
$$=U(t,\tilde\tau_j)\left(\tilde D_j(\tilde X(\tilde\tau_j,\tau_j)-I)-(X(\tilde\tau_j,\tau_j)-I)D_j\right)u(\tau_j)+U(t,\tilde\tau_j)(\tilde D_j-D_j)u(\tau_j),$$

де $\tilde X(t,\tau)$ — фундаментальний розв'язок системи без імпульсів (7). Аналогічно, якщо $\tilde\tau_j<\tau_j$, то

$$U(t,\tilde\tau_j+0)\tilde D_ju(\tilde\tau_j)-U(t,\tau_j+0)D_ju(\tau_j)=$$
$$=U(t,\tau_j+0)\left((D_j+I)X(\tau_j,\tilde\tau_j)\tilde D_j-D_j\tilde X(\tau_j,\tilde\tau_j)(I+\tilde D_j)\right)u(\tilde\tau_j)=$$
$$=U(t,\tau_j+0)\left((I+D_j)(X(\tau_j,\tilde\tau_j)-I)\tilde D_j-D_j(\tilde X(\tau_j,\tilde\tau_j)-I)(I+\tilde D_j)\right)u(\tilde\tau_j)+$$
$$+U(t,\tau_j+0)(\tilde D_j-D_j)u(\tilde\tau_j).$$

Позначимо $D=\max\left(\sup_j\|D_j\|,\sup_j\|\tilde D_j\|\right)$, $A=\max\left(\sup_t\|A(t)\|,\sup_t\|\tilde A(t)\|\right)$, $\tau'_j=$ $=\min\{\tilde\tau_j,\tau_j\}$ та $\tau''_j=\max\{\tilde\tau_j,\tau_j\}$, тоді

$$\|U(t,\tilde{\tau}_j+0)\tilde{D}_j u(\tilde{\tau}_j)-U(t,\tau_j+0)D_j u(\tau_j)\|\leq Me^{-\beta(t-\tau_j')}M_*\delta_1\|u(\tau_j')\|, \tag{10}$$

де $M_*=\left(1+2AD(D+1)e^{A\delta_0}\right)e^{\beta\delta_0}$. Ми скористались оцінкою

$$\|(X(t,t_0)-I)u\|=\left\|\int\limits_{t_0}^{t}\frac{d}{ds}X(s,t_0)uds\right\|=$$

$$=\left\|\int\limits_{t_0}^{t}A(s)X(s,t_0)uds\right\|\leq A(t-t_0)e^{A(t-t_0)}\|u\|.$$

З (9) та (10) для $t,\ t_0\in\mathcal{J}$ маємо

$$\|u(t)\|\leq Me^{-\beta(t-t_0)}\|u_0\|+\int\limits_{t_0}^{t}Me^{-\beta(t-s)}\|\tilde{A}(s)-A(s)\|\|u(s)\|ds+$$

$$+\sum_{t_0<\tau_j'<t}Me^{-\beta(t-\tau_j')}M_*\delta_1\|u(\tau_j')\|.$$

Тоді $v(t)=e^{\beta t}\|u(t)\|$ задовольняє нерівність

$$v(t)\leq Mv(t_0)+\int\limits_{t_0}^{t}M\delta_1 v(s)ds+\sum_{t_0<\tau_j'<t}MM_*\delta_1 v(\tau_j').$$

За узагальненою нерівністю Гронуолла (див. [3, с. 12]) маємо

$$\|u(t)\|\leq M\left(1+MM_*\delta_0\right)^{([(t-t_0)/\theta]+1)}e^{-(\beta-M\delta_0)(t-t_0)}\|u_0\|,\quad t,t_0\in\mathcal{J}.$$

Отже, якщо $\delta_0>0$ і $\beta_1>0$ задовольняють нерівність

$$\beta-M\delta_0-\frac{1}{\theta}\ln\left(1+MM_*\delta_0\right)\geq\beta_1,$$

то

$$\|u(t)\|\leq M(1+MM_*\delta_0)e^{-\beta_1(t-s)},\quad t,t_0\in\mathcal{J}.$$

Якщо $t\in(\tau_j',\tau_j'']$, то

$$\|u(t)\|\leq\|\tilde{X}(t,\tau_j')\|(1+D)\|u(\tau_j')\|\leq e^{A\delta_0}(1+D)\|u(\tau_j')\|.$$

Аналогічно, якщо $t_0\in(\tau_j',\tau_j'']$, то $\|u(\tau_j''+0)\|\leq e^{A\delta_0}(1+D)\|u(t_0)\|$.

Комбінуючи останні нерівності, отримуємо експоненціальну стійкість збуреної системи (7), (8) з показником β_1 та коефіцієнтом $M_1=M(1+MM_*\delta_0)(1+D)^2e^{2(A+\beta_1)\delta_0}$.

Лему 2 доведено.

***Наслідок* 1.** *При виконанні умов леми 2 існують $\beta_2\in(0,\beta_1)$ і $M_2\geq M_1$ такі, що*

$$\|U(t,s)-\tilde{U}(t,s)\|\leq\delta_1 M_2 e^{-\beta_2(t-s)},\quad t\geq s, \tag{11}$$

для $t,\ s\in\cup_j(\max(\tau_{j-1},\tilde{\tau}_{j-1}),\min(\tau_j,\tilde{\tau}_j)]$.

Доведення. З (9) отримуємо

$$\|(U(t,t_0)-\tilde U(t,t_0))u_0\| \le \delta_1 M M_1 \|u_0\| \left(\int\limits_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)} e^{-\beta_1(s-t_0)} ds + \right.$$

$$\left. + \sum_{t_0<\tau_j'<t} M_* e^{-\beta(t-\tau_j')} e^{-\beta_1(\tau_j'-t_0)} \right) \le$$

$$\le \delta_1 M M_1 \|u_0\| e^{-\beta_1(t-t_0)} \left(t - t_0 + \frac{t-t_0}{\theta} M_* + M_* \right) \le \delta_1 M_2 e^{-\beta_2(t-t_0)}.$$

3. Основні результати.

Теорема 1. *Припустимо, що в області* $U_\rho = \{u \in \mathbb{R}^n, \|x\| \le \rho\}$ *система* (1), (2) *задовольняє умови* (H$_1$) – (H$_4$) *та додатково*:

1) *усі розв'язки в області* U_ρ *перетинають кожну поверхню* $t = \tau_j(x)$ *не більше одного разу;*

2) $\|f(x_1)-f(x_2)\| + \|g(x_1)-g(x_2)\| + \|I_j(x_1)-I_j(x_2)\| + |\tau_j(x_1)-\tau_j(x_2)| \le N_1 \|x_1 - x_2\|$ *рівномірно по* $x_1, x_2 \in U_\rho,\ j \in \mathbb{Z}$;

3) $f(0) = g(0) = 0$ *та* $I_j(0) = 0$ *для всіх* $j \in \mathbb{Z}$;

4) *лінійна однорідна система* (4), (5) *є експоненціально стійкою з показником* β *та коефіцієнтом* M;

5) $N_1 B_* < 1$ *та* $\rho \ge (1 - N_1 B_* - N_1 C_*)^{-1}(M_1 \gamma_0/\beta_1 + C_* g_*)$, *де*

$$B_* = \frac{M_1}{\beta_1}(B_0 + C_0), \quad C_* = \frac{M_1}{1 - e^{-\beta_1 \theta}},$$

а сталі β_1 *та* M_1 *визначено за лемою* 2.

Тоді для достатньо малих значень сталої Ліпшиця N_1 *система* (1), (2) *має в* U_ρ *єдиний* W*-майже періодичний розв'язок, і цей розв'язок є асимптотично стійким.*

Доведення. 1. Спочатку, використовуючи підхід, запропонований у [12], доведемо існування W-майже періодичного розв'язку. Нехай $y = \{y_j\}$ — майже періодична послідовність елементів $y_j \in \mathbb{R}^n, \|y_j\| \le \rho$. Розглянемо систему рівнянь з фіксованими моментами імпульсної дії:

$$\dot x(t) = A(t)x(t) + B(t)f(x(t)) +$$
$$+ C(t)g(x(t-h)) + \gamma(t),\ t \ne \tau_k(y_k), \tag{12}$$

$$x(\tau_k(y_k)+0) - x(\tau_k(y_k)) = D_k x(\tau_k(y_k)) + I(y_k) + g_k,\ k \in \mathbb{Z}. \tag{13}$$

Можна перевірити, що послідовність $\{\tau_k(y_k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ має рівномірно майже періодичні різниці. За лемою 2 при достатньо малій сталій N_1 відповідна (12), (13) лінійна система з імпульсами

$$\dot x(t) = A(t)x(t), \quad t \ne \tau_k(y_k), \tag{14}$$

$$x(\tau_j(y_k)+0) - x(\tau_j(y_k)) = D_k x(\tau_k(y_k)), \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{15}$$

є експоненціально стійкою. Її еволюційний оператор $U(t,\tau,y)$ задовольняє оцінку

$$\|U(t,\tau,y)x\| \le M_1 e^{-\beta_1(t-\tau)} \|x\|, \quad t \ge \tau,$$

з додатними сталими $M_1 \geq M,\ \beta_1 \leq \beta$, які визначено за лемою 2.

Покажемо, що система (12), (13) має єдиний в U_ρ обмежений на осі розв'язок, який задовольняє інтегральне рівняння

$$x(t,y) = \int_{-\infty}^{t} U(t,s,y)\Big(B(s)f(x(s,y)) + C(s)g(x(s-h,y)) + \gamma(s)\Big)ds +$$
$$+ \sum_{\tau_j(y_j)<t} U(t,\tau_j(y_j)+0,y)\left(I(y_j)+g_j\right). \tag{16}$$

Виберемо $x_0(t,y) \equiv 0$ і побудуємо послідовність W-майже періодичних функцій

$$x_{n+1}(t,y) = \int_{-\infty}^{t} U(t,s,y)\Big(B(s)f(x_n(s,y)) + C(s)g(x_n(s-h,y)) + \gamma(s)\Big)ds +$$
$$+ \sum_{\tau_j(y_j)<t} U(t,\tau_j(y_j)+0,y)\left(I(y_j)+g_j\right). \tag{17}$$

Аналогічно [7] доводимо, що $x_{n+1}(t,y)$ є W-майже періодичною, якщо $x_n(t,y)$ є W-майже періодичною.

Якщо $\sup_t \|x_n(t,y)\| \leq \rho$, то за умовою 5 теореми

$$\sup_t \|x_{n+1}(t,y)\| \leq N_1 B_* \sup_t \|x_n(t,y)\| + \frac{M_1}{\beta_1}\gamma_0 + C_*(N_1\rho + g_*) \leq \rho.$$

Оскільки

$$\sup_t \|x_{n+1}(t,y) - x_n(t,y)\| \leq \frac{M_1 N_1}{\beta_1}(B_0 + C_0) \sup_t \|x_n(t,y) - x_{n-1}(t,y)\|,$$

то послідовність $\{x_n(t,y)\}$ збігається до W-майже періодичного розв'язку $x^*(t,y)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ рівняння (16). Відповідно $x^*(t,y)$ є W-майже періодичним розв'язком системи з імпульсами (12), (13) та $\sup_t \|x^*(t,y)\| \leq \rho$, де ρ задовольняє умову 5.

2. Якщо ми знайдемо таку послідовність $y^* = \{y_j^*\}, y_j^* \in \mathbb{R}^n$, що

$$x^*(\tau_j(y_j^*), y^*) = y_j^*$$

для всіх $j \in \mathbb{Z}$, то функція $x^*(t,y^*)$ буде шуканим W-майже періодичним розв'язком системи (1), (2).

Розглянемо простір $\mathfrak{N}$ майже періодичних послідовностей $y = \{y_j\},\ y_j \in \mathbb{R}^n$, з нормою $\|y\|_S = \sup_j \|y_j\|$ та відображення $S\colon \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$,

$$S(y) = \{x^*(\tau_j(y_j), y)\}_{j\in\mathbb{Z}}.$$

S відображає область $\mathfrak{N}_\rho = \{y \in \mathfrak{N}, \|y\|_S \leq \rho\}$ у себе.

Доведемо, що S є стискаючим. Візьмемо $y, z \in \mathfrak{N}$ і покладемо $\tilde{\tau}_j^1 = \tau_j(y_j), \tilde{\tau}_j^2 = \tau_j(z_j)$. Маємо $\|S(y) - S(z)\|_S = \sup_j \|x^*(\tau_j(y_j), y) - x^*(\tau_j(z_j), z)\|$. Оцінимо різницю $\|x^*(\tau_j(y_j), y) - x^*(\tau_j(z_j), z)\|$ для будь-якого фіксованого j. Без обмеження загальності припустимо, що $\tilde{\tau}_j^1 \leq \tilde{\tau}_j^2$ для цього конкретного j. Тоді

$$\|x^*(\tau_j(y_j),y)-x^*(\tau_j(z_j),z)\|\leq$$
$$\leq\|x^*(\tilde\tau_j^1,y)-x^*(\tilde\tau_j^1,z)\|+\|x^*(\tilde\tau_j^1,z)-x^*(\tilde\tau_j^2,z)\|. \tag{18}$$

Позначимо

$$\mathcal{J}=\cup_j\mathcal{J}_j,\qquad \mathcal{J}_j=\Big(\max\{\tilde\tau_{j-1}^1,\tilde\tau_{j-1}^2\},\min\{\tilde\tau_j^1,\tilde\tau_j^2\}\Big]=(\tau''_{j-1},\tau'_j].$$

Для оцінювання різниці $\|x^*(\tilde\tau_j^1,y)-x^*(\tilde\tau_j^1,z)\|$ застосуємо ітераційну формулу (17). Покладемо $x_0(t,y)=x_0(t,z)=0$. Тоді для $t\in(\tau''_m,\tau'_{m+1}]$ будемо мати

$$i_1=\|x_1(t,y)-x_1(t,z)\|\leq\int\limits_{-\infty}^{t}\|(U(t,s,y)-U(t,s,z))\gamma(s)\|ds+$$
$$+\sum_{k\leq m}\|U(t,\tilde\tau_k^1+0,y)\left(I_k(y_k)-I_k(z_k)\right)\|+$$
$$+\sum_{k\leq m}\|\left(U(t,\tilde\tau_k^1+0,y)-U(t,\tilde\tau_k^2+0,z)\right)\left(I_k(z_k)+g_k\right)\|.$$

Спочатку оцінимо інтеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{t}\|(U(t,s,y)-U(t,s,z))\gamma(s)\|ds\leq$$
$$\leq\int\limits_{\tau''_m}^{t}\|\left(U(t,s,y)-U(t,s,z)\right)\gamma(s)\|ds+$$
$$+\sum_{k\leq m}\int\limits_{\tau''_{k-1}}^{\tau'_k}\|\left(U(t,s,y)-U(t,s,z)\right)\gamma(s)\|ds+$$
$$+\sum_{k\leq m}\int\limits_{\tau'_k}^{\tau''_k}\|U(t,s,y)\gamma(s)\|ds+\sum_{k\leq m}\int\limits_{\tau'_k}^{\tau''_k}\|U(t,s,z)\gamma(s)\|ds\leq$$
$$\leq\Big(\frac{M_2}{\beta_2}+\frac{2M_1}{1-e^{-\beta_1\theta}}\Big)N_1\gamma_0\|y-z\|_S. \tag{19}$$

Покладемо для визначеності $\tilde\tau_k^2\geq\tilde\tau_k^1$. Тоді за нерівністю (11) маємо

$$\big\|(U(t,\tilde\tau_k^1+0,y)-U(t,\tilde\tau_k^2+0,z))g_k\big\|\leq$$
$$\leq\|(U(t,\tilde\tau_k^2+0,y)-U(t,\tilde\tau_k^2+0,z))g_k\|+$$
$$+\|U(t,\tilde\tau_k^2+0,y)(X(\tau''_k,\tau'_k)-I)g_k\|\leq$$
$$\leq\Big(M_2e^{-\beta_2(t-\tau''_k)}+M_1e^{-\beta_1(t-\tau''_k)}A_0e^{2\rho N_1A_0}\Big)N_1\|y-z\|_S\|g_k\|,$$

оскільки $\|e^{As}-I\| \leq \|A\|e^{s\|A\|}s,\ s \geq 0$. Отже,

$$i_1 \leq \frac{M_2 N_1}{1-e^{-\beta_2\theta}}\|y-z\|_S\left(1+2\gamma_0+(1+A_0e^{2\rho N_1 A_0})(\rho N_1+g_*)\right)+$$
$$+\frac{M_2\gamma_0 N_1}{\beta_2}\|y-z\|_S = N_1\tilde{K}_3\|y-z\|_S. \tag{20}$$

Розглянемо $(n+1)$-ше наближення:

$$\|x_{n+1}(t,y)-x_{n+1}(t,z)\| \leq$$
$$\leq i_1 + \int\limits_{-\infty}^{t} \|U(t,s,y)B(s)(f(x_n(s,y))-f(x_n(s,z)))\|ds+$$
$$+\int\limits_{-\infty}^{t} \|U(t,s,y)C(s)(g(x_n(s-h,y))-g(x_n(s-h,z)))\|ds+$$
$$+\int\limits_{-\infty}^{t} \|\left(U(t,s,y)-U(t,s,z)\right)\tilde{f}_n(s)\|ds =$$
$$= i_1+i_2+i_3+i_4, \tag{21}$$

де $\tilde{f}_n(s) = B(s)f(x_n(s,z)) + C(s)g(x_n(s-h,z))$.

Для $t \in (\tau''_m, \tau'_{m+1}]$ отримуємо

$$i_2 \leq \int\limits_{\tau''_m}^{t} \|U(t,s,y)B(s)(f(x_n(s,y))-f(x_n(s,z)))\|ds+$$
$$+\sum_{k\leq m}\int\limits_{\tau''_{k-1}}^{\tau'_k} \|U(t,s,y)B(s)(f(x_n(s,y))-f(x_n(s,z)))\|ds+$$
$$+\sum_{k\leq m}\int\limits_{\tau'_k}^{\tau''_k} \|U(t,s,y)B(s)f(x_n(s,y))\|ds+$$
$$+\sum_{k\leq m}\int\limits_{\tau'_k}^{\tau''_k} \|U(t,s,y)B(s)f(x_n(s,z))\|ds \leq$$
$$\leq \frac{M_1N_1B_0}{\beta_1}\sup_{t\in J}\|x_n(t,y)-x_n(t,z)\| + \frac{2M_1N_1^2B_0\rho}{1-e^{-\beta_1\theta}}\|y-z\|_S. \tag{22}$$

Якщо $t \in (\tau''_m, \tau'_{m+1}]$ і $t-h \in (\tau'_l, \tau''_l]$ для деякого $l \in \mathbb{Z}$, то

$$i_3 \le \int\limits_{\tau_l'+h}^{t} \|U(t,s,y)C(s)g(x_n(s-h,y))\|ds+$$

$$+\int\limits_{\tau_l'+h}^{t} \|U(t,s,y)C(s)g(x_n(s-h,z))\|ds+$$

$$+\sum_{k\le l}\int\limits_{\tau_{k-1}''+h}^{\tau_k'+h} \|U(t,s,y)C(s)(g(x_n(s-h,y))-g(x_n(s-h,z)))\|ds+$$

$$+\sum_{k<l}\int\limits_{\tau_k'+h}^{\tau_k''+h} \|U(t,s,y)C(s)g(x_n(s-h,y))\|ds+$$

$$+\sum_{k<l}\int\limits_{\tau_k'+h}^{\tau_k''+h} \|U(t,s,y)C(s)g(x_n(s-h,z))\|ds \le$$

$$\le \frac{M_1N_1C_0}{\beta_1}\sup_{s\in J}\|x_n(s,y)-x_n(s,z)\| + \frac{2M_1N_1^2C_0\rho}{1-e^{-\beta_1\theta}}\|y-z\|_S. \tag{23}$$

Якщо $t\in(\tau_m'',\tau_{m+1}']$ і $t-h\in(\tau_l'',\tau_{l+1}']$ для деякого $l\in\mathbb{Z}$, то інтеграл i_3 оцінюється аналогічно.

Аналогічно (19) отримуємо

$$i_4 \le \int\limits_{\tau_m''}^{t} \|\left(U(t,s,y)-U(t,s,z)\right)\tilde{f}_n(s)\|ds+$$

$$+\sum_{k\le m}\int\limits_{\tau_{k-1}''}^{\tau_k'} \|\left(U(t,s,y)-U(t,s,z)\right)\tilde{f}_n(s)\|ds+$$

$$+\sum_{k\le m}\int\limits_{\tau_k'}^{\tau_k''} \|U(t,s,y)\tilde{f}(s)\|ds + \sum_{k\le m}\int\limits_{\tau_k'}^{\tau_k''} \|U(t,s,z)\tilde{f}_n(s)\|ds \le$$

$$\le \Big(\frac{M_2}{\beta_2}+\frac{2M_1}{1-e^{-\beta_1\theta}}\Big)N_1^2(B_0+C_0)\rho\|y-z\|_S = N_1\tilde{K}_4\|y-z\|_S. \tag{24}$$

Підставляючи (20), (22)–(24) у (21), для $t\in J$ отримуємо

$$\|x_{n+1}(t,y)-x_{n+1}(t,z)\| \le$$

$$\le \frac{M_1N_1}{\beta_1}(B_0+C_0)\sup_{s\in J}\|x_n(s,y)-x_n(s,z)\| + L_1N_1\|y-z\|_S, \tag{25}$$

де

$$L_1 = \tilde{K}_3 + \tilde{K}_4 + \frac{2N_1M_1\rho(B_0 + C_0)}{1 - e^{-\beta_1\theta}}.$$

Переходячи в (25) до границі при $n \to \infty$, одержуємо

$$\|x^*(t,y) - x^*(t,z)\| \leq \frac{M_1N_1}{\beta_1}(B_0 + C_0)\sup_{s\in J}\|x^*(s,y) - x^*(s,z)\| + L_1N_1\|y - z\|_S, \quad t \in J.$$

Отже,

$$\|x^*(t,y) - x^*(t,z)\| \leq (1 - N_1B_*)^{-1}\,L_1N_1\|y - z\|_S, \quad t \in J,$$

і, зокрема,

$$\|x^*(\tau'_j, y) - x^*(\tau'_j, z)\| \leq (1 - N_1B_*)^{-1}\,L_1N_1\|y - z\|_S. \tag{26}$$

Тепер оцінимо $\|x^*(\tilde{\tau}_j^1, z) - x^*(\tilde{\tau}_j^2, z)\|$. Зауважимо, що за нашим припущенням $\tilde{\tau}_j^1 < \tilde{\tau}_j^2$. Маємо

$$\|x^*(\tilde{\tau}_j^1, z) - x^*(\tilde{\tau}_j^2, z)\| \leq \left\| \int\limits_{\tilde{\tau}_j^1}^{\tilde{\tau}_j^2} \frac{d}{d\xi}x^*(\xi, z)d\xi \right\| \leq$$

$$\leq N_1\Big(A_0\rho + (B_0 + C_0)N_1\rho + \gamma_0\Big)\|y - z\|_S. \tag{27}$$

З нерівностей (26) та (27) випливає, що $\|S(y) - S(z)\|_S \leq \Gamma(N_1)\|y - z\|_S$, де

$$\Gamma(N_1) = \frac{N_1L_1}{1 - N_1B_*} + N_1\Big(A_0\rho + (B_0 + C_0)N_1\rho + \gamma_0\Big).$$

Отже, відображення $S\colon \mathfrak{N}_\rho \to \mathfrak{N}_\rho$ є стискаючим, якщо N_1 достатньо мале. Його нерухомій точці $y^* \in \mathfrak{N}_\rho$ відповідає W-майже періодичний розв'язок $x_0(t) = x^*(t, y^*)$ системи (1), (2).

3. Доведемо стійкість майже періодичного розв'язку $x_0(t)$. Зафіксуємо довільні $\varepsilon > 0$ та $\eta > 0$. Нехай $t_0 \in [\tau_0(0) + \eta, \tau_1(0) - \eta]$.

W-майже періодичний розв'язок $x_0(t)$ задовольняє інтегральне рівняння

$$x_0(t) = U_0(t, t_0)x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} U_0(t,s)\Big(B(s)f(x(s)) + C(s)g(x(s-h)) + \gamma(s)\Big)ds +$$

$$+ \sum_{t_0 < \tau_j^0 < t} U_0(t, \tau_j^0 + 0)\left(I_j(x_0(\tau_j^0)) + g_j\right), \tag{28}$$

де $x_0 = x_0(t_0)$, $\tau_j^0 = \tau_j(x_0(\tau_j^0))$, $U_0(t,s)$ — еволюційний оператор лінійної системи

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \qquad x(\tau_j^0 + 0) - x(\tau_j^0) = D_jx(\tau_j^0), \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Нехай $x_1(t)$ — інший розв'язок системи (1), (2) з початковою функцією $\varphi \in \mathcal{PC}[t_0 - h, t_0]$ такою, що $\|\varphi\|_{PC} \leq \rho$ та $\|\varphi(t) - x_0(t)\| < \delta$ для $t \in [t_0 - h, t_0]$, $|t - \tau_j^0| > \delta$, $t_0 - h < \tau_j^0 < t_0$.

Позначимо через τ_j^1 точки перетину розв'язку $x_1(t)$ з поверхнями $t = \tau_j(x)$. Розв'язок $x_1(t)$ задовольняє систему

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)f(x(t)) + C(t)g(x(t-h)) + \gamma(t), \quad t \neq \tau_j^1,$$
$$x(\tau_j^1 + 0) - x(\tau_j^1) = D_j x(\tau_j^1) + I_j(x(\tau_j^1)) + g_j, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

За формулою варіації сталих

$$x_1(t) = U_1(t,t_0)\varphi_0 + \int\limits_{t_0}^{t} U_1(t,s)\Big(B(s)f(x_1(s)) + C(s)g(x_1(s-h)) + \gamma(s)\Big)ds +$$
$$+ \sum_{t_0<\tau_j^1<t} U_1(t,\tau_j^1+0)\Big(I_j(x_1(\tau_j^1)) + g_j\Big), \tag{29}$$

де $\varphi_0 = \varphi(t_0)$, $U_1(t,s)$ — еволюційний оператор лінійної системи

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \qquad x(\tau_j^1 + 0) - x(\tau_j^1) = D_j x(\tau_j^1), \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Позначимо $\mathcal{J} = \cup_j \mathcal{J}_j$, $\mathcal{I} = \cup_j \mathcal{I}_j$, де

$$\mathcal{J}_j = \Big(\max\{\tau_{j-1}^0, \tau_{j-1}^1\}, \min\{\tau_j^0, \tau_j^1\}\Big] = (\tau_{j-1}'', \tau_j'],$$
$$\mathcal{I}_j = \Big(\min\{\tau_j^0, \tau_j^1\}, \max\{\tau_j^0, \tau_j^1\}\Big] = (\tau_j', \tau_j''].$$

Згідно з (28) і (29) різниця $x_1(t) - x_0(t)$ задовольняє нерівність

$$\|x_1(t) - x_0(t)\| \leq \|U_1(t,t_0)\varphi_0 - U_0(t,t_0)x_0\| + i_0 + i_1 + i_2 + i_3 + i_4, \tag{30}$$

де

$$i_0 = \int\limits_{[t_0-h,t_0]\cap\mathcal{J}} \|U_1(t,s+h)C(s+h)(g(\varphi(s)) - g(x_0(s)))\|ds +$$
$$+ \int\limits_{[t_0-h,t_0]\cap\mathcal{I}} \|U_1(t,s+h)C(s+h)g(\varphi(s)) - U_0(t,s+h)C(s+h)g(x_0(s))\|ds,$$

$$i_1 = \int\limits_{\mathcal{J}\cap[t_0,t]} \|U_1(t,s)B(s)(f(x_1(s)) - f(x_0(s)))\|ds +$$
$$+ \int\limits_{\mathcal{J}\cap[t_0,t-h]} \|U_1(t,s+h)C(s+h)(g(x_1(s)) - g(x_0(s)))\|ds,$$

$$i_2 = \int\limits_{\mathcal{J}\cap[t_0,t]} \|(U_0(t,s) - U_1(t,s))(B(s)f(x_0(s)) + C(s)g(x_0(s-h)) + \gamma(s))\|ds,$$

$$i_3 = \int\limits_{\mathcal{I}\cap[t_0,t]} \|U_1(t,s)B(s)(f(x_1(s))+\gamma(s)) - U_0(t,s)B(s)(f(x_0(s))+\gamma(s))\|ds+$$

$$+ \int\limits_{\mathcal{I}\cap[t_0,t-h]} \|U_0(t,s+h)C(s)g(x_0(s)) - U_1(t,s+h)C(s)g(x_1(s))\|ds,$$

$$i_4 = \left\| \sum_{t_0<\tau_j^1<t} U_1(t,\tau_j^1+0)(I_j(x_1(\tau_j^1))+g_j) - \sum_{t_0<\tau_j^0<t} U_0(t,\tau_j^0+0)(I_j(x_0(\tau_j^0))+g_j) \right\|.$$

Спочатку оцінимо $|\tau_j^1 - \tau_j^0|$ через різницю $\|x_1(\tau_j') - x_0(\tau_j')\|$. Нехай $\tau_j^0 \ge \tau_j^1 = \tau_j'$. Тоді

$$|\tau_j^1 - \tau_j^0| \le N_1\|x_0(\tau_j'') - x_1(\tau_j')\| \le N_1\|x_0(\tau_j'') - x_0(\tau_j')\|+$$

$$+N_1\|x_0(\tau_j') - x_1(\tau_j')\| \le N_1\|x_0(\tau_j') - x_1(\tau_j')\| + N_1\tilde{K}_1|\tau_j^1 - \tau_j^0|,$$

де $\tilde{K}_1 = A_0\rho + (B_0+C_0)N_1\rho + \gamma_0$. Випадок $\tau_j^0 \le \tau_j^1$ розглядається аналогічно. Тоді

$$|\tau_j^1 - \tau_j^0| \le \frac{N_1}{1-N_1\tilde{K}_1}\|x_0(\tau_j') - x_1(\tau_j')\| \tag{31}$$

та

$$\|x_0(\tau_j^0) - x_1(\tau_j^1)\| \le \|x_0(\tau_j') - x_1(\tau_j')\| + \tilde{K}_1|\tau_j^1 - \tau_j^0| \le$$

$$\le \frac{1}{1-N_1\tilde{K}_1}\|x_0(\tau_j') - x_1(\tau_j')\|.$$

Припустимо, що $t \in (\tau_m'', \tau_{m+1}']$ та $\|x_0(s)-x_1(s)\| \le \eta(1-N_1\tilde{K}_1)/N_1$ для $s \in [t_0, \tau_{m+1}']\cap\mathcal{J}$. Нехай також $\eta \le \delta_0$, де δ_0 визначено за лемою 2. Тоді

$$\|U_1(t,s)u_0\| \le M_1 e^{-\beta_1(t-s)}\|u_0\|, \quad t_0 \le s \le t \le \tau_{m+1}'.$$

Аналогічно (11) можна перевірити, що

$$\|U_0(t,s) - U_1(t,s)\| \le M_2 e^{-\beta_2(t-s)} \max_{k\le j\le m}|\tau_j'' - \tau_j'| \le \eta M_2 e^{-\beta_2(t-s)}$$

для $t \in \mathcal{J}_{m+1},\ s \in \mathcal{J}_k,\ t \ge s.$

За такого припущення оцінимо всі інтеграли у (30):

$$\|U_1(t,t_0)\varphi_0 - U_0(t,t_0)x_0\| \le$$

$$\le \|(U_1(t,t_0) - U_0(t,t_0))\varphi_0\| + \|U_0(t,t_0)(x_0 - \varphi_0)\| \le$$

$$\le M_2 e^{-\beta_2(t-t_0)} \max_{1\le j\le m}|\tau_j'' - \tau_j'| + M e^{-\beta(t-t_0)}\|\varphi_0 - x_0\|,$$

$$i_0 \le \int\limits_{[t_0-h,t_0]\cap\mathcal{J}} M_1 e^{-\beta_1(t-t_0)} C_0 N_1 \delta ds+$$

$$+2\int\limits_{[t_0-h,t_0]\cap\mathcal{I}} M_1 e^{-\beta_1(t-t_0)} C_0 N_1 \rho ds \le$$

$$\le N_1\left(h + 2\rho\frac{h}{\theta} + 2\rho\right) e^{-\beta_1(t-t_0)} M_1 C_0 \delta,$$

$$i_1 \le \int\limits_{\mathcal{J}\cap[t_0,t]} M_1 e^{-\beta_1(t-s)} B_0 N_1 \|x_1(s) - x_0(s)\| ds +$$

$$+ \int\limits_{\mathcal{J}\cap[t_0,t-h]} M_1 e^{-\beta_1(t-s-h)} C_0 N_1 \|x_1(s) - x_0(s)\| ds \le$$

$$\le e^{-\beta_1 t} M_1 N_1 (B_0 + C_0 e^{\beta_1 h}) \int\limits_{\mathcal{J}\cap[t_0,t]} e^{\beta_1 s} \|x_1(s) - x_0(s)\| ds,$$

$$i_2 \le ((B_0 + C_0) N_1 \rho + \gamma_0) \left(\int\limits_{t_0}^{\tau_1'} \|U_0(t,s) - U_1(t,s)\| ds + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=2}^{m+1} \int\limits_{\tau_{j-1}''}^{\tau_j'} \|U_0(t,s) - U_1(t,s)\| ds \right) \le$$

$$\le ((B_0 + C_0) N_1 \rho + \gamma_0) \sum_{1 \le j \le m} \frac{M_2}{\beta_2} e^{-\beta_2(t-\tau_j')} \max_{j \le i \le m} |\tau_i'' - \tau_i'|,$$

$$i_3 \le \sum_{t_0 < \tau_j^0 < t} \int\limits_{\tau_j'}^{\tau_j''} 2M_1 e^{-\beta_1(t-\tau_j'')} \left(N_1 \rho B_0 + \gamma_0 + N_1 \rho C_0 e^{\beta_1 h}\right) ds \le$$

$$\le \sum_{t_0 < \tau_j^0 < t} 2M_1 e^{-\beta_1(t-\tau_j')} e^{\beta_1(\tau_j''-\tau_j')} \left(N_1 \rho B_0 + \gamma_0 + N_1 \rho C_0 e^{\beta_1 h}\right) |\tau_j'' - \tau_j'|.$$

Для оцінювання i_4 розглянемо різницю

$$i_{4j} = \|U_1(t, \tau_j^1 + 0)(I_j(x_1(\tau_j^1)) + g_j) - U_0(t, \tau_j^0 + 0)(I_j(x_0(\tau_j^0)) + g_j)\|.$$

Нехай $\tau_j^0 \ge \tau_j^1$ (випадок $\tau_j^0 < \tau_j^1$ розглядається аналогічно). Тоді

$$i_{4j} \le \|(U_1(t, \tau_j^1 + 0) - U_1(t, \tau_j^0 + 0))(I_j(x_1(\tau_j^1)) + g_j)\| +$$

$$+ \|U_1(t, \tau_j^0 + 0)(I_j(x_1(\tau_j^1)) - I_j(x_0(\tau_j^0)))\| +$$

$$+ \|(U_1(t, \tau_j^0 + 0) - U_0(t, \tau_j^0 + 0))(I_j(x_0(\tau_j^0)) + g_j)\| \le$$

$$\le \|U_1(t, \tau_j^0 + 0)\| \|U_1(\tau_j^0 + 0, \tau_j^1 + 0) - I\| (N_1 \rho + g_*) +$$

$$+ \|U_1(t, \tau_j^0 + 0)\| N_1 \|x_1(\tau_j^1) - x_0(\tau_j^0)\| +$$

$$+M_2 e^{-\beta_2(t-\tau_j^0)}(N_1\rho + g_*) \max_{j\le i\le m} |\tau_i'' - \tau_i'| \le$$

$$\le M_1 e^{-\beta_1(t-\tau_j'')} \left(A_0 e^{A_0|\tau_j''-\tau_j'|}(N_1\rho + g_*)|\tau_j'' - \tau_j'| + N_1\|x_1(\tau_j^1) - x_0(\tau_j^0)\|\right) +$$

$$+M_2 e^{-\beta_2(t-\tau_j'')}(N_1\rho + g_*) \max_{j\le i\le m} |\tau_i'' - \tau_i'|.$$

Як наслідок при $t \in \mathcal{J}_{m+1}$ маємо

$$\|x_1(t) - x_0(t)\| \le \delta P_1 e^{-\beta_2(t-t_0)} + N_1 P_2 \int\limits_{[t_0,t]\cap\mathcal{J}} e^{-\beta_2(t-s)}\|x(s) - x_0(s)\|ds+$$

$$+\sum_{1\le j\le m} N_1 P_3 e^{-\beta_2(t-\tau_j')} \max_{j\le i\le m} \|x_1(\tau_i') - x_0(\tau_i')\|,$$

де $P_1,\ P_2$ та P_3 — додатні сталі, незалежні від $\varepsilon,\ \eta$.

При $t \in [t_0, \tau_1']$ за нерівністю Гронуолла

$$\|x_1(t) - x_0(t)\| \le \delta P_1 e^{-(\beta_2 - N_1 P_2)(t-t_0)}. \tag{32}$$

При $t \in (\tau_1'', \tau_2']$

$$\|x_1(t) - x_0(t)\| \le \delta P_1 e^{-(\beta_2 - N_1 P_2)(t-t_0)}(1 + N_1 P_3).$$

Послідовно застосовуючи аналогічні нерівності на наступних інтервалах, для $t \in \mathcal{J}_m$ отримуємо

$$\|x_1(t) - x_0(t)\| \le \delta P_1 e^{-(\beta_2 - N_1 P_2)(t-t_0)}(1 + N_1 P_3)^m.$$

Для достатньо малого $N_1 > 0$ виконуються нерівності $\beta_2 > N_1 P_2$ і

$$e^{-(\beta_2 - N_1 P_2)\theta}(1 + N_1 P_3) < 1. \tag{33}$$

З (32) і (31) отримуємо

$$|\tau_j^1 - \tau_j^0| \le \frac{N_1}{1 - N_1\tilde{K}_1}\|x_0(\tau_j') - x_1(\tau_j')\| \le \frac{N_1 P_1 \delta}{1 - N_1\tilde{K}_1}.$$

Якщо взяти $\delta \le \min\{\varepsilon/P_1, \eta(1 - N_1\tilde{K}_1)/N_1 P_1\}$, то з урахуванням (33) отримуємо $\|x_1(t) - x_0(t)\| < \varepsilon$ при $t \ge t_0,\ |t - \tau_j^0| \ge \eta$, що доводить стійкість розв'язку $x_0(t)$.

Границя $e^{-n\theta(\beta_2 - N_1 P_2)}(1 + N_1 P_3)^n \to 0, n \to \infty$, забезпечує асимптотичну стійкість $x_0(t)$.

Теорему доведено.

Література

1. *Henriquez H. R., De Andrade B., Rabelo M.* Existence of almost periodic solutions for a class of abstract impulsive differential equations // ISRN Math. Anal. – 2011. – Article ID 632687. – 21 p.
2. *Myslo Yu. M., Tkachenko V. I.* Global attractivity in almost periodic single species models // Funct. Different. Equat. – 2011. – **18**, № 3 – 4. – P. 269 – 278.
3. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equations. – Singapore: World Sci. Publ., 1995. – x + 462 p.
4. *Samoilenko A. M., Trofimchuk S. I.* Almost periodic impulsive systems // Different. Equat. – 1993. – **29**. – P. 684 – 691.

5. *Stamov G. T.* Almost periodic solutions of impulsive differential equations // Lect. Notes Math. – Heidelberg: Springer, 2012. – **2047**. – xx + 217 p.
6. *Tkachenko V.* Almost periodic solutions of parabolic type equations with impulsive action // Funct. Different. Equat. – 2014. – **21**, № 3 – 4. – P. 155 – 169.
7. *Tkachenko V. I.* Exponential dichotomy and existence of almost periodic solutions of impulsive differential equations // J. Math. Sci. – 2016. – **212**, № 4. – P. 490 – 502.
8. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. – М.: Мир, 1971. – 310 с.
9. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A., Trofimchuk S. I.* Generalized solutions of impulse systems and the phenomenon of pulsations // Ukr. Math. J. – 1991. – **43**, № 5. – P. 610 – 615.
10. *Akhmetov M. U., Perestyuk N. A.* Periodic and almost periodic solutions of strongly nonlinear impulse systems // J. Appl. Math. and Mech. – 1992. – **56**, № 6. – P. 829 – 837.
11. *Yilmaz E.* Almost periodic solutions of impulsive neural networks at non-prescribed moments of time // Neurocomputing. – 2014. – **141**. – P. 148 – 152.
12. *Hakl R., Pinto M., Tkachenko V., Trofimchuk S.* Almost periodic evolution systems with impulse action at state-dependent moments // J. Math. Anal. and Appl. – 2017. – **446**. – P. 1030 – 1045.
13. *Tkachenko V.* Almost periodic solutions of evolution differential equations with impulsive action // Math. Modeling and Appl. Nonlinear Dynamics. – New York: Springer, 2016. – P. 161 – 205.
14. *Lakshmikantham V., Bainov D. D., Simeonov P. S.* Theory of impulsive differential equations. – Singapore: World Sci. Publ., 1989. – xii + 273 p.
15. *Дворник А. В., Ткаченко В. І.* Про стійкість розв'язків еволюційних рівнянь з нефіксованими моментами імпульсної дії // Нелінійні коливання. – 2015. – **18**, № 4. – С. 453 – 464.
16. *Li Y., Zhang T.* Existence of almost periodic solutions for Hopfield neural networks with continuously distributed delays and impulses // Electron. J. Different. Equat. – 2009. – **2009**, № 152. – P. 1 – 8.
17. *Pinto M., Robledo G.* Existence and stability of almost periodic solutions in impulsive neural network models // Appl. Math. and Comput. – 2010. – **217**, № 8. – P. 4167 – 4177.
18. *Stamov G. T., Stamova I. M.* Almost periodic solutions for impulsive neural networks with delay // Appl. Math. Modelling. – 2007. – **31**, № 7. – P. 1263 – 1270.
19. *Zhang H., Xia Y.* Existence and exponential stability of almost periodic solution for Hopfield-type neural networks with impulse // Chaos, Solitons and Fractals. – 2008. – **37**, № 4. – P. 1076 – 1082.
20. *Самойленко А. М., Трофимчук С. И.* Неограниченные функции с почти периодическими разностями // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 10. – С. 1409 – 1413.
21. *Liu X., Ballinger G.* Existence and continuability of solutions for differential equations with delays and state-dependent impulses // Nonlinear Anal.: Theory, Meth. and Appl. – 2002. – **51**, № 4. – P. 633 – 647.

Одержано 11.05.16