УДК 517.5

І. В. Кальчук, Ю. І. Харкевич (Східноєвр. нац. ун-т ім. Л. Українки, Луцьк)

АПРОКСИМАТИВНІ ВЛАСТИВОСТІ БІГАРМОНІЧНИХ ІНТЕГРАЛІВ ПУАССОНА НА КЛАСАХ $W^r_\beta H^\alpha$

We deduce asymptotic equalities for the least upper bounds of approximations of functions from the classes $W^r_\beta H^\alpha$, and H^α by biharmonic Poisson integrals in the uniform metric.

Получены асимптотические равенства для точных верхних граней приближений функций из классов $W^r_\beta H^\alpha$ и H^α бигармоническими интегралами Пуассона в равномерной метрике.

1. Постановка задачі та деякі допоміжні твердження. Нехай C — простір 2π-періодичних неперервних функцій, у якому норма задається за допомогою рівності $\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$; L_∞ — простір 2π-періодичних вимірних суттєво обмежених функцій з нормою $\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}\limits_t |f(t)|$; L — простір 2π-періодичних сумовних на періоді функцій, в якому норма задається рівністю $\|f\|_L = \|f\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt.$

Розглянемо крайову задачу (в одиничному крузі) для рівняння

$$\Delta(\Delta u) = 0, \tag{1}$$

де $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ — оператор Лапласа в полярних координатах.

Розв'язок рівняння (1), що задовольняє крайові умови

$$u\,(\rho, x)\big|_{\rho=1} = f(x), \qquad \frac{\partial u(\rho, x)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=1} = 0, \quad -\pi \le x \le \pi, \tag{2}$$

де $f(x)$ — сумовна 2π-періодична функція, далі позначатимемо $B(\rho; f; x) = u(\rho, x)$. Тоді розв'язок крайової задачі (1), (2) можемо записати у вигляді

$$B(\rho; f; x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{\rho,k}\cos kt\right\}dt, \quad 0 \le \rho < 1, \tag{3}$$

де

$$\lambda_{\rho,k} = \left(1 + \frac{k}{2}(1-\rho^2)\right)\rho^k.$$

Величину (3) називають бігармонічним інтегралом Пуассона функції f (див., наприклад, [1, с. 402]). Поклавши $\rho = e^{-\frac{1}{\delta}}$, бігармонічний інтеграл запишемо у вигляді

$$B_\delta(f; x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{\delta,k}\cos kt\right\}dt, \quad \delta > 0,$$

де

$$\lambda_{\delta,k} = \left(1 + \frac{k}{2}\big(1 - e^{-\frac{2}{\delta}}\big)\right)e^{-\frac{k}{\delta}}.$$

Нехай f належить L і

$$S[f]=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

— ряд Фур'є функції f.

Нехай $r\geq 0$ і β — фіксоване дійсне число. Якщо ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}k^r\left(a_k\cos\left(kx+\frac{\beta\pi}{2}\right)+b_k\sin\left(kx+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right)$$

(де $a_0=0$ в усіх випадках, крім $r=\beta=0$) є рядом Фур'є деякої функції $\varphi\in L$, то цю функцію називають (r,β)-похідною функції f у сенсі Вейля – Надя і позначають через f_β^r. Множину всіх функцій f, що задовольняють таку умову, позначають через W_β^r [2].

Якщо f належить W_β^r і, крім того, $\|f_\beta^r\|_\infty\leq 1$, то кажуть, що f належить класу $W_{\beta,\infty}^r$. У випадку $\beta=r$ класи $W_{\beta,\infty}^r$ збігаються з класами Соболєва W_∞^r.

Якщо f належить W_β^r і при цьому f_β^r належить H^α, тобто f_β^r задовольняє умову Ліпшиця порядку α

$$|f_\beta^r(x+h)-f_\beta^r(x)|\leq|h|^\alpha,\qquad 0<\alpha\leq 1,\quad 0\leq h\leq 2\pi,\quad x\in\mathbb{R},$$

то кажуть, що f належить класу $W_\beta^rH^\alpha$. При $\alpha=0$ вважають, що $W_\beta^rH^0=W_{\beta,\infty}^r$. При $r=\beta$ отримуємо клас W^rH^α функцій f із похідною порядку $r>0$ в сенсі Вейля, яка задовольняє умову Ліпшиця порядку α. Замість W^0H^α будемо писати H^α, вважаючи, що $f_0^0(x)=f(x)$. При $r\geq 1$ вважають, що $W^{r-1}H^1=W_\infty^r$.

У даній роботі вивчається асимптотична поведінка при $\delta\to\infty$ величин

$$\mathcal{E}(W_\beta^rH^\alpha;B_\delta)_C=\sup_{f\in W_\beta^rH^\alpha}\|f(x)-B_\delta(f;x)\|_C. \tag{4}$$

Задачу про відшукання асимптотичної рівності для величини (4), згідно з О. І. Степанцем [3, с. 198], називатимемо задачею Колмогорова – Нікольського для бігармонічного інтеграла Пуассона $B_\delta(f;x)$ на класі $W_\beta^rH^\alpha$ в рівномірній метриці.

Апроксимативні властивості методу наближення бігармонічними інтегралами Пуассона на класах диференційовних функцій досліджувались багатьма вченими.

С. Канієв [4] встановив асимптотичну рівність для величини $\mathcal{E}(W_\infty^1;B(\rho))_C$ при $\rho\to 1-$. В цій же роботі він знайшов і точні значення апроксимативних характеристик $\mathcal{E}(W_\infty^r;B(\rho))_C$, $r\in\mathbb{N}$, $0\leq\rho<1$.

P. Pych [5] уточнила результати С. Канієва для величини $\mathcal{E}(W_\infty^1;B(\rho))_C$, отримавши асимптотичну рівність із більш точним порядком залишкового члена.

Пізніше ці дослідження були продовжені в роботі Л. П. Фалалєєва [6], де було отримано повний асимптотичний розклад для величини $\mathcal{E}(W_\infty^1;B(\rho))_C$ за степенями $1-\rho$, $\rho\to 1-$.

У роботі Л. П. Фалалєєва та Т. І. Аманова [7] знайдено повний асимптотичний розклад для величини $\mathcal{E}(W_\infty^1;B_\delta)_C$, який формулюється як у термінах $\frac{1}{\delta}$, так і в термінах $1-\rho$.

У роботах К. М. Жигалла, Ю. І. Харкевича [8, 9] знайдено повні асимптотики величин $\mathcal{E}(W_\infty^r;B(\rho))_C$, $r\in\mathbb{N}$, за степенями $1-\rho$, $\rho\to 1-$. Аналогічні розклади, але в інтегральній метриці та за степенями $\frac{1}{\delta}$, $\delta\to\infty$, було знайдено в роботі [10]. Пізніше в роботі [11] було отримано точні значення верхніх меж наближень бігармонічними інтегралами Пуассона на класах спряжених диференційовних функцій у рівномірній та інтегральній метриках. Деякі екстремальні властивості бігармонічних інтегралів Пуассона досліджувались також у роботах [12 – 18].

До цього часу задача Колмогорова – Нікольського для бігармонічного інтеграла Пуассона на класах $W^r_\beta H^\alpha$ не була розв'язана. Тому постало питання про відшукання асимптотичних рівностей для величин $\mathcal{E}(W^r_\beta H^\alpha; B_\delta)_C$.

2. Наближення функцій із класів $W^r_\beta H^\alpha$ бігармонічними інтегралами Пуассона. Нехай

$$\lambda(u) = \lambda_\delta(u) = (1 + \gamma u)e^{-u}, \qquad \gamma = \frac{\delta}{2}(1 - e^{-\frac{2}{\delta}}), \tag{5}$$

— підсумовуюча функція для бігармонічного інтеграла Пуассона, причому $\lambda\left(\dfrac{k}{\delta}\right) = \lambda_{\delta,k}$.

Для бігармонічного інтеграла Пуассона, згідно з Л. І. Баусовим [19], при $r > 0$ введемо функцію

$$\tau(u) = \tau_\delta(r, u) = \begin{cases} (1 - [1 + \gamma u]e^{-u})\delta^r, & 0 \le u \le \dfrac{1}{\delta}, \\ (1 - [1 + \gamma u]e^{-u})u^{-r}, & u \ge \dfrac{1}{\delta}, \end{cases} \tag{6}$$

де $\gamma = \dfrac{\delta}{2}(1 - e^{-\frac{2}{\delta}})$, перетворення Фур'є якої

$$\hat{\tau}_\beta(t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty \tau(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du$$

є сумовним на всій числовій осі (цей факт доведено в роботі [20]).

Домовимося далі через K, K_i позначати сталі, взагалі кажучи, різні в різних співвідношеннях.

Теорема 1. *Нехай $r > 0$, $0 \le \alpha < 1$, $r + \alpha \le 2$, $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді при $\delta \to \infty$ має місце рівність*

$$\mathcal{E}(W^r_\beta H^\alpha; B_\delta)_C = \frac{\theta(\alpha)}{\delta^{r+\alpha}} A(\alpha, \tau) + O\left(\frac{1}{\delta^{1+r}} + \frac{1}{\delta^2}\right), \tag{7}$$

$$2^{\alpha-1} \le \theta(\alpha) \le 1,$$

де величина $A(\alpha, \tau)$ означена співвідношенням

$$A(\alpha, \tau) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^\infty |t|^\alpha \left| \int\limits_0^\infty \tau(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du \right| dt \tag{8}$$

і для неї справджується оцінка

$$A(\alpha, \tau) = \begin{cases} O(1), & r + \alpha < 2, \\ O(\ln \delta), & r + \alpha = 2. \end{cases} \tag{9}$$

Доведення. Скористаємося теоремою 2 з роботи Л. І. Баусова [19, с. 10] і перевіримо виконання її умов. Для цього покажемо збіжність інтеграла (8).

Згідно з теоремою 1 роботи [19, с. 6], для збіжності інтеграла (8) необхідно і достатньо, щоб збігалися інтеграли

$$\int\limits_0^{1/2} u^{1-\alpha}|d\tau'(u)|, \qquad \int\limits_{1/2}^{3/2} |u-1|^{1-\alpha}|d\tau'(u)|, \qquad \int\limits_{3/2}^{\infty} (u-1)\,\big|d\tau'(u)\big|, \tag{10}$$

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{|\tau(u)|}{u^{1+\alpha}}du, \qquad \int\limits_0^{1} \frac{|\tau(1-u)-\tau(1+u)|}{u^{1+\alpha}}du. \tag{11}$$

Для оцінки першого інтеграла з (10) розіб'ємо проміжок $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$ на дві частини (вважатимемо, що $\delta > 3$): $\left[0;\dfrac{1}{\delta}\right]$ і $\left[\dfrac{1}{\delta};\dfrac{1}{2}\right]$. Оскільки при всіх $u \in \left[0;\dfrac{1}{\delta}\right]$ і $\delta > 3$

$$\tau''(u) = (-1+2\gamma-\gamma u)e^{-u}\delta^r \geq 0,$$

то, враховуючи нерівність

$$(-1+2\gamma-\gamma u)e^{-u} \leq 1, \quad u \geq 0,$$

отримуємо

$$\int\limits_0^{1/\delta} u^{1-\alpha}\,\big|d\tau'(u)\big| = \int\limits_0^{1/\delta} u^{1-\alpha}d\tau'(u) \leq \delta^r \int\limits_0^{1/\delta} u^{1-\alpha}du \leq \frac{K}{\delta^{2-r-\alpha}}. \tag{12}$$

Нехай тепер $u \in \left[\dfrac{1}{\delta};\dfrac{1}{2}\right]$. Покладемо

$$\begin{gathered}\tau_1(u) = \left(1 - e^{-u} - \gamma u e^{-u} - \frac{u}{\delta} - \frac{u^2}{2}\right)u^{-r},\\ \tau_2(u) = \frac{1}{\delta}u^{1-r} + \frac{1}{2}u^{2-r},\end{gathered} \tag{13}$$

тоді $\tau(u) = \tau_1(u) + \tau_2(u)$ і

$$\int\limits_{1/\delta}^{1/2} u^{1-\alpha}|d\tau'(u)| \leq \int\limits_{1/\delta}^{1/2} u^{1-\alpha}|d\tau_1'(u)| + \int\limits_{1/\delta}^{1/2} u^{1-\alpha}|d\tau_2'(u)|. \tag{14}$$

Оцінимо перший інтеграл із правої частини нерівності (14). Для цього дослідимо спочатку функцію

$$\overline{\mu}(u) = 1 - e^{-u} - \gamma u e^{-u} - \frac{u^2}{2} - \frac{u}{\delta}. \tag{15}$$

З того, що

$$\begin{gathered}\overline{\mu}'(u) = e^{-u} - \gamma e^{-u} + \gamma u e^{-u} - u - \frac{1}{\delta},\\ \overline{\mu}''(u) = -e^{-u} + 2\gamma e^{-u} - \gamma u e^{-u} - 1,\end{gathered}$$

$$\overline{\mu}(0) = 0, \qquad \overline{\mu}'(0) = 1 - \gamma - \frac{1}{\delta} < 0,$$
$$-1 + 2\gamma - \gamma u < e^u, \quad u \in [0; \infty),$$

випливає, що при $u \geq 0$

$$\overline{\mu}(u) \leq 0, \qquad \overline{\mu}'(u) < 0, \quad \overline{\mu}''(u) < 0. \tag{16}$$

Враховуючи (16) і те, що

$$e^{-u} \leq 1 - u + \frac{u^2}{2}, \quad e^{-u} \geq 1 - u,$$

одержуємо

$$\left|\overline{\mu}(u)\right| = \frac{u^2}{2} + \frac{u}{\delta} - 1 + e^{-u} + \gamma u e^{-u} \leq \frac{u^2}{2} + \frac{u}{\delta} - u + \frac{u^2}{2} + \gamma u - \gamma u^2 + \gamma \frac{u^3}{2} =$$
$$= \left(-1 + \gamma + \frac{1}{\delta}\right) u + (1-\gamma) u^2 + \gamma \frac{u^3}{2},$$
$$\left|\overline{\mu}'(u)\right| = u + \frac{1}{\delta} - e^{-u} + \gamma e^{-u} - \gamma u e^{-u} \leq u + \frac{1}{\delta} - 1 + u + \gamma\left(1 - u + \frac{u^2}{2}\right) - \gamma u + \gamma u^2 =$$
$$= \left(-1 + \gamma + \frac{1}{\delta}\right) + 2(1-\gamma) u + \frac{3}{2} \gamma u^2,$$
$$\left|\overline{\mu}''(u)\right| = e^{-u} - 2\gamma e^{-u} + \gamma u e^{-u} + 1 \leq 1 - 2\gamma + 2\gamma u + \gamma u + 1 = (2 - 2\gamma) + 3\gamma u.$$

Звідси внаслідок нерівностей

$$\gamma < 1, \qquad 1 - \gamma < \frac{1}{\delta}, \qquad -1 + \gamma + \frac{1}{\delta} < \frac{2}{3\delta^2}$$

випливає, що

$$\left|\overline{\mu}(u)\right| < \frac{2}{3\delta^2} u + \frac{1}{\delta} u^2 + \frac{u^3}{2}, \tag{17}$$
$$\left|\overline{\mu}'(u)\right| < \frac{2}{3\delta^2} + \frac{2}{\delta} u + \frac{3}{2} u^2,$$
$$\left|\overline{\mu}''(u)\right| < \frac{2}{\delta} + 3u.$$

Оскільки при $u \geq 1/\delta$, згідно з (13) і (15),

$$|d\tau_1'(u)| \leq \big(r(r+1)|\overline{\mu}(u)| u^{-r-2} + 2r|\overline{\mu}'(u)| u^{-r-1} + |\overline{\mu}''(u)| u^{-r}\big) du,$$

то з урахуванням (17) отримаємо

$$\int\limits_{1/\delta}^{1/2} u^{1-\alpha} |d\tau_1'(u)| \leq r(r+1) \int\limits_{1/\delta}^{1/2} \left(\frac{2}{3\delta^2} u^2 + \frac{1}{\delta} u^3 + \frac{1}{2} u^4\right) u^{-1-r-\alpha} du +$$
$$+ 2r \int\limits_{1/\delta}^{1/2} \left(\frac{2}{3\delta^2} + \frac{2}{\delta} u + \frac{3}{2} u^2\right) u^{-r-\alpha} du + \int\limits_{1/\delta}^{1/2} \left(\frac{2}{\delta} + 3u\right) u^{1-r-\alpha} du \leq K. \tag{18}$$

Знайдемо тепер оцінку другого інтеграла з правої частини нерівності (14). Враховуючи, що

$$\tau_2''(u) = -\frac{1}{\delta}(1-r)ru^{-r-1} + \frac{1}{2}(2-r)(1-r)u^{-r},$$

маємо

$$\int\limits_{1/\delta}^{1/2} u^{1-\alpha}\left|d\tau_2'(u)\right| \le \frac{1}{\delta}\left|1-r\right| r \int\limits_{1/\delta}^{1/2} u^{-r-\alpha}du + \frac{1}{2}(2-r)\left|1-r\right| \int\limits_{1/\delta}^{1/2} u^{1-r-\alpha}du \le$$

$$\le \begin{cases} K_1, & r+\alpha<2, \\ K_2\ln\delta, & r+\alpha=2. \end{cases} \tag{19}$$

Отже, згідно зі співвідношеннями (12), (14), (18) і (19), справджується рівність

$$\int\limits_0^{1/2} u^{1-\alpha}\big|d\tau'(u)\big| = \begin{cases} O(1), & r+\alpha<2, \\ O(\ln\delta), & r+\alpha=2. \end{cases} \tag{20}$$

Оцінимо другий та третій інтеграли з (10). Враховуючи, що при $u \ge \dfrac{1}{\delta}$

$$\tau''(u) = (-1+2\gamma-\gamma u)e^{-u}u^{-r} - 2r(1-\gamma+\gamma u)e^{-u}u^{-r-1} +$$
$$+ r(r+1)\big(1-(1+\gamma u)e^{-u}\big)u^{-r-2}, \tag{21}$$

а також нерівності

$$(-1+2\gamma-\gamma u)e^{-u}u^2 \le 1, \qquad (1-\gamma+\gamma u)e^{-u}u \le 1, \tag{22}$$

$$1-(1+\gamma u)e^{-u} \le 1, \quad u \ge 0, \tag{23}$$

отримуємо оцінки

$$\int\limits_{1/2}^{3/2} |u-1|^{1-\alpha}\big|d\tau'(u)\big| \le \int\limits_{1/2}^{3/2} u^{1-\alpha}\big|d\tau'(u)\big| \le K_1, \tag{24}$$

$$\int\limits_{3/2}^{\infty} (u-1)\big|d\tau'(u)\big| \le \int\limits_{3/2}^{\infty} u\big|d\tau'(u)\big| \le K_2. \tag{25}$$

Для оцінки першого інтеграла з (11) розіб'ємо проміжок $[0;\infty)$ на три частини: $[0;1/\delta]$, $[1/\delta;1]$ та $[1;\infty)$. Використовуючи співвідношення (6) і нерівність

$$1-(1+\gamma u)e^{-u} \le \frac{2}{\delta}u + u^2, \quad u \ge 0,$$

одержуємо

$$\int\limits_0^{1/\delta}\frac{|\tau(u)|}{u^{1+\alpha}}du=\int\limits_0^{1/\delta}\frac{\big(1-(1+\gamma u)e^{-u}\big)\delta^r}{u^{1+\alpha}}du\leq$$

$$\leq\delta^r\int\limits_0^{2/\delta}\left(\frac{2}{\delta}u^{-\alpha}+u^{1-\alpha}\right)du\leq\frac{K_1}{\delta^{2-r-\alpha}}. \tag{26}$$

Із співвідношень (6), (15) і (17) маємо

$$\left|\int\limits_{1/\delta}^{1}\frac{|\tau(u)|}{u^{1+\alpha}}du-\frac{1}{2}\int\limits_{1/\delta}^{1}\frac{u^{2-r}}{u^{1+\alpha}}du-\frac{1}{\delta}\int\limits_{1/\delta}^{1}\frac{u^{1-r}}{u^{1+\alpha}}du\right|\leq$$

$$\leq\int\limits_{1/\delta}^{1}\big|\overline{\mu}(u)\big|u^{-r-\alpha-1}du\leq\int\limits_{1/\delta}^{1}\left(\frac{2}{3\delta^2}u+\frac{1}{\delta}u^2+\frac{1}{2}u^3\right)u^{-r-\alpha-1}du\leq K_2.$$

Звідси

$$\int\limits_{1/\delta}^{1}\frac{\big|\tau(u)\big|}{u^{1+\alpha}}du=\frac{1}{2}\int\limits_{1/\delta}^{1}u^{1-r-\alpha}du+\frac{1}{\delta}\int\limits_{1/\delta}^{1}u^{-r-\alpha}du+O(1)=$$

$$=\begin{cases}O(1), & r+\alpha<2,\\ \dfrac{1}{2}\ln\delta+O(1), & r+\alpha=2.\end{cases} \tag{27}$$

Враховуючи формулу (6) та нерівність (23), одержуємо

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{\big|\tau(u)\big|}{u^{1+\alpha}}du=\int\limits_1^{\infty}\left(1-(1+\gamma u)e^{-u}\right)u^{-r-\alpha-1}du\leq\int\limits_1^{\infty}u^{-r-\alpha-1}du\leq K_3. \tag{28}$$

Об’єднуючи формули (26)–(28), отримуємо

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{\big|\tau(u)\big|}{u^{1+\alpha}}du=\begin{cases}O(1), & r+\alpha<2,\\ \dfrac{1}{2}\ln\delta+O(1), & r+\alpha=2.\end{cases} \tag{29}$$

Оцінимо другий інтеграл із (11). Оскільки інтеграли (10) збіжні, то має місце рівність (див., наприклад, [21])

$$\int\limits_0^{1}\frac{|\tau(1-u)-\tau(1+u)|}{u^{1+\alpha}}du=\int\limits_0^{1}\frac{|\lambda(1-u)-\lambda(1+u)|}{u^{1+\alpha}}du+$$

$$+\,O\left(|\tau(0)|+|\tau(1)|+\int\limits_0^{1/2}u^{1-\alpha}\left|d\tau'(u)\right|+\int\limits_{1/2}^{3/2}|u-1|^{1-\alpha}\left|d\tau'(u)\right|+\int\limits_{3/2}^{\infty}(u-1)\left|d\tau'(u)\right|\right), \tag{30}$$

де $\lambda(u)=(1+\gamma u)e^{-u}$. Оскільки

$$\int\limits_0^1 \frac{|\lambda(1-u)-\lambda(1+u)|}{u^{1+\alpha}}du=$$

$$=\int\limits_0^1 \frac{\left|e^{-1+u}-e^{-1-u}+\gamma(1-u)e^{-1+u}-\gamma(1+u)e^{-1-u}\right|}{u^{1+\alpha}}du=O(1),$$

то з урахуванням співвідношень (20), (24) і (25) із (30) випливає

$$\int\limits_0^1 \frac{|\tau(1-u)-\tau(1+u)|}{u^{1+\alpha}}du=\begin{cases} O(1), & r+\alpha<2, \\ O\left(\ln\delta\right), & r+\alpha=2. \end{cases} \tag{31}$$

Таким чином, за теоремою 1 роботи [19] інтеграл $A(\alpha,\tau)$ є збіжним. З нерівностей (1.12) та (1.13) роботи [19], з урахуванням формул (20), (24), (25), (29) та (31), отримуємо співвідношення (9).

Отже, ми переконалися, що для функції $\tau(u)$, що задана формулою (6), виконуються умови теореми 2 з роботи [19]. Тоді при $\delta\to\infty$ справджується рівність

$$\mathcal{E}(W^r_\beta H^\alpha;B_\delta)_C=\frac{\theta(\alpha)}{\delta^{r+\alpha}}A(\alpha,\tau)+O\left(\frac{1}{\delta^{r+\alpha}}a(\alpha,\tau)\right), \tag{32}$$

де

$$2^{\alpha-1}\le\theta(\alpha)\le 1,\quad 0\le\alpha<1,$$

$$a(\alpha,\tau)=\int\limits_{|t|\ge\frac{\delta\pi}{2}} |t|^\alpha|\widehat{\tau}_\beta(t)|dt, \tag{33}$$

а величину $A(\alpha,\tau)$ означено формулою (8).

Знайдемо оцінку для інтеграла $a(\alpha,\tau)$ вигляду (33). Для цього запишемо перетворення Фур'є $\widehat{\tau}_\beta(t)$ у вигляді

$$\widehat{\tau}_\beta(t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du=\frac{1}{\pi}\left(\int\limits_0^{1/\delta}+\int\limits_{1/\delta}^\infty\right)\tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du. \tag{34}$$

Зінтегруємо двічі частинами інтеграли з правої частини рівності (34):

$$\int\limits_0^{1/\delta}\tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du=\frac{1}{t}\left(1-\left(1+\frac{\gamma}{\delta}\right)e^{-(1/\delta)}\right)\delta^r\sin\left(\frac{1}{\delta}t+\frac{\beta\pi}{2}\right)+$$

$$+\frac{1}{t^2}e^{-(1/\delta)}\left(1-\gamma+\frac{\gamma}{\delta}\right)\delta^r\cos\left(\frac{1}{\delta}t+\frac{\beta\pi}{2}\right)-\frac{1}{t^2}(1-\gamma)\delta^r\cos\frac{\beta\pi}{2}-$$

$$-\frac{1}{t^2}\int\limits_0^{1/\delta}\tau''(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du, \tag{35}$$

$$\int\limits_{1/\delta}^{\infty}\tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du=-\frac{1}{t}\left(1-\left(1+\frac{\gamma}{\delta}\right)e^{-(1/\delta)}\right)\delta^r\sin\left(\frac{1}{\delta}t+\frac{\beta\pi}{2}\right)-$$

$$-\frac{1}{t^2}\left(\left(1-\gamma+\frac{\gamma}{\delta}\right)e^{-(1/\delta)}\delta^r-r\left(1-\left(1+\frac{\gamma}{\delta}\right)e^{-(1/\delta)}\right)\delta^{r+1}\right)\cos\left(\frac{1}{\delta}t+\frac{\beta\pi}{2}\right)-$$

$$-\frac{1}{t^2}\int\limits_{1/\delta}^{\infty}\tau''(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du. \tag{36}$$

Підставивши (35) і (36) в (34), отримаємо

$$\widehat{\tau}_\beta(t)=-\frac{1}{\pi t^2}\int\limits_0^{1/\delta}\tau''(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du-\frac{1}{\pi t^2}\int\limits_{1/\delta}^{\infty}\tau''(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du-$$

$$-\frac{1}{\pi t^2}(1-\gamma)\delta^r\cos\frac{\beta\pi}{2}+\frac{r}{\pi t^2}\left(1-\left(1+\frac{\gamma}{\delta}\right)e^{-(1/\delta)}\right)\delta^{r+1}\cos\left(\frac{1}{\delta}t+\frac{\beta\pi}{2}\right),$$

звідки

$$\left|\widehat{\tau}_\beta(t)\right|\le\frac{1}{\pi t^2}\left(\int\limits_0^{1/\delta}+\int\limits_{1/\delta}^{1}+\int\limits_1^{\infty}\right)|\tau''(u)|du+\frac{1}{t^2}\frac{K}{\delta^{1-r}}. \tag{37}$$

Враховуючи, що $\tau''(u)\ge 0$ на $\left[0;\dfrac{1}{\delta}\right]$, $\delta>3$, і нерівності

$$\left(1-\gamma+\frac{\gamma}{\delta}\right)e^{-(1/\delta)}\le\frac{2}{\delta},\quad 1-\gamma\le\frac{1}{\delta},$$

маємо

$$\int\limits_0^{1/\delta}|\tau''(u)|du=\int\limits_0^{1/\delta}\tau''(u)du=\left(1-\gamma+\frac{\gamma}{\delta}\right)e^{-(1/\delta)}\delta^r-(1-\gamma)\,\delta^r=O\left(\frac{1}{\delta^{1-r}}\right). \tag{38}$$

Нехай $u\in\left[\dfrac{1}{\delta};1\right]$. Міркуючи, як і при оцінюванні першого інтеграла з (10) на проміжку $\left[\dfrac{1}{\delta};\dfrac{1}{2}\right]$, можна показати справедливість оцінки

$$\int\limits_{1/\delta}^{1}|\tau''(u)|du=O\left(1+\frac{1}{\delta^{1-r}}\right). \tag{39}$$

Використовуючи співвідношення (21), отримуємо

$$\int\limits_1^\infty |\tau''(u)|du \leq r\,(r+1)\int\limits_1^\infty \big(1-(1+\gamma u)e^{-u}\big)u^{-r-2}du+$$

$$+2r\int\limits_1^\infty \big(1-\gamma+\gamma u\big)e^{-u}u^{-r-1}du+\int\limits_1^\infty |-1+2\gamma-\gamma u|e^{-u}u^{-r}du.$$

Тоді, враховуючи нерівності (22) та (23), можна переконатися, що

$$\int\limits_1^\infty \big|\tau''(u)\big|du = O(1). \tag{40}$$

Об'єднуючи формули (37) – (40), одержуємо

$$\big|\widehat{\tau}_\beta(t)\big| = \frac{1}{t^2}O\left(1+\frac{1}{\delta^{1-r}}\right).$$

Звідси

$$a(\alpha,\tau) = \int\limits_{|t|\geq\frac{\delta\pi}{2}} |t|^\alpha\big|\widehat{\tau}_\beta(t)\big|dt = O\left(\frac{1}{\delta^{1-\alpha}}+\frac{1}{\delta^{2-(r+\alpha)}}\right). \tag{41}$$

Із співвідношень (32) і (41) випливає рівність (7).

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Якщо* $0<\alpha<1$, *то при* $\delta\to\infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\left(H^\alpha;B_\delta\right)_C = (1-\alpha)\sec\frac{\alpha\pi}{2}\frac{1}{\delta^\alpha}+O\left(\frac{1}{\delta}\right). \tag{42}$$

Доведення. Згідно з теоремою 2 роботи Л. І. Баусова [19], якщо інтеграли

$$\int\limits_0^{1/2} u^{1-\alpha}\big|d\lambda'(u)\big|, \qquad \int\limits_{1/2}^{3/2} |u-1|^{1-\alpha}\big|d\lambda'(u)\big|, \qquad \int\limits_{3/2}^{\infty} (u-1)\big|d\lambda'(u)\big|, \tag{43}$$

$$A(\alpha,\lambda) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|t|^\alpha\left|\int\limits_0^\infty \lambda(u)\cos ut du\right|dt, \tag{44}$$

де $\lambda(u)$ задано рівністю (5), збігаються, то для $0<\alpha<1$ при $\delta\to\infty$ має місце рівність

$$\mathcal{E}\left(H^\alpha;B_\delta\right)_C = \frac{1}{\delta^\alpha}A(\alpha,\lambda)+O\left(\frac{1}{\delta^\alpha}a\left(\alpha,\lambda\right)\right), \tag{45}$$

де

$$a(\alpha,\lambda) = \int\limits_{|t|\geq\frac{\delta\pi}{2}} |t|^\alpha\left|\int\limits_0^\infty \lambda(u)\cos ut du\right|dt. \tag{46}$$

Збіжність інтегралів (43) очевидна.

Знайдемо оцінку інтеграла (44). Використовуючи формули 3.893.2 та 3.944.6 із [22], отримуємо

$$A(\alpha,\lambda)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty t^\alpha\left|\int\limits_0^\infty\left(1+\frac{\delta}{2}\left(1-e^{-(2/\delta)}\right)u\right)e^{-u}\cos utdu\right|dt=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty t^\alpha\left(\frac{1}{1+t^2}+\frac{\delta}{2}\left(1-e^{-(2/\delta)}\right)\frac{1-t^2}{\left(1+t^2\right)^2}\right)dt. \tag{47}$$

Враховуючи формули 3.241.2 та 3.241.5 із [22], маємо

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{t^\alpha}{1+t^2}dt=\sec\frac{\alpha\pi}{2}, \tag{48}$$

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{t^\alpha(1-t^2)}{(1+t^2)^2}dt=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{t^\alpha}{(1+t^2)^2}dt-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{t^{\alpha+2}}{(1+t^2)^2}dt=$$

$$=\frac{\alpha-1}{2}\operatorname{cosec}\frac{(\alpha-1)\pi}{2}-\frac{\alpha+1}{2}\operatorname{cosec}\frac{(\alpha+1)\pi}{2}=-\alpha\sec\frac{\alpha\pi}{2}. \tag{49}$$

Підставляючи (48) та (49) в (47), дістаємо

$$A(\alpha,\lambda)=\sec\frac{\alpha\pi}{2}+\frac{\delta}{2}\left(1-e^{-(2/\delta)}\right)\left(-\alpha\sec\frac{\alpha\pi}{2}\right)=(1-\alpha)\sec\frac{\alpha\pi}{2}+O\left(\frac{1}{\delta}\right). \tag{50}$$

Таким чином, ми переконались у збіжності інтеграла (44), а отже, і в справедливості рівності (45).

Знайдемо тепер оцінку інтеграла (46). Аналогічно (47) матимемо

$$a(\alpha,\lambda)=2\int\limits_{\frac{\delta\pi}{2}}^\infty t^\alpha\left|\int\limits_0^\infty\left(1+\frac{\delta}{2}\left(1-e^{-(2/\delta)}\right)u\right)e^{-u}\cos utdu\right|dt=$$

$$=2\int\limits_{\frac{\delta\pi}{2}}^\infty t^\alpha\left(\frac{1}{1+t^2}+\frac{\delta}{2}\left(1-e^{-(2/\delta)}\right)\frac{1-t^2}{\left(1+t^2\right)^2}\right)dt. \tag{51}$$

Враховуючи оцінки

$$\int\limits_{\frac{\delta\pi}{2}}^\infty\frac{t^\alpha}{1+t^2}\leq\int\limits_{\frac{\delta\pi}{2}}^\infty t^{\alpha-2}dt=\frac{K}{\delta^{1-\alpha}},$$

$$\int\limits_{\frac{\delta\pi}{2}}^\infty\frac{t^\alpha(1-t^2)}{(1+t^2)^2}\leq\int\limits_{\frac{\delta\pi}{2}}^\infty\frac{t^\alpha}{1+t^2}\leq\frac{K}{\delta^{1-\alpha}},$$

із (51) одержуємо

$$a(\alpha, \lambda) = O\left(\frac{1}{\delta^{1-\alpha}}\right). \qquad (52)$$

Підставляючи (50) та (52) в (45), отримуємо рівність (42).

Теорему 2 доведено.

Література

1. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 735 с.
2. *Nagy B.* Über gewise Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen, I // Period. Fall, Ber. Math. Phys. KL. Akad. – 1938. – **90**. – S. 103 – 134.
3. *Степанец А. И.* Методы теории приближения. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. I. – 427 с.
4. *Каниев С.* Об уклонении бигармонических в круге функций от их граничных значений // Докл. АН СССР. – 1963. – **153**, № 5. – С. 995 – 998.
5. *Pych P.* On a biharmonic function in unit disk // Ann. pol. math. – 1968. – **20**, № 3. – P. 203 – 213.
6. *Фалалеев Л. П.* Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из $\mathrm{Lip}_1 1$ от одного сингулярного интеграла // Теоремы вложения и их приложения: Материалы всесоюз. симп. – Алма-Ата: Наука, 1976. – С. 163 – 167.
7. *Аманов Т. И., Фалалеев Л. П.* Приближение дифференцируемых функций операторами типа Абеля – Пуассона // Пятое советско-чехословацкое совещание по применению методов теории функций и функционального анализа к задачам математической физики (Алма-Ата, 1976): Тр. сов. – Новосибирск, 1979. – С. 13 – 16.
8. *Zhyhallo K. M., Kharkevych Yu. I.* On the approximation of functions of the Hölder class by biharmonic Poisson integrals // Ukr. Math. J. – 2000. – **52**, № 7. – P. 1113 – 1117.
9. *Zhyhallo K. M., Kharkevych Yu. I.* Approximation of differentiable periodic functions by their biharmonic Poisson integrals // Ukr. Math. J. – 2002. – **54**, № 9. – P. 1462 – 1470.
10. *Kharkevych Yu. I., Kal'chuk I. V.* Asymptotics of the values of approximations in the mean for classes of differentiable functions by using biharmonic Poisson integrals // Ukr. Math. J. – 2007. – **59**, № 8. – P. 1224 – 1237.
11. *Zhyhallo K. M., Kharkevych Yu. I.* Approximation of conjugate differentiable functions by biharmonic Poisson integrals // Ukr. Math. J. – 2009. – **61**, № 3. – P. 399 – 413.
12. *Каниев С.* Точна оцінка відхилення в середньому бігармонічних в крузі функцій від їх граничних значень // Докл. АН СССР. – 1964. – № 4. – С. 451 – 453.
13. *Петров В. А.* Бигармонический интеграл Пуассона // Лит. мат. сб. – 1967. – **7**, № 1. – С. 137 – 142.
14. *Трофимов В. Н., Цыганков А. С.* Точные неравенства для колебаний гармонических и бигармонических в круге функций // Сиб. мат. журн. – 1969. – **10**, № 2. – С. 398 – 416.
15. *Gonzales L., Keller E., Wildenhain G.* Über das Randverhalten des Poisson-Integrals der polyharmonischen Gleichung // Math. Nachr. – 1980. – **95**. – S. 157 – 164.
16. *Hembars'ka S. B.* Tangential limit values of a biharmonic Poisson integral in a disk // Ukr. Math. J. – 1997. – **49**, № 9. – P. 1317 – 1323.
17. *Заставный В. П.* Точная оценка приближения некоторых классов дифференцируемых функций сверточными операторами // Укр. мат. вісн. – 2010. – **7**, № 3. – С. 409 – 433.
18. *Zhyhallo K. M., Kharkevych Yu. I.* Approximation of functions from the classes $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ // Ukr. Math. J. – 2011. – **63**, № 7. – P. 1083 – 1107.
19. *Баусов Л. И.* Линейные методы суммирования рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами, II // Изв. вузов. – 1996. – **46**, № 3. – С. 15 – 31.
20. *Zhyhallo K. M., Kharkevych Yu. I.* Approximation of (ψ, β)-differentiable functions of low smoothness by biharmonic Poisson integrals // Ukr. Math. J. – 2012. – **64**, № 12. – P. 1820 – 1844.
21. *Kharkevich Yu. I., Stepanyuk T. A.* Approximation properties of Poisson integrals for the classes $C^{\psi}_{\beta}H^{\alpha}$ // Math. Notes. – 2014. – **96**, № 5. – P. 1008 – 1019.
22. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.

Одержано 29.02.16