

## ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНО ЗБІЖНИЙ МЕТОД ДЛЯ АБСТРАКТНОЇ НЕЛОКАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ З ІНТЕГРАЛЬНОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ

We consider a problem for the first-order differential equation with unbounded operator coefficient in Banach space and a nonlinear integral nonlocal condition. An exponentially convergent method for the numerical solution of this problem is proposed and justified under assumption that the indicated operator coefficient  $A$  is strongly positive and certain existence and uniqueness conditions are satisfied. This method is based on the reduction of the posed problem to an abstract Hammerstein equation, discretization of this equation by the collocation method, and its subsequent solution by the fixed-point iteration method. Each iteration of the method involves the Sinc-based numerical evaluation of the exponential operator function represented by the Dunford–Cauchy integral over the hyperbola enveloping the spectrum of  $A$ . The integral part of the nonlocal condition is approximated by using the Clenshaw–Curtis quadrature formula.

Для дифференциального уравнения первого порядка с неограниченным операторным коэффициентом в банаховом пространстве рассматривается нелокальная задача с нелинейным интегральным условием. Построен экспоненциально сходящийся метод для численного решения этой задачи в предположении, что операторный коэффициент  $A$  секториальный и выполнены условия существования и единственности решения. Этот метод основывается на сведении задачи к абстрактному интегральному уравнению типа Гаммерштейна, дискретизации этого уравнения с помощью метода коллокаций и дальнейшем использовании метода простой итерации для нахождения решения. Каждая итерация метода включает Sinc-квадратурное приближение операторной экспоненты, представленной с помощью интеграла Данфорда–Коши по гиперболе, которая охватывает спектр  $A$ . Для приближения интегральной части нелокального условия используется квадратурная формула Кленшоу–Куртиса.

**1. Вступ.** У цій статті розглядається задача

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t)}{\partial t} + Au(t) &= 0, \quad t \in (-1, 1], \\ u(-1) - \int_{-1}^1 w(s, u(s)) ds &= u_0, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $u(t)$  — невідома векторнозначна функція зі значеннями в банаховому просторі  $(X, \|\cdot\|)$ ,  $u_0 \in X$  — заданий вектор,  $w(t, u) : (\mathbb{R}_+ \times X) \rightarrow X$  — задана функція (нелінійний оператор) і  $A$  — лінійний замкнений оператор зі щільною областю визначення  $D(A)$  в  $X$  (секторіальний). Тобто спектр цього оператора  $\Sigma(A)$  розташовано у секторі у правій півплощині з вершиною у початку координат, а резольвента  $R_A(z)$  оператора  $A$  спадає обернено пропорційно до  $|z|$  на нескінченності,

$$\Sigma = \left\{ z = \rho_0 + re^{i\theta} : r \in [0, \infty), \rho_0 > 0, |\theta| < \varphi < \frac{\pi}{2} \right\} \quad (2)$$

і виконується оцінка

$$\|R_A(z)\| = \|(zI - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{1 + |z|} \quad (3)$$

за межами сектора та на його межі  $\Gamma_\Sigma$ . Числа  $\rho_0$ ,  $\varphi$  називаються спектральними характеристиками  $A$ . Крім того, ми вважаємо, що розв'язок  $u(t)$  і функція  $w(t, u(t))$  мають аналітичне продовження (відносно  $t$ ) у еліпс Бернштейна  $\mathcal{E}_\rho$ ,

$$\mathcal{E}_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| + |z + 1| < \rho + \rho^{-1}\}. \quad (4)$$

Абстрактна постановка задачі (1) включає в себе багато важливих прикладних задач, зокрема задачі розповсюдження тепла, дифузійні процеси в пористих середовищах, задачі, що описують рух електронів у напівпровідниках, хімічні реакції, динаміку ядерних реакцій, рівняння Нав'є–Стокса для в'язкої рідини та ін. (див., наприклад, [13] та наведену там бібліографію). Це разом з цікавим теоретичним аспектом спонукає до побудови ефективних дискретизованих наближень задачі (1).

Останнім часом дослідженням, пов'язаним з розробкою експоненціально збіжних чисельних методів для еволюційних та крайових задач у абстрактній постановці в банаховому просторі з необмеженими операторними коефіцієнтами, приділяється значна увага. Варто відмітити роботи [7–11, 16, 17, 26], що стосуються побудови методів для рівнянь першого та другого порядків у класичній постановці (початкові та крайові задачі). Для нелокальних задач також розроблено методи, що дозволяють знаходити наближений розв'язок з експоненціальною швидкістю збіжності. Так, у роботах [6, 23, 24] побудовано методи для багатоточкових задач, а в [1, 25] — для задач з лінійними інтегральними умовами. Експоненціально збіжні методи є основою для оптимальних чи майже оптимальних за кількістю операцій методів для наближення аналітичних розв'язків (із залученням тензорних зображень див., наприклад, [4, 5]).

**2. Інтегральне зображення розв'язку.** Оскільки оператор  $A$  є секторіальним, він породжує напівгрупу [15], а розв'язок рівняння (1) можна записати у вигляді

$$u(t) = e^{-A(t+1)}u(-1),$$

що з урахуванням нелокальної умови приводить до нелінійного інтегрального рівняння

$$u(t) = e^{-A(t+1)}u_0 + e^{-A(t+1)} \int_{-1}^1 w(s, u(s)) ds. \quad (5)$$

Рівняння такого роду в літературі відомі як абстрактні рівняння типу Гаммерштейна [12, 14]. Чисельним методи для рівнянь типу (5) присвячено роботи [3, 19–21]. Дія операторної експоненти  $e^{-A(t+1)}$ , що входить до рівняння (5), на елементи простору  $X$  може бути зображена за допомогою інтеграла Данфорда–Коші [2, 18]

$$e^{-A(t+1)}v = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{-z(t+1)} R_A(z) v dz. \quad (6)$$

Тут  $R_A(z) = (zI - A)^{-1}$  — резольвента оператора  $A$ , а  $\Gamma$  — контур інтегрування, позитивно орієнтований відносно спектра оператора  $A$ . Для наближеного знаходження операторних експонент в (5) застосуємо метод, розроблений у [7] (див. також [11]). Відповідно до цього методу контур інтегрування  $\Gamma$  в (6) задається таким чином:

$$\Gamma = \{z(s) = a_I \cosh(s) - ib_I \sinh(s) : s \in (-\infty, \infty)\}.$$

Значення параметрів  $(a_I, b_I)$ , які залежать від спектральних характеристик оператора  $A$ , вибираються виходячи з вимоги аналітичності підінтегральної функції у смузі комплексної площини  $\mathbb{C}$

$$D_d = \left\{ \xi = x + iy \mid x \in \mathbb{R}, |y| < \frac{d}{2} \right\}$$

шириною  $d$ . Величина  $d > 0$  визначає швидкість збіжності квадратурного методу, що застосовується нами далі для наближення (6). Оптимальне з точки зору збіжності квадратури значення параметра  $d$  досягається при

$$d = \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

Параметри контуру інтегрування  $\Gamma$  визначаються формулами

$$a_I = \rho_0 \frac{\cos\left(\frac{d}{2} + \varphi\right)}{\cos \varphi}, \quad b_I = \rho_0 \frac{\sin\left(\frac{d}{2} + \varphi\right)}{\cos \varphi}. \tag{7}$$

Крім того, в інтегралі (6) виконаємо заміну стандартної резольвенти  $R_A(z)$  на скореговану  $R_{A,1}(z)$ :

$$R_{A,1}(z) = R_A(z) - \frac{1}{z}I.$$

Така заміна дає змогу гарантувати чисельну стійкість при використанні (6) для наближеного обчислення операторної експоненти при  $t \rightarrow -1$  (детальніше див. [11]).

Підставивши щойно означене параметризоване зображення операторної експоненти в інтегральне рівняння (5), отримаємо

$$u(t) = T(A, t)u_0 + T(A, t) \int_{-1}^1 w(s, u(s))ds, \tag{8}$$

де

$$T(A, t)v = \int_{\Gamma_I} e^{-z(t+1)} R_{A,1}(z)v dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z(\xi)(t+1)} z'(\xi) R_{A,1}(z(\xi))v d\xi,$$

$$z'(\zeta) = a_I \sinh \zeta - ib_I \cosh \zeta,$$

$a_I, b_I$  — визначені у (7) параметри, що залежать від спектральних характеристик оператора  $A$ .

**3. Дискретизація.** Далі для наближеного обчислення інтеграла (6) застосуємо формулу трапецій (Sinc-квадратурну формулу). Таким чином, для операторної експоненти матимемо наближення

$$e^{-A(t+1)}v \approx T_N(A, t)v \equiv \frac{h}{2\pi i} \sum_{p=-N}^N e^{-z(ph)(t+1)} z'(ph) R_{A,1}(z(ph))v. \tag{9}$$

За умови вибору

$$h = \sqrt{\frac{\pi d}{\alpha(N+1)}}$$

похибка наближення (9) задовольняє оцінку [11]

$$\|\eta_N(t)v\| = \left\| e^{-A(t+1)}v - T_N(A, t)v \right\| \leq \frac{c e^{-\sqrt{\pi d \alpha(N+1)}}}{\alpha} \|A^\alpha v\| \quad \forall v \in D(A^\alpha), \quad (10)$$

яка є експоненціальною. Слід зазначити, що обчислення в (9) можна розпаралелити, обчислюючи резольвенти незалежно одна від одної, а також паралельно обчислювати експоненти для різних моментів часу.

Далі наблизимо інтеграл з (8), що містить незалежну від оператора складову. На проміжку інтегрування  $[-1, 1]$  означимо сітку, яка складається з вузлів Чебишова – Гаусса – Лобато (ЧГЛ) [22]:

$$t_j = -\cos\left(\frac{\pi j}{n}\right), \quad j = \overline{0, n}.$$

Такий вибір вузлів дозволяє отримати експоненціально збіжне наближення і знаходити коефіцієнти квадратурної формули в явному вигляді.

Нехай

$$P_n(t; y) = \sum_{j=0}^n L_{j,n}(t) y_j \quad \text{для вектора } y = (y_0, \dots, y_n),$$

де  $L_{j,n}(t)$  – фундаментальні поліноми Лагранжа за системою вузлів ЧГЛ:

$$L_{j,n}(t) = \prod_{k=0, k \neq j}^n \frac{t - t_k}{t_j - t_k}.$$

Замінімо підінтегральну функцію поліномом Лагранжа і проколокуємо інтегральне рівняння (8) у вузлах інтерполяції  $t_j$ . В результаті отримаємо нелінійну систему рівнянь

$$y_i = T_N(A, t_i) u_0 + T_N(A, t_i) \sum_{j=0}^n \alpha_j w(t_j, y_j), \quad i = \overline{0, n}, \quad (11)$$

де

$$\alpha_j = \int_{-1}^1 L_{j,n}(t) dt.$$

**Зауваження 1.** Коефіцієнти  $\alpha_j$  є коефіцієнтами квадратурної формули Кленшоу – Куртіса, які знаходяться в явному вигляді. Ці коефіцієнти не потребують перерахунку при зміні  $y_i$  (за умови, що  $n$  є фіксованим) і можуть бути ефективно обчислені за допомогою швидкого перетворення Фур'є.

Похибка наближення функції інтерполяційним поліномом  $P_n(t, y)$ , як відомо, залежить від гладкості функції  $y(t)$ , визначеної на  $[-1, 1]$ , та можливості її аналітичного продовження в еліпс  $\mathcal{E}_\rho \subset \mathbb{C}$  з фокусами у кінцях цього відрізка (див. [22]).

**4. Розв'язок дискретизованого рівняння.** Запишемо систему рівнянь (11) у матрично-векторному вигляді

$$\vec{y} = \mathcal{A}\vec{w}(\vec{y}) + \vec{p}, \tag{12}$$

де  $\vec{w}(y) = (w(t_0, y_0), \dots, w(t_n, y_n))^T$ ,  $\mathcal{A} = [\alpha_{i,j}]_{i,j=0}^n$ ,  $\alpha_{i,j} = T_N(A, t_i)\alpha_j$ ,  $\vec{p} = (T_N(A, t_0)u_0, \dots, T_N(A, t_n)u_n)^T$ . Дослідимо умови існування розв'язку системи (12) та наведемо спосіб побудови наближення розв'язку. Для існування розв'язку системи (12) достатньо, щоб рекурентна послідовність

$$\begin{aligned} \vec{y}^{(k)} &= \mathcal{A}\vec{w}(\vec{y}^{(k-1)}) + \vec{p}, \\ \vec{y}^{(0)} &= \vec{p}, \end{aligned} \tag{13}$$

збігалась у векторному просторі  $X^n = X \times X \times \dots \times X$ . Для елементів  $\vec{x} \in X^n$  введемо норму

$$\|\vec{x}\| = \max_{0 \leq j \leq n} \|x_j\|.$$

Ця норма індукує узгоджену норму у просторі матриць  $\mathcal{M} = [a_{i,j}]_{i,j=0}^n$  з елементами  $a_{ij} \in X$ :

$$\|\mathcal{M}\| = \max_{0 \leq i \leq n} \sum_{j=0}^n \|a_{ij}\|.$$

Припустимо також, що для будь-яких  $u, v \in X$  функція  $w(t, \cdot)$  задовольняє аналог умови Ліпшиця вигляду

$$\|A^\alpha (w(t, u) - w(t, v))\| \leq L \|u - v\| \quad \forall t \in [-1, 1] \tag{14}$$

з деякими сталими  $L < \infty$  та  $\alpha > 0$ . Оскільки  $\vec{y}^{(k)} = \sum_{l=1}^k (\vec{y}^{(l)} - \vec{y}^{(l-1)})$ , знайдемо норму  $\|\vec{y}^{(k)} - \vec{y}^{(k-1)}\|$ . Маємо

$$\begin{aligned} \|\vec{y}^{(k)} - \vec{y}^{(k-1)}\| &= \|\mathcal{A}(\vec{w}(\vec{y}^{(k-1)}) - \vec{w}(\vec{y}^{(k-2)}))\| \leq \\ &\leq L \|\mathcal{A}A^{-\alpha}\| \|\vec{y}^{(k-1)} - \vec{y}^{(k-2)}\|, \end{aligned}$$

де норма матриці  $\|\mathcal{A}A^{-\alpha}\|$  виражається як

$$\|\mathcal{A}A^{-\alpha}\| = \max_{0 \leq i \leq n} \sum_{j=0}^n \|\alpha_{ij}\| = \max_{0 \leq i \leq n} \sum_{j=0}^n \|T_N(A, t_i)A^{-\alpha}\| |\alpha_j|.$$

З огляду на оцінку (3.278) з [11] можемо записати

$$\|T_N(A, t_i)A^{-\alpha}\| \leq \frac{c}{\alpha}, \tag{15}$$

що в результаті приводить до оцінки

$$\|\mathcal{A}A^{-\alpha}\| \leq \frac{c}{\alpha} \sum_{j=0}^n |\alpha_j| = \frac{2c}{\alpha}. \tag{16}$$

Тут ми врахували, що коефіцієнти  $\alpha_j$  є коефіцієнтами квадратурної формули Кленшоу – Куртіса. Отже,

$$\|y^{(k)} - y^{(k-1)}\| \leq \frac{2Lc}{\alpha} \|y^{(k-1)} - y^{(k-2)}\| \leq \dots \leq \left(\frac{2Lc}{\alpha}\right)^k \|\bar{p}\|.$$

Застосувавши щойно отриману нерівність до кожного з доданків розкладу  $\bar{y}^{(k)}$ , отримаємо остаточну оцінку

$$\|y^{(k)}\| \leq \sum_{p=0}^k \left(\frac{2Lc}{\alpha}\right)^p \|\bar{p}\| = \|\bar{p}\| \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}. \quad (17)$$

Має місце така теорема.

**Теорема 1.** Нехай  $A: X \rightarrow X$  – лінійний секторіальний оператор, а функція  $w(t, u): (\mathbb{R}_+ \times X) \rightarrow D(A^\alpha) \subseteq X$  має аналітичне продовження в еліпс Бернштейна  $\mathcal{E}_\rho$  та задовольняє нерівність (14) зі сталими  $L, \alpha$ . Припустимо, що виконується умова

$$q \equiv \frac{2Lc}{\alpha} < 1, \quad (18)$$

де  $c$  – стала з оцінки (15). Тоді функція  $y^{(\infty)}$  є єдиним розв'язком матричного нелінійного рівняння (12), до того ж

$$\|\bar{y}^{(\infty)}\| \leq \|\bar{p}\| \frac{1}{1 - q}. \quad (19)$$

Похибка  $k$ -го рекурентного наближення розв'язку цього рівняння задовольняє оцінку

$$\|\bar{y}^{(\infty)} - \bar{y}^{(k)}\| \leq \|\bar{p}\| \frac{q^{k+1}}{1 - q}. \quad (20)$$

**Доведення.** Доведення того, що  $y^{(\infty)}$  є єдиним розв'язком системи (12), випливає з теореми Банаха про нерухому точку. Простір  $X^n$  разом з уведеною метрикою  $d(x, y) = \|\bar{x} - \bar{y}\|$  є повним метричним простором. Відображення  $\mathcal{F}$ , задане у (13), переводить простір  $X^n$  в себе і є стискаючим, оскільки

$$\|\mathcal{F}\bar{x} - \mathcal{F}\bar{y}\| = \|\mathcal{A}(\bar{w}(\bar{x}) - \bar{w}(\bar{y}))\| \leq \frac{2Lc}{\alpha} \|\bar{x} - \bar{y}\| = q \|\bar{x} - \bar{y}\|, \quad (21)$$

де остання нерівність випливає з (14), (16). Стала  $q < 1$  за припущенням теореми, тому справедливою є оцінка (17), з якої безпосередньо випливають нерівності (19) та (20).

**5. Аналіз похибки наближення розв'язку вихідної задачі.** Для оцінки похибки наближення у точках колокації введемо до розгляду величини  $z_i = u_i - y_i$ ,  $u_i \equiv u(t_i)$ ,  $i = \overline{0, n}$ , та позначимо  $\vec{u} = (u_0, \dots, u_n)^T$ ,  $\vec{z} = (z_0, \dots, z_n)^T$ . Обчислимо  $z_i$ , використавши формули (5) та (11):

$$z_i = e^{-A(t_i+1)} u_0 - T_N(A, t_i) u_0 + e^{-A(t_i+1)} \int_{-1}^1 w(s, u(s)) ds -$$

$$\begin{aligned}
 -T_N(A, t_i) \sum_{j=0}^n \alpha_j w(t_j, y_j) &= \eta_N(t_i) u_0 + \eta_N(t_i) \int_{-1}^1 w(s, u(s)) ds + \\
 +T_N(A, t_i) \left( \int_{-1}^1 w(s, u(s)) ds - \int_{-1}^1 \sum_{j=0}^n L_{j,n}(s) w(t_j, u_j) ds \right) &+ \\
 +T_N(A, t_i) \left( \int_{-1}^1 \sum_{j=0}^n L_{j,n}(s) w(s_j, u_j) ds - \sum_{j=0}^n \alpha_j w(t_j, y_j) \right) &= \\
 = \eta_N(t_i) u_0 + \eta_N(t_i) \int_{-1}^1 w(s, u(s)) ds + \\
 +T_N(A, t_i) \int_{-1}^1 \left( w(s, u(s)) - \sum_{j=0}^n L_{j,n}(s) w(t_j, u_j) \right) ds + \\
 +T_N(A, t_i) \sum_{j=0}^n \alpha_j [w(s_j, u_j) - w(t_j, y_j)].
 \end{aligned}$$

Проведені перетворення дозволяють записати  $z_i$  у вигляді суми чотирьох складових:

$$z_i = \eta_N(t_i) u_0 + \eta_N(t_i) \int_{-1}^1 w(s, u(s)) ds + \psi_{1,i} + \psi_{2,i},$$

де

$$\begin{aligned}
 \psi_{1,i} &= T_N(A, t_i) \int_{-1}^1 \left( w(s, u(s)) - \sum_{j=0}^n L_{j,n}(s) w(t_j, u_j) \right) ds, \\
 \psi_{2,i} &= T_N(A, t_i) \sum_{j=0}^n \alpha_j [w(s_j, u_j) - w(t_j, y_j)].
 \end{aligned}$$

Далі дослідимо похибку наближення розв'язку рівняння (5) у вузлах  $t_i$ . Для  $\psi_1$  маємо

$$\begin{aligned}
 \|\psi_1\| &= \max_{0 \leq i \leq n} \left\| T_N(A, t_i) \int_{-1}^1 \left[ w(s, u(s)) - \sum_{j=0}^n L_{j,n}(s) w(t_j, u_j) \right] ds \right\| \leq \\
 &\leq \frac{c}{\alpha} \int_{-1}^1 \left\| A^\alpha \left[ w(s, u(s)) - \sum_{j=0}^n L_{j,n}(s) w(t_j, u_j) \right] \right\| ds \leq \\
 &\leq c_1 \ln n E_n(A^\alpha w(\cdot, u(\cdot))),
 \end{aligned}$$

де  $E_n(u)$  — похибка найкращого наближення  $u$  поліномами степеня  $n$ :

$$E_n(u) = \min_{p \in \Pi_n} \|u - p\|.$$

Для  $\psi_2$  матимемо

$$\begin{aligned} \|\psi_2\| &= \max_{0 \leq i \leq n} \left\| T_N(A, t_i) \sum_{j=0}^n \alpha_j [w(s_j, u_j) - w(s_j, y_j)] \right\| \leq \\ &\leq \frac{c}{\alpha} \sum_{j=0}^n |\alpha_j| \|A^\alpha [w(s_j, u_j) - w(s_j, y_j)]\| \leq \frac{2Lc}{\alpha} \|z\| = q \|z\|. \end{aligned}$$

Це приводить нас до оцінки на  $\|z\|$ :

$$\begin{aligned} \|z\| &\leq \frac{c e^{-\sqrt{\pi d \alpha (N+1)}}}{\alpha} \|A^\alpha u_0\| + \frac{c e^{-\sqrt{\pi d \alpha (N+1)}}}{\alpha} \int_{-1}^1 \|A^\alpha w(s, u(s))\| ds + \\ &+ c_1 \ln n E_n(A^\alpha w(\cdot, u(\cdot))) + q \|z\|. \end{aligned}$$

Сформулюємо отриманий результат у вигляді леми.

**Лема 1.** Припустимо, що для оператора  $A$  та функції  $w$  виконуються умови теореми 1. Тоді розв'язок системи нелінійних рівнянь (12) є наближенням розв'язку рівняння (5) у вузлах сітки ЧГЛ. Похибка наближення задовольняє оцінку

$$\begin{aligned} \|z\| &\leq \frac{c e^{-\sqrt{\pi d \alpha (N+1)}}}{(1-q)\alpha} \left( \|A^\alpha u_0\| + \int_{-1}^1 \|A^\alpha w(s, u(s))\| ds \right) + \\ &+ \frac{c_1 \ln n E_n(A^\alpha w(\cdot, u(\cdot)))}{1-q}. \end{aligned} \quad (22)$$

Повна похибка запропонованого методу наближення є сумою похибок дискретизації рівняння (5) та похибки наближеного розв'язування нелінійної системи (12).

**Теорема 2.** Припустимо, що для оператора  $A$  та функції  $w$  виконуються умови теореми 1. Тоді похибка наближення розв'язку нелінійного інтегрального рівняння (5) вектором  $\vec{y}^k$ , який є наближенням розв'язком системи (12), має вигляд

$$\|\vec{u} - \vec{y}^k\| \leq \|z\| + \frac{q^{k+1}}{1-q} \|\vec{p}\|. \quad (23)$$

Наступний приклад ілюструє застосування алгоритму чисельного розв'язування задачі (1), що викладений у пунктах 3, 4.

**Приклад.** Розглянемо задачу (1), в якій нелінійна нелокальна умова має вигляд

$$u(-1) - \mu \int_{-1}^1 u^2(s) ds = u_0, \quad (24)$$

$$u_0(x) = \sin(\pi x) + \mu \frac{e^{-4\pi^2} - 1}{2\pi^2} \sin^2(\pi x).$$



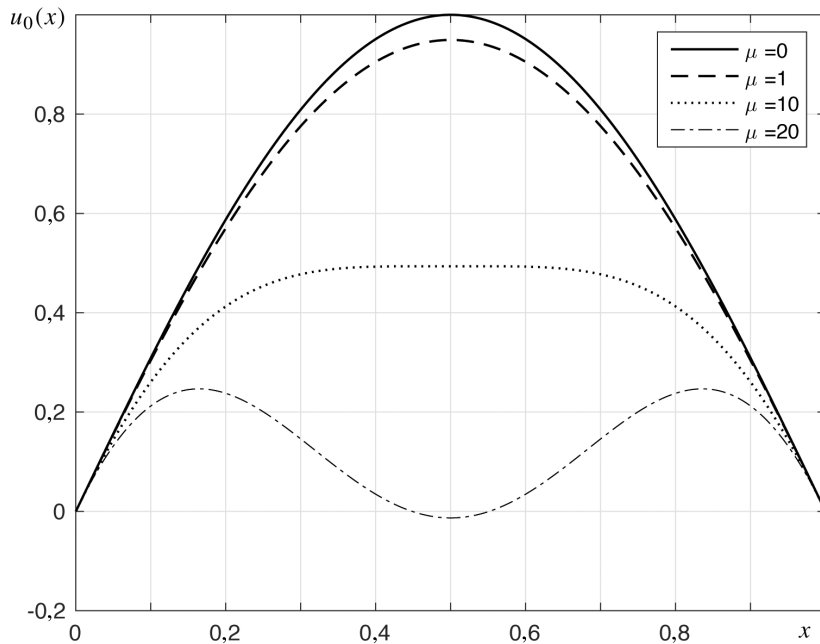


Рис. 1. Графік функції  $u_0(x)$  при різних значеннях параметра  $\mu$ .

Функція  $w(s, u) = \mu u^2$  залежить від додаткового параметра  $\mu$ , зміна якого дозволяє маніпулювати величиною сталої  $L$  з (14). Точним розв'язком нелокальної задачі (1) з умовою (24) є розв'язок

$$u_{ex}(t, x) = e^{-(t+1)\pi^2} \sin(\pi x), \tag{25}$$

вигляд якого не залежить від  $\mu$ .

Як видно з графіка функції  $u_0$ , зображеного на рис. 1, при малих значеннях параметра  $\mu$  відмінність розв'язку нелокальної задачі (1) (який при  $t = 0$  еквівалентний  $u_0(x)$  з  $\mu = 0$ ) від розв'язку класичної задачі Коші є незначною і зростає зі збільшенням  $\mu$  (див. для порівняння графік при  $\mu = 20$ ).

Спочатку покладемо  $\mu = 1/4$ . Легко перевірити, що такий вибір  $\mu$  забезпечує виконання умови (18) для  $\alpha = 1$  та  $\rho_0 > 0$ , а визначена таким чином функція  $w(s, u)$  допускає аналітичне продовження по змінній  $s$  у область  $\mathcal{E}_\rho \in \mathbb{C}$ . Згідно з теоремою 1, у такому випадку рекурентна послідовність наближень  $\vec{y}^{(k)}$ , побудована з використанням (13), повинна збігатися до наближення розв'язку системи (12).

Для експериментальної оцінки похибки чисельного наближення розв'язку використовуватимемо величину

$$\text{Err} = \text{Err} \left( u_{ex}, \vec{y}^{(k)} \right) \equiv \max_{0 \leq l \leq m} \max_{0 \leq j \leq n} \left\| u_{ex}(t_l, x_l) - y_j^{(k)}(x_l) \right\|,$$

де  $x_l = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \left( \frac{\pi l}{m} \right) \right)$ ,  $l = \overline{0, m}$ , — промасштабовані на  $[0, 1]$  вузли ЧГЛ. В якості зупиночного критерію для ітераційного процесу розв'язування матричного нелінійного рівняння (12) використовуватимемо умову

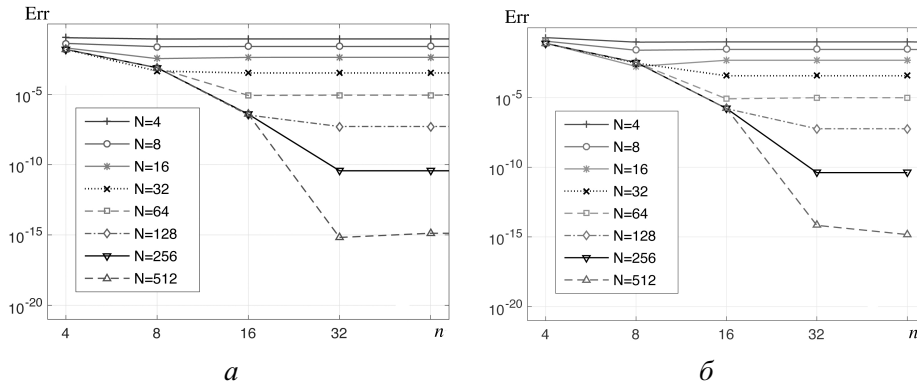


Рис. 2. Графік залежності похибки Err від кількості вузлів колокації  $n$  для різних значень параметра  $N$ :  
 $a - \mu = 0,25$ ;  $b - \mu = 1$ .

$$\text{Err}(\bar{y}^{(k)}, \bar{y}^{(k-1)}) < 10^{-18},$$

де  $K > 0$  – номер фінальної ітерації.

Результати числових розрахунків, які базуються на формулах (13), (11) та (9), з різними значеннями параметрів дискретизації  $N$ ,  $n$  наведено в таблиці. Ця таблиця ілюструє залежність похибки наближення розв'язку вихідної задачі Err від комбінації параметрів  $N$  та  $n$ . Для кожного  $N \in \{4, 8, 16, 32, 64, 128, 256\}$  значення  $n$  підібрано експериментально, виходячи з динаміки похибки в залежності від  $n$  (див. рис. 2). Таблиця також містить оцінену апостеріорно кількість ітерацій  $K$ , яких достатньо для забезпечення відносної похибки на рівні  $10^{-5}$ .

*Результати експериментів використання розробленого методу чисельного розв'язування задачі (1) з нелокальною умовою (24)*

| $N$ | $n$ | Err                                   | $K$ |
|-----|-----|---------------------------------------|-----|
| 4   | 8   | 0,0859119243400000010                 | 5   |
| 8   | 8   | 0,0244950525900000000                 | 5   |
| 16  | 8   | 0,00345794666699999987                | 6   |
| 32  | 16  | 0,000328787487900000005               | 6   |
| 64  | 16  | 0,00000833843948899999922             | 7   |
| 128 | 32  | 0,0000000515513076299999962           | 9   |
| 256 | 32  | $3,68083566999999982 \times 10^{-11}$ | 11  |
| 512 | 64  | $1,32334447899999999 \times 10^{-15}$ | 13  |

## Література

1. Василик В. Б., Макаров В. Л. Експоненціально збіжний метод для диференціального рівняння першого порядку в банаховому просторі з інтегральною нелокальною умовою // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 8. – Р. 1029–1040.
2. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 464 с.
3. Bica A., Curila M., Curila S. About a numerical method of successive interpolations for functional Hammerstein integral equations // J. Comput. and Appl. Math. – 2012. – **236**, № 7. – Р. 2005–2024.
4. Gavriluk I. P., Hackbusch W., Khoromskij B. N. Data-sparse approximation to the operator-valued functions of elliptic operator // Math. Comput. – 2004. – **73**. – Р. 1297–1324.

5. Gavrilyuk I. P., Hackbusch W., Khoromskij B. N. Data-sparse approximation of a class of operator-valued functions // *Math. Comput.* – 2005. – **74**. – P. 681–708.
6. Gavrilyuk I. P., Makarov V. L., Sytnyk D. O., Vasylyk V. B. Exponentially convergent method for the  $m$ -point nonlocal problem for a first order differential equation in Banach space // *Numer. Funct. Anal. and Optim.* – 2010. – **31**, № 1-3. – P. 1–21.
7. Gavrilyuk I. P., Makarov V. L. Exponentially convergent algorithms for the operator exponential with applications to inhomogeneous problems in Banach spaces // *SIAM J. Numer. Anal.* – 2005. – **43**, № 5. – P. 2144–2171.
8. Gavrilyuk I. P., Makarov V. L. An exponential convergent algorithm for nonlinear differential equations in Banach spaces // *Math. Comput.* – 2007. – **76**. – P. 1895–1923.
9. Gavrilyuk I. P., Makarov V. L., Vasylyk V. B. Exponentially convergent approximation to the elliptic solution operator // *Comput. Meth. Appl. Math.* – 2006. – **6**, № 4. – P. 386–404.
10. Bohonova T. Ju., Gavrilyuk I. P., Makarov V. L., Vasylyk V. B. Exponentially convergent Duhamel-like algorithms for differential equations with an operator coefficient possessing a variable domain in a Banach space // *SIAM J. Numer. Anal.* – 2008. – **46**, № 1. – P. 365–396.
11. Gavrilyuk I., Makarov V., Vasylyk V. Exponentially convergent algorithms for abstract differential equations // *Front. Math.* – Basel AG: Birkhäuser/Springer, 2011. – viii+180 p.
12. Gupta C. P. Functional analysis and applications // *Proc. Symp. Anal. Univ. Federal de Pernambuco Recife (Pernambuco, Brasil, July 9–29, 1972)* / Ed. L. Nachbin. – Berlin; Heidelberg: Springer, 1974. – P. 184–238.
13. Henry D. Geometrical theory of semilinear parabolic equations. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 1981.
14. Hess P. On nonlinear equations of Hammerstein type in Banach spaces // *Proc. Amer. Math. Soc.* – 1971. – **30**, № 2. – P. 308–312.
15. Kato T. On linear differential equations in Banach spaces // *Communs Pure and Appl. Math.* – 1956. – **9**. – P. 479–486.
16. López-Fernández M., Palencia C., Schädle A. A spectral order method for inverting sectorial Laplace transforms // *SIAM J. Numer. Anal.* – 2006. – **44**. – P. 1332–1350.
17. McLean W., Thomee V. Time discretization of an evolution equation via Laplace transforms // *IMA J. Numer. Anal.* – 2004. – **24**. – P. 439–463.
18. Clément Ph., Heijmans H. J. A. M., Angenent S. et al. One-parameter semigroups. – Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1987. – x+312 p.
19. Fitzpatrick P. M., Petryshyn W. V. Galerkin methods in the constructive solvability of nonlinear Hammerstein equations with applications to differential equations // *Trans. Amer. Math. Soc.* – 1978. – **238**. – P. 321–340.
20. Some B. Some recent numerical methods for solving nonlinear Hammerstein integral equations // *Math. and Comput. Modelling.* – 1993. – **18**, № 9. – P. 55–62.
21. Kumar S., Sloan I. H. A new collocation-type method for Hammerstein integral equations // *Math. Comput.* – 1987. – **48**, № 178. – P. 585–593.
22. Trefethen L. N. Approximation theory and approximation practice. – Philadelphia, PA: So. Industrial and App. Math., 2013.
23. Vasylyk V. Exponentially convergent method for the  $m$ -point nonlocal problem for an elliptic differential equation in Banach space // *J. Numer. and Appl. Math.* – 2011. – **105**, № 2. – P. 124–135.
24. Vasylyk V. Nonlocal problem for an evolution first order equation in Banach space // *J. Numer. and Appl. Math.* – 2012. – **109**, № 3. – P. 139–149.
25. Vasylyk V. Exponentially convergent method for integral nonlocal problem for the elliptic equation in Banach space // *J. Numer. and Appl. Math.* – 2013. – **110**, № 3. – P. 119–130.
26. Weideman J. A. C. Improved contour integral methods for parabolic PDEs // *IMA J. Numer. Anal.* – 2010. – **30**, № 1. – P. 334–350.

Одержано 28.07.16